第 28 卷第 10 期
2011 年 10 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 28 No. 10
Oct. 2011

文章编号: 1000−8152(2011)10−1431−05

奇异时滞系统的新稳定判据及其在部分元件等效电路中的应用

王惠姣[1], 薛安克[2]

(1. 浙江理工大学 自动化研究所, 浙江 杭州 310018; 2. 杭州电子科技大学 信息与控制研究所, 浙江 杭州 310018)

摘要: 针对奇异时滞系统的稳定性分析问题, 利用时滞分解方法, 通过引入积分不等式, 得出新的时滞相关稳定判据. 时滞分解方法的基本思想是: 将整个时滞区间等分为多个子区间, 在每个子区间上定义不同的能量函数, 以此构造新的Lyapunov-Krasovskii泛函. 部分元件等效电路用于验证本文所提方法具有更小的保守性.

关键词: 奇异时滞系统; 时滞分解方法; 积分不等式; 稳定性; 部分元件等效电路

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

New stability criterion for singular time-delay systems and its application to partial element equivalent circuit

WANG Hui-jiao[1], XUE An-ke[2]

(1. Institute of Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou Zhejiang 310018, China;
2. Institute of Information and Control, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou Zhejiang 310018, China)

Abstract: We analyze the stability of singular systems with time-delay, and derive a delay-dependent stability criterion by using the delay decomposition approach and introducing an integral inequality. In the delay decomposition approach, the entire delay interval is divided into multiple subintervals for which different energy functions are defined for building new Lyapunov-krasovskii functional. A partial element equivalent circuit(PEEC) model is used to validate the propose method; results show this method is with less conservative than other existing methods in the literature.

Key words: singular time-delay system; delay decomposition approach; integral inequality; stability; partial element equivalent circuit(PEEC)

1　引言(Introduction)

奇异系统, 又称为广义系统、描述系统等, 是比正则系统更具有广泛形式的动力学系统, 它广泛存在于电力网络、电路、受限机器人、经济系统、石油催化裂化等科学技术及大型工程的众多领域[1,2]. 另一方面, 时滞现象大量存在于自然科学与社会科学中[3,4]. 近年来, 奇异时滞系统的稳定性问题受到人们的广泛关注, 在现有的结果中, 主要分两类结果, 一是时滞无关条件[5,6], 另一是时滞相关条件. 对于小时滞情形, 时滞无关条件具有较大的保守性. 采用不同的方法, 大量学者针对奇异时滞系统, 得出了许多时滞相关条件[7~12], 而容许的最大时滞上界为评价时滞相关条件保守性的“性能指标”.

对于线性时滞系统而言, 文献[13]提出了时滞分解方法来处理稳定性分析问题. 该方法的思想是将整个时滞区间等分为多个子区间, 并在每个子区间上定义不同的能量泛函. 基于时滞分解方法可以得出保守性更小的时滞相关稳定判据. 该方法同时用于分析H_∞控制问题[14]和中立系统的稳定性问题[15].

本文将时滞分解方法推广到奇异时滞系统中. 通过采用新的Lyapunov-Krsovskii泛函, 针对奇异时滞系统, 得出新的时滞相关稳定判据, 可以看出, 现有的一些研究成果是这一新的时滞相关稳定判据的特例. 同时将该稳定判据用于研究部分元件等效电路(partial element equivalent circuit, PEEC)的稳定性问题, 实验进一步证明本文所提方法的有效性和低保守性.

2　问题描述(Problem formulation)

考虑如下形式的奇异时滞系统:

$$\begin{cases} E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + A_{\rm d}\boldsymbol{x}(t-r), \\ \boldsymbol{x}(\theta) = \phi(\theta),\ \forall\theta \in [-r, 0], \end{cases} \tag{1}$$

其中: $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$为系统状态, $r > 0$为系统的常数时滞, $\phi(\theta)$为一致连续函数, 表示系统的初始状态, E, A和$A_{\rm d}$为适当维数的已知常数矩阵, 且E可能

收稿日期: 2010−05−17; 收修改稿日期: 2010−11−15.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60804010, 61004034, 61104094); 浙江省自然科学基金资助项目(Y1100227, Y1080791); 浙江省教育厅资助项目(Y200805296).

是奇异的, 不失一般性, 假设其秩为b, 即rank $E = b \leqslant n$.

定义 1[5] 1) 矩阵对 (E, A) 是正则的, 如果 $\det(sE-A)$不恒等于0;

2) 矩阵对(E, A)是无脉冲的, 如果$\deg(\det(sE-A)) = \operatorname{rank} E$.

定义 2[5] 1) 奇异时滞系统(1)是正则、无脉冲的, 如果矩阵对(E, A)是正则的、无脉冲的.

2) 奇异时滞系统(1)是稳定的, 如果给定常数$\epsilon > 0$, 存在常数 $\delta(\epsilon) > 0$, 使得对于任意满足$\sup\limits_{-r\leqslant t\leqslant 0} \|\phi(t)\| \leqslant \delta(\epsilon)$的相容初始条件$\phi(t)$, 系统的轨迹$\boldsymbol{x}(t)$均满足$\|\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant \epsilon, \forall t \geqslant 0$, 且$\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = 0$.

为了清楚说明本文的研究动机, 假设奇异时滞系统(1)具有如下参数:

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ A_{\mathrm{d}}=\begin{bmatrix}-1.1 & 1\\ 0 & 0.5\end{bmatrix}, \tag{2}$$

可得确保该数值例子稳定的时滞解析解为$r_{\text{analytical}} = 1.1325$. 而通过求解一些带等式约束的线性矩阵不等式, 文献[7]得到容许的最大时滞上界 $r_{\max} = 0.5567$; 利用 Lyapunov 技术, 文献[8]得到$r_{\max} = 0.8708$; 通过系统增广方法, 文献[9]得到$r_{\max} = 0.9680$, 文献[10]得到$r_{\max} = 1.0423$; 利用自由权矩阵方法, 文献[11]得到$r_{\max} = 1.0660$; 由于模型变换和交叉项界定会增加额外的保守性, 文献[12]避免使用模型变换, 选用如下的Lyapunov-Krsovskii泛函:

$$\begin{aligned}&V(t, \boldsymbol{x}_t) =\\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}PE\boldsymbol{x}(t) + \int_{\mathrm{t-r}}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)Q\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s +\\ &\int_{-\mathrm{r}}^{0}\int_{\mathrm{t}+\theta}^{\mathrm{t}} \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)(rE^{\mathrm{T}}WE)\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,\end{aligned} \tag{3}$$

其中: $P = P^{\mathrm{T}} > 0, Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$和$W = W^{\mathrm{T}} > 0$. 并采用

$$\begin{aligned}&-\int_{t-r}^{t} \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)(rX)\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s \leqslant\\ &[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\, \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-r)]\begin{bmatrix}-X & X\\ X & -X\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(t-r)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

来替换常规的交叉项界定方法, 得到$r_{\max} = 1.0660$. 跟上述文献相比, 文献[12]得出的稳定性判据是严格的线性矩阵不等式, 其中只包含Lyapunov-Krsovskii泛函中的P, Q和W, 没有其他额外的自由权矩阵. 但是该结果$r_{\max} = 1.0660$跟系统的解析解$r_{\text{analytical}} = 1.1325$ 相比, 还有提升的空间.

为此引入新的Lyapunov-Krsovskii泛函:

$$\begin{aligned}&V(t, \boldsymbol{x}_t) =\\ &x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}PE\boldsymbol{x}(t) + \sum_{i=1}^{N}\int_{t-ih}^{t-(i-1)h} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)Q_i\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s +\\ &\sum_{i=1}^{N}\int_{-ih}^{-(i-1)h}\int_{t+\theta}^{t} \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)(hE^{\mathrm{T}}W_iE)\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,\end{aligned} \tag{4}$$

其中: $h = r/N$, N为时滞区间$[-r,\ 0]$的分割个数(正整数), h为子区间的长度, 且$P = P^{\mathrm{T}} > 0$, $Q_i = Q_i^{\mathrm{T}} > 0$和$W_i = W_i^{\mathrm{T}} > 0$, $i = 1, 2, \cdots, N$. 可以看出Lyapunov-Krsovskii泛函(3)和泛函(4)的区别在于泛函(4)将整个时滞区间分解为N个子区间, 且在每个子区间上定义不同的能量函数.

为得出本文结果, 介绍如下引理.

引理 1[16] 对任意的常数矩阵$X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X = X^{\mathrm{T}} > 0$, 常数$r > 0$, 以及函数$\dot{x}: [-r,\ 0] \to \mathbb{R}^n$, 有以下积分不等式成立:

$$\begin{aligned}&-\int_{t-r}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)(rX)\dot{x}(s)\mathrm{d}s \leqslant\\ &[x^{\mathrm{T}}(t)\, x^{\mathrm{T}}(t-r)]\begin{bmatrix}-X & X\\ X & -X\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t-r)\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{5}$$

引理 2[17] 考虑函数φ: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, 如果$\dot{\varphi}$在$[0, \infty)$上都是有界的, 即存在一个常数$\alpha > 0$使得对所有的$t \in [0, \infty)$, $|\ \dot{\varphi}(t)\ | \leqslant \alpha$成立, 则$\varphi(t)$在$[0, \infty)$上是一致连续的.

引理 3[17] 考虑函数φ: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, 如果$\varphi$是一致连续的, 且$\int_0^{\infty} \varphi(s)\mathrm{d}s < \infty$, 则有$\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.

3 稳定性判据(Stability criteria)

3.1 时滞相关稳定判据(Delay-dependent stability criteria)

定理 1 给定常数$r > 0$, 奇异时滞系统(1)是正则、无脉冲且稳定的, 如果存在适当维数的正定对称矩阵$P = P^{\mathrm{T}} > 0, Q_i = Q_i^{\mathrm{T}} > 0, W_i = W_i^{\mathrm{T}} > 0$, $i = 1, 2, \cdots, N$和矩阵S使得

$$\varPsi = \begin{bmatrix}\varPsi^{(1)} & \varPsi^{(2)}\\ \varPsi^{(2)\mathrm{T}} & \varPsi^{(3)}\end{bmatrix} < 0, \tag{6}$$

其中:

$$\varPsi^{(1)} = \begin{bmatrix}\varPsi_{11}^{(1)} & E^{\mathrm{T}}W_1E & 0 & \cdots & 0 & \varPsi_{1\ N+1}^{(1)}\\ * & \varPsi_{22}^{(1)} & E^{\mathrm{T}}W_2E & \cdots & 0 & 0\\ * & * & \varPsi_{33}^{(1)} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ * & * & * & \cdots & \varPsi_{NN}^{(1)} & E^{\mathrm{T}}W_NE\\ * & * & * & \cdots & * & \varPsi_{N+1\ N+1}^{(1)}\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\varPsi_{11}^{(1)} = {}& A^{\mathrm{T}}(PE + RS^{\mathrm{T}}) + (E^{\mathrm{T}}P + SR^{\mathrm{T}})A +\\ & Q_1 - E^{\mathrm{T}}W_1E,\end{aligned}$$

$\Psi_{22}^{(1)} = -Q_1 - E^{\mathrm{T}}W_1E + Q_2 - E^{\mathrm{T}}W_2E,$
$\Psi_{33}^{(1)} = -Q_2 - E^{\mathrm{T}}W_2E + Q_3 - E^{\mathrm{T}}W_3E,$
$\Psi_{NN}^{(1)} = -Q_{N-1} - E^{\mathrm{T}}W_{N-1}E + Q_N - E^{\mathrm{T}}W_NE,$
$\Psi_{N+1\ N+1}^{(1)} = -Q_N - E^{\mathrm{T}}W_NE,$
$\Psi_{1\ N+1}^{(1)} = (E^{\mathrm{T}}P + SR^{\mathrm{T}})A_{\mathrm{d}},$

$$\Psi^{(2)} = \begin{bmatrix} hA^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{N}W_i \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ hA_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{N}W_i \end{bmatrix},\ \Psi^{(3)} = -\sum_{i=1}^{N}W_i,$$

且$R \in \mathbb{R}^{n\times(n-b)}$为任意满足$E^{\mathrm{T}}R = 0$的列满秩矩阵.

证　首先证明奇异时滞系统(1)是正则、无脉冲的.

由于rank $E = b \leqslant n$, 则一定存在两个可逆矩阵G和$H \in \mathbb{R}^{n\times n}$使得$\bar{E} = GEH = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. 类似的, 定义$\bar{A} = GAH = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$, 采用同文献[12]相同的方法, 可得$\bar{A}_{22}$非奇异.

则

$$\begin{aligned} &\det(sE - A) = \\ &\det(G^{-1})\det(s\bar{E} - \bar{A})\det(H^{-1}) = \\ &\det(G^{-1})\det(-\bar{A}_{22})\det(sI_r - \\ &(\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21}))\det(H^{-1}), \end{aligned}$$

这就意味着$\det(sE - A)$不恒等于0和$\deg(\det(sE - A)) = \mathrm{rank}\,E$. 由定义1知, 矩阵对$(E, A)$是正则、无脉冲的, 也就是说奇异时滞系统(1)是正则、无脉冲的.

接着证明奇异时滞系统(1)是稳定的.

选择新的 Lyapunov-Krsovskii 泛函 (4), 注意到$E^{\mathrm{T}}R = 0$, 根据引理1, $V(t, \boldsymbol{x}_t)$沿系统(1)对时间t的导数满足

$$\dot{V}(t, \boldsymbol{x}_t) \leqslant \xi^T(t)(\Psi^{(1)} + \sum_{i=1}^{N}L_1^T h^2 W_i L_1)\xi(t), \quad (7)$$

其中:

$$\xi^{\mathrm{T}}(t) = [x^{\mathrm{T}}(t)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-h)\ \ \cdots\ \ x^{\mathrm{T}}(t-Nh)],$$
$$L_1 = [A\ \ 0\ \ \cdots\ \ A_{\mathrm{d}}].$$

由Schur补引理可知, 式(6)意味着

$$\Psi^{(1)} + \sum_{i=1}^{N}L_1^{\mathrm{T}}h^2W_iL_1 < 0,$$

故$\dot{V}(t, \boldsymbol{x}_t) < 0$成立.

令

$$\varsigma(t) = \begin{bmatrix} \varsigma_1(t) \\ \varsigma_2(t) \end{bmatrix} = H^{-1}x(t),$$

其中$\varsigma_1(t) \in \mathbb{R}^b, \varsigma_2(t) \in \mathbb{R}^{n-b}$. 采用同文献[5]相同的方法, 可得$\int_0^t \|\varsigma_1(s)\|^2\mathrm{d}s$和$\|\dot{\varsigma}_1(t)\|$有界, 由引理2知, $\|\dot{\varsigma}_1(t)\|$是一致连续的. 注意到$\int_0^t \|\varsigma_1(s)\|^2\mathrm{d}s$有界, 根据引理3知, $\lim\limits_{t\to\infty}\varsigma_1(t) = 0$. 同样可得$\lim\limits_{t\to\infty}\varsigma_2(t) = 0$. 由定义2知, 奇异时滞系统(1)是稳定的.　　证毕.

注 1　基于Lyapunov-Krsovskii泛函(4), 定理1针对奇异时滞系统, 得出了新的时滞相关稳定判据. 针对具有参数(2)的奇异时滞系统, 可以得到当$N = 2$时, $r_{\max} = 1.1075$; 当$N = 3$时, $r_{\max} = 1.1151$; 当$N = 4$时, $r_{\max} = 1.1171$; 当$N = 5$时, $r_{\max} = 1.1179$等等; 由此可以看出, $r_{\max} = 1.0660$得到了较大的提高, 该数值例子表明了采用本文的方法, 可以降低结果的保守性.

特别地, 当$N = 1$时, 定理1包含如下结果.

推论 1　给定常数$r > 0$, 奇异时滞系统(1)是正则、无脉冲且稳定的, 如果存在适当维数的正定对称矩阵$P = P^{\mathrm{T}} > 0, Q_1 = Q_1^{\mathrm{T}} > 0, W_1 = W_1^{\mathrm{T}} > 0$和矩阵$S$使得

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{11}^{(1)} & \tilde{\Psi}_{12}^{(1)} & rA^{\mathrm{T}}W_1 \\ * & -Q_1 - E^{\mathrm{T}}W_1E & rA_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}W_1 \\ * & * & -W_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (8)$$

其中: $\tilde{\Psi}_{12}^{(1)} = (E^{\mathrm{T}}P + SR^{\mathrm{T}})A_{\mathrm{d}} + E^{\mathrm{T}}W_1E, \tilde{\Psi}_{12}^{(1)}$ 和 $R \in \mathbb{R}^{n\times(n-b)}$同定理1.

注 2　值得一提的是, 当$N = 1$时, 只要令$Q_1 = Q$, $W_1 = W$, Lyapunov-Krsovskii泛函(4)就转化为文献[12]中采用的Lyapunov-Krsovskii泛函(3). 只要令$Q_1 = Q, W_1 = W$, 推论1即等价于文献[12]不考虑非线性时的稳定判据(定理1, 文献[12]).

注 3　当$E = I$时, 奇异时滞系统(1)就转化为常规的正则系统, 即$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_{\mathrm{d}}x(t-r)$. 由$E^{\mathrm{T}}R = 0$得$R = 0$, 将$E = I$和$R = 0$代入式(6), 定理1就转为文献[12]的命题1.

3.2　鲁棒稳定判据(Robust stability criteria)

如果系统矩阵A和A_{d}存在范数有界不确定性, 奇异时滞系统(1)就变为

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = (A + DF(t)E_{\mathrm{a}})x(t) + \\ \qquad\qquad (A_{\mathrm{d}} + DF(t)E_{\mathrm{d}})x(t-r), \\ x(\theta) = \phi(\theta),\ \theta = [-r, 0], \end{cases} \quad (9)$$

其中: $D, E_{\mathrm{a}}, E_{\mathrm{d}}$为适当维数的已知常数矩阵, $F(t)$为未知的矩阵函数, 且满足$F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant I$,

采用同文献[13]相同的方法, 奇异时滞系统(9)可写为

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_{\mathrm{d}}x(t-r) + Dp(t), \\ q(t) = E_{\mathrm{a}}x(t) + E_{\mathrm{d}}x(t-d), \end{cases} \tag{10}$$

具有不确定反馈

$$p(t) = F(t)q(t). \tag{11}$$

采用同定理1相类似的步骤, 针对不确定奇异时滞系统(9), 利用新的Lyapunov-Krsovskii泛函(4), 可得如下定理.

定理 2 给定常数 $r > 0$, 不确定奇异时滞系统(9)是正则、无脉冲且稳定的, 如果存在适当维数的正定对称矩阵$P = P^{\mathrm{T}} > 0, Q_i = Q_i^{\mathrm{T}} > 0, W_i = W_i^{\mathrm{T}} > 0,\ i = 1, 2, \cdots, N$, 常数$\epsilon > 0$和矩阵$S$使得

$$\begin{bmatrix} \Psi^{(1)} & \Pi_{12} & \Psi^{(2)} & \Pi_{14} \\ * & -\epsilon I & \Pi_{23} & 0 \\ * & * & \Psi^{(3)} & 0 \\ * & * & * & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0, \tag{12}$$

其中:

$$\Pi_{12} = \begin{bmatrix} (E^{\mathrm{T}}P + SR^{\mathrm{T}})D \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \Pi_{14} = \begin{bmatrix} \epsilon E_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ \vdots \\ \epsilon E_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$

$\Pi_{23} = hD^{\mathrm{T}}\sum\limits_{i=1}^{N}W_i,\ \Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \Psi^{(3)}$和$R \in \mathbb{R}^{n\times(n-b)}$同定理1.

4 PEEC 稳定性分析(Stability analysis of PEEC)

本节分析部分元件等效电路(PEEC)的稳定性问题, 进一步说明本文方法的低保守性和有效性. PEEC在许多实际应用, 尤其是电路分析和电磁分析中起了重要的作用. 一个简单的PEEC如图1所示[15]. 针对该PEEC模型, 文献[15,18,19]和文献[20]分别通过建立相应的中立系统模型和奇异系统模型, 研究了其稳定性问题. 类似于文献[20], PEEC 模型可描述为

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ly(t) + My(t-d) + N\dot{y}(t-d),\ t \geqslant t_0, \\ y(t) = \phi(t), \qquad t \leqslant t_0. \end{cases} \tag{13}$$

当考虑PEEC中的不确定性时, 有

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = (L + \Delta L(t))y(t) + (M + \Delta M(t)) \\ \qquad y(t-d) + N\dot{y}(t-d),\ t \geqslant t_0, \\ y(t) = \phi(t), \qquad t \leqslant t_0. \end{cases} \tag{14}$$

其中:

$$[\Delta L(t)\ \ \Delta M(t)] = HF(t)[H_{\mathrm{a}}\ \ H_b],$$
$$\|\Delta L(t)\| \leqslant \delta,\ \|\Delta M(t)\| \leqslant \delta.$$

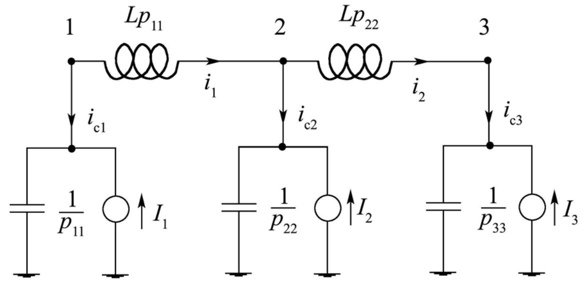

图 1 简单PEEC模型

Fig. 1 Small PEEC model for metal strip

令$x_1(t) = y(t),\ x_2(t) = \dot{y}(t) - Ly(t)$, 系统(14)可写为如下奇异时滞系统形式:

$$E\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (A_{\mathrm{d}} + \Delta A_{\mathrm{d}})x(t-r),$$

其中:

$$E = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} L & I_3 \\ 0 & -I_3 \end{bmatrix},\ A_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M+NL & N \end{bmatrix},$$

$$L = 100\times\begin{bmatrix} \beta & 1 & 2 \\ 3 & -9 & 0 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix},\ N = \frac{1}{72}\times\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M = 100\times\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -0.5 & -0.5 & -1 \\ -0.5 & -1.5 & 0 \end{bmatrix},\ E_{\mathrm{a}} = E_{\mathrm{d}} = [\delta I_3\ \ 0],$$

$$[\Delta A\ \ \Delta A_{\mathrm{d}}] = DF(t)[E_{\mathrm{a}}\ \ E_{\mathrm{d}}],\ D = \begin{bmatrix} 0 \\ I_3 \end{bmatrix}.$$

首先不考虑PEEC中的不确定性, 即$\delta = 0$, 针对不同的β值, 由定理1可得系统容许的最大时滞上界$r_{\max}$, 与已有方法的结果比较, 详见表1.

表 1 不同方法得出的$r_{\max}$

Table 1 Comparison of $r_{\max}$ using different methods

方法		$\beta=-2.105$	$\beta=-2.103$	$\beta=-2.1$
文献[18]		1.0874	0.3709	0.2433
文献[19]		1.1413	0.3892	0.2553
$N=1$	文献[15]	1.0874	0.3709	0.2433
	定理1	1.1413	0.3893	0.2554
$N=2$	文献[15]	1.5328	0.5185	0.3381
	定理1	1.6086	0.5451	0.3558
$N=3$	文献[15]	1.6238	0.5490	0.3577
	定理1	1.7053	0.5773	0.3765
$N=4$	文献[15]	1.6567	0.5599	0.3647
	定理1	1.7399	0.5888	0.3839

当考虑PEEC中的不确定性时, 假设$\delta = 2$, 针对不同的β值, 由定理2可得系统容许的最大时滞上界$r_{\max}$, 与已有方法的结果比较, 详见表2.

表 2　当$\delta = 2$时, 不同方法得出的$r_{\max}$

Table 2　Maximum $r_{\max}$ allowed when $\delta = 2$

方法	$\beta = -2.105$	$\beta = -2.103$	$\beta = -2.1$
文献[19]	0.4064	0.2783	0.2079
文献[20]	0.4064	0.2783	0.2079
定理2($N = 1$)	0.4065	0.2784	0.2079
定理2($N = 2$)	0.5640	0.3854	0.2877
定理2($N = 3$)	0.5964	0.4073	0.3040
定理2($N = 4$)	0.6080	0.4152	0.3099

通过表1和表2, 可以看出, 当$N = 1$时, 定理1和定理2得出同文献[19]一样的结果, 当$N \geqslant 2$时, 定理1和定理2给出了比现有方法保守性更小的结果.

5　结论(Conclusion)

针对奇异时滞系统的稳定性分析问题, 本文采用时滞分解方法, 将时滞区间分割为多个子区间, 并在每个子区间上定义不同的能量函数, 通过这一新的Lyapunov-Krsovskii泛函, 分析了奇异时滞系统的稳定性问题, 得出了基于线性矩阵不等式(LMI)的时滞相关稳定判据, 并通过PEEC模型验证该方法的有效性和低保守性. 本文方法可进一步推广到镇定问题、H_∞控制问题、H_∞滤波问题等等.

参考文献(References):

[1] DAI L. *Singular Control Systems*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[2] LEWIS F L. A survey of linear singular systems[J]. *Circuits, Systems & Signal Processing*, 1986, 5(1): 3 – 36.

[3] GU K, KHARITONOV V L, CHEN J. *Stability of Time-Delay Systems*[M]. Boston: Birkhäuser, 2003.

[4] HALE J K, VERDUYN LUNEL S M. *Introduction to Functional Differential Equations*[M]. New York: Springer-Verlag, 1993.

[5] XU S, DOOREN P V, STEFAN R, et al. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(7): 1122 – 1128.

[6] ZHOU S, LAM J. Robust stabilization of delayed singular systems with linear fractional parametric uncertainties[J]. *Circuits, Systems & Signal Processing*, 2003, 22(6): 579 – 588.

[7] ZHONG R, YANG Z. Delay-dependent robust control of descriptor systems with time delay[J]. *Asian Journal of Control*, 2006, 8(1): 36 – 44.

[8] GAO H L, ZHU S Q, CHEN Z L, et al. Delay-dependent state feedback guaranteed cost control uncertain singular time-delay systems[C] //*Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control, and European Control Conference*. New York: IEEE, 2005: 4354 – 4359.

[9] FRIDMAN E, SHAKED U. H_∞ control of linear state-delay descriptor systems: an LMI approach[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2002, 351(1): 271 – 302.

[10] YANG F, ZHANG Q. Delay-dependent H_∞ control for linear descriptor systems with delay in state[J]. *Journal of Control Theory and Application*, 2005, 3(1): 76 – 84.

[11] WU G Z, ZHOU W N. Delay-dependent robust stabilzation for uncertain singular systems with state delay[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(7): 714 – 718.

[12] WANG H J, XUE A K, LU R Q. Absolute stablity criteria for a class of nonlinear singular systems with time delay[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2009, 70(3): 621 – 630.

[13] HAN Q L. A delay decomposition approach to stability and H_∞ control of linear time-delay systems–Part I: stability[C] //*Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation*. New York: IEEE, 2008: 284 – 288.

[14] HAN Q L. A delay decomposition approach to stability and H_∞ control of linear time-delay systems–Part II: H_∞ control[C] //*Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation*. New York: IEEE, 2008: 289 – 294.

[15] HAN Q L. A delay decomposition approach to stability of linear neutral systems[C] //*Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control*. Seoul, Korea: Omnipress, 2008: 2607 – 2612.

[16] HAN Q L. Absolute stability of time-delay systems with sector-bounded nonlinearity[J]. *Automatica*, 2005, 41(12): 2171 – 2176.

[17] KRISTIC M, DENG H. *Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems*[M]. London: Springer-Verlag, 1998.

[18] HAN Q L. Stability analysis for a partial element equivalent circuit(PEEC) model of neutral type[J]. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 2005, 33(4): 321 – 332.

[19] YUE D, HAN Q L. A delay-dependent stability criterion of neutral systems and its application to a partial element equivalent circuit model[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems–II: Express Briefs*, 2004, 51(12): 685 – 689.

[20] ZHU S, ZHANG C, CHEN Z, et al. Delay-dependent robust stability criteria for two classes of uncertain singular time-delay systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(5): 880 – 885.

作者简介:

王惠姣　(1976—), 女, 博士, 副教授, 主要研究方向为奇异系统、切换系统、时滞系统、网络控制系统、鲁棒控制等, E-mail: hjwang@hdu.edu.cn;

薛安克　(1957—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为鲁棒控制、信息融合、智能控制等, E-mail: akxue@hdu.edu.cn.