

变约束高效预测控制

高宪文¹, 张立¹, 王介生¹, 赵娟平^{1,2}

(1. 东北大学信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110819; 2. 沈阳化工大学信息工程学院, 辽宁 沈阳 110142)

摘要: 为改善离线鲁棒预测控制算法的最优性引入了变终端约束集的思想, 即在原离线方法基础上通过在线优化方法获得构建当前反馈矩阵的凸组合系数, 然后再产生当前控制量. 与原方法相比增加了在线求解的自由度, 改善了系统的最优性. 在此基础上, 又提出了变约束预测控制(VC-MPC)算法, 根据状态所处的不同稳定椭圆域确定其对应的控制约束, 在取得相同优化性能情况下较恒定约束算法明显节省了计算时间. 仿真实例验证了所提方法的有效性.

关键词: 鲁棒预测控制; 离线方法; 终端约束集; 变约束; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Efficient model-predictive control with variable constraints

GAO Xian-wen¹, ZHANG Li¹, WANG Jie-sheng¹, ZHAO Juan-ping^{1,2}

(1. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110819, China;

2. College of Information Engineering, Shenyang University of Chemical Technology, Shenyang Liaoning 110142, China)

Abstract: To improve the optimality of the off-line synthesis algorithm for robust model predictive control, we introduce the idea of on-line variable terminal constraint set. Based on the off-line results, the convex combination coefficients for the state feedback matrix are obtained through on-line optimization; and then, the current control is generated. Compared with the original method, the improved one increases both on-line freedom and optimality. On this basis, we further consider the variable constraints for the efficient predictive control algorithm(VC-MPC). The corresponding control constraints are determined according to the elliptical stability domain where the current states are lying in. The on-line computational load of VC-MPC is reduced significantly while achieving the same optimal performance with the constant constraint algorithm. Finally, the simulation results illustrate the effectiveness of the proposed methods.

Key words: robust model-predictive control; off-line method; terminal constraint set; variable constraints; linear matrix inequality (LMI)

1 引言(Introduction)

由于模型预测控制(MPC)能够明确有效地处理控制中输入, 输出和状态的约束而倍受工业界青睐^[1]. 近些年以研究算法稳定性为基础的预测综合方法逐渐成为研究的热点, 其中的大部分文章主要是围绕着解决在线计算量、控制性能和系统初始可行域之间的矛盾展开的^[2~4].

1996年, Kothare等^[5]针对多胞不确定系统第一次完整的提出基于椭圆不变集的鲁棒预测控制器设计方法, 采用LMI形式求解min-max性能指标问题上界, 文献[6, 7]在此基础上还进行了相应的研究.

文献[5~7]的研究面临的一个共同的难题是在线计算量过大, 在解决这个问题过程中逐渐形成了离线设计在线综合的方法. 离线方法中的一个方向是以文献[8]为代表的高效鲁棒预测控制(ERPC), 离线设计增广不变集以减小在线计算量, 通过扩展 c_k 增加系统的自由度也扩大了系统的最优反馈律对应

的初始可行域. 文献[9, 10]采用不同策略对文献[8]进行改进.

2003年Wan等在文献[11]中提出的一种方法是离线预测在线综合另一个思路的代表, 文中选取 N 个向原点不断靠近的一系列离散状态, 计算得到恰好包括这些状态的 N 个椭圆及对应的控制参数, 在线选取与状态相邻的两个椭圆对应控制律的凸组合进行控制. 与文献[11]类似文献[12]设计了时变终端约束集明显地扩大了初始可行域, Pluymers B和Z Wan对文献[12]中存在的错误进行了讨论与修正^[13, 14].

本文在文献[11]的离线鲁棒预测控制方法的基础上, 借鉴变终端约束集的思想在线引入优化参数 θ , 提高了离线预测方法的在线优化性能. 与原方法相比增加了在线优化的自由度, 改善了系统的最优性; 减小了文献[12]中凸组合的两个不变集跨度使求得的控制量波动小, 运行更稳定. 为了减小带约

束优化问题的在线计算量,提出了变约束预测控制方法(variable constraint-MPC),状态在不同稳定椭圆域对应不同的约束值,其新建立的约束范围不影响解的最优性和算法的稳定性且通常小于恒定的约束值,这样减小了搜索的范围可以有效提高运算效率节省在线求解时间.

文中: F_r 与 $F_{i,r}$ 均是对应矩阵的 r 行; $Q_{i-1} > Q_i$,表示 Q_{i-1} 和 Q_i 均是方形对称矩阵且 $Q_{i-1} - Q_i$ 正定.

2 问题描述(Problem statement)

考虑如下时变不确定系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \\ y(k) = C(k)x(k), \quad k \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $u \in \mathbb{R}^m$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$ 分别为输入和可测状态. 控制输入和状态约束分别为:

$$|u_r(k)| \leq \bar{u}, \quad r = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

$$|\Psi_r x(k)| \leq \bar{\psi}, \quad r = 1, 2, \dots, q, \quad (3)$$

$[A(k)|B(k)] \in \Omega = \text{Co}\{A_1|B_1, A_2|B_2, \dots, A_L|B_L\}$, $\forall k \geq 0$,即存在 L 个非负系数, $\omega_l(k)$ ($l = 1, \dots, L$)使得

$$\sum_{l=1}^L \omega_l(k) = 1, \quad [A(k)|B(k)] = \sum_{l=1}^L \omega_l(k)[A_l|B_l], \quad (4)$$

目标是针对上述系统设计鲁棒预测控制器,将系统驱动到稳定状态,并使得性能指标式(5)最小.

$$J_\infty(k) := \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} x(k+i|k) \\ u(k+i|k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k+i|k) \\ u(k+i|k) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$W > 0$ 和 $R > 0$ 是相应维数的加权矩阵. 针对不确定多胞模型的求解,通常将问题表述成最小化最差性能指标形式如式(6a). 按照Kothare的方法,在每个采样时刻 k ,求解状态反馈控制律 $u(k+i|k) = F(k)x(k+i|k)$,用来最小化最差性能指标,如式(6):

$$\min_{u(k+i|k)=F(k)x(k+i|k), i \geq 0} \max_{[A(k+i)|B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} J_\infty(k), \quad (6a)$$

$$\text{s.t.} \quad -\bar{u} \leq u(k+i|k) \leq \bar{u}, \quad (6b)$$

$$-\bar{\psi} \leq \Psi x(k+i+1|k) \leq \bar{\psi}, \quad (6c)$$

$$\begin{cases} x(k+i+1|k) = \\ A(k+i)x(k+i|k) + B(k+i)u(k+i|k), \\ x(k|k) = x(k), \end{cases} \quad (6d)$$

$$\begin{cases} \|x(k+i+1|k)\|_{P(k)}^2 - \|x(k+i|k)\|_{P(k)}^2 \leq \\ -\|x(k+i|k)\|_W^2 - \|u(k+i)\|_R^2, \\ \forall [A(k+i)|B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0, P(k) > 0, \end{cases} \quad (6e)$$

$P(k)$ 为正定加权矩阵,式(6e)保证性能指标单调且

鲁棒稳定,从 $i=0$ 至 $i=\infty$ 累加式(6e),考虑到 $x(\infty, k) = 0, V(\infty, k) = 0$,得到

$$\max_{[A(k+i)|B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} J_\infty(k) \leq \|x(k)\|_{P(k)}^2 \leq \gamma, \quad (7)$$

$\gamma > 0$ 为标量. 定义 $Q = \gamma P(k)^{-1}$, $F(k) = YQ^{-1}$,式(6e)和 $\|x(k)\|_{P(k)}^2 \leq \gamma$,通过Schur补引理可以转换为如下LMI形式:

$$\begin{bmatrix} Q & * & * & * \\ A_l Q + B_l Y & Q & * & * \\ W^{\frac{1}{2}} Q & 0 & \gamma I & * \\ R^{\frac{1}{2}} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, \quad l \in \{1, \dots, L\}, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ x(k) & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad Q > 0, \quad (9)$$

而当如下LMI满足时,约束式(6b)(6c)可以保证:

$$\begin{bmatrix} Z & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad Z = Z^T, \quad Z_{jj} \leq \bar{u}_j^2, \quad j = 1, \dots, m, \quad (10)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} Q & * \\ \Psi(A_l Q + B_l Y) & \Gamma \end{bmatrix} \geq 0, \quad \Gamma = \Gamma^T, \quad \Gamma_{ss} \leq \bar{\psi}_s^2, \\ l = 1, 2, \dots, L, \quad s = 1, 2, \dots, q, \end{cases} \quad (11)$$

其中 $Z_{jj}(\Gamma_{ss})$ 为 $Z(\Gamma)$ 的第 $j(s)$ 个对角元.

引理 1 对于系统(1),在时刻 k 状态反馈矩阵 $F(k)$ 应用于控制律 $u(k+i|k) = F(k)x(k+i|k)$ ($i \geq 0$)用于最小化性能指标式(5)的上界 γ . 其中: $F(k) = YQ^{-1}$, Y 和 $Q > 0$,由下式求解得到:

$$\min_{\gamma, Q, Y, Z, \Gamma} \gamma, \quad \text{s.t. 式(8) ~ (11)}. \quad (12)$$

如果初始状态可行,则该算法渐近稳定闭环系统.

3 变约束高效预测控制方法(Efficient variable constraint model-predictive control method)

显然,文献[5]中的鲁棒MPC算法对计算时间的需求随着问题规模的扩大而明显增加. Z. WAN在文献[11]中提出离线鲁棒约束MPC算法,利用一系列离散的状态点构建嵌套渐进稳定不变的椭圆集,对应每个不变椭圆计算出对应的控制律.

算法 1^[11] 离线: 给定一系列逐渐趋向原点的离散状态点 x_i ($i = 1, \dots, N$),对每个状态 x_i 利用式(12)分别计算对应的 γ_i, Q_i, Y_i 为保证椭圆间互相嵌套求解过程附加约束 $Q_{i-1} > Q_i$ ($i \neq 1$). 建立look-up table存储 $Q_i^{-1}, F_i (= Y_i Q_i^{-1}), X_i, Y_i$.

在线: 首先对每一个状态 $x(k)$,在look-up table中进行对分搜索,检索满足 $\|x(k)\|_{Q_i^{-1}}^2 \leq 1$ 的最小椭圆,即最大的下标 i . 如果检索到的 $i \neq N$,求解

$$x(k)(\alpha_i Q_i^{-1} + (1 - \alpha_i) Q_{i+1}^{-1})x(k) = 1$$

得出 α_i , 应用控制律

$$u(k) = (\alpha_i F_i + (1 - \alpha_i) F_{i+1})x(k),$$

若 $i = N$ 则应用 $u(k) = F_N x(k)$.

该算法明显的减小了计算时间的需求, 但同时一定程度上损失了可行性与最优性. 这是由于大部分优化是在离线状态进行, 而在线运行自由度很小. 本文对其在线优化部分进行了改进引入新的自由度 θ .

3.1 在线优化算法改进(Improvement of on-line optimization algorithm)

考虑初始状态 x_0 , k 时刻状态为 $x(k|k)$. 在每步计算前首先确定当前状态所处的不变椭圆集, 同时确定当前状态所处的椭圆 ε_{out} 和内部的与其相邻的椭圆 ε_{in} . 算法目标是驱动状态到内部嵌套椭圆集合 $\chi_f(\theta(k))$, 并且实现 $\chi_f(\theta(k))$ 尽可能接近 χ_{in} . 设

$$\begin{aligned} &(\gamma(\theta(k)), Q(\theta(k)), X(\theta(k)), Y(\theta(k))) = \\ &\theta(k)(\gamma_{out}, Q_{out}, X_{out}, Y_{out}) + \\ &(1 - \theta(k))(\gamma_{in}, Q_{in}, X_{in}, Y_{in}), \end{aligned}$$

优化求解如下:

$$\theta^*(k) = \min_{\theta(k)} \theta(k), \tag{13a}$$

$$\text{s.t. } 0 < \theta(k) \leq 1, \tag{13b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(k|k)^T \\ * & Q(\theta(k)) \end{bmatrix} \geq 0, \tag{13c}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} Z(\theta(k)) & F(\theta(k)) \\ * & Q(\theta(k))^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \\ Z(\theta(k)) = Z(\theta(k))^T, Z_{jj}(\theta(k)) \leq \bar{u}_j^2, \\ j = 1, \dots, m, \end{cases} \tag{13d}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} Q(\theta(k)) & * \\ \Psi(A_l Q(\theta(k)) + B_l Y(\theta(k))) & \Gamma(\theta(k)) \end{bmatrix} \geq 0, \\ \Gamma(\theta(k)) = \Gamma(\theta(k))^T, \Gamma_{ss}(\theta(k)) \leq \bar{\psi}_s^2, \\ l = 1, 2, \dots, L, s = 1, 2, \dots, q, \end{cases} \tag{13e}$$

由此可以得到:

$$Y(\theta^*(k)) = \theta^*(k) Y_{out} + (1 - \theta^*(k)) Y_{in}, \tag{14}$$

$$Q(\theta^*(k)) = \theta^*(k) Q_{out} + (1 - \theta^*(k)) Q_{in}. \tag{15}$$

对于 $0 \leq \theta^*(k) \leq 1$, 存在线性组合

$$\begin{aligned} &(\gamma(\theta^*(k)), Q(\theta^*(k)), X(\theta^*(k)), Y(\theta^*(k))) = \\ &\theta^*(k)(\gamma_{out}, Q_{out}, X_{out}, Y_{out}) + \\ &(1 - \theta^*(k))(\gamma_{in}, Q_{in}, X_{in}, Y_{in}), \end{aligned} \tag{16}$$

并且形成一个终端状态不变集 $\chi_f(\theta^*(k)) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n | x^T(k|k) Q(\theta^*(k))^{-1} x(k|k) \leq 1\}$, 其内部对应的

控制

$$k_f(\theta^*(k), x(k)) \triangleq Y(\theta^*(k)) Q(\theta^*(k))^{-1} x(k), \tag{17}$$

$$u(k) = Y(\theta^*(k)) Q(\theta^*(k))^{-1} x(k). \tag{18}$$

由于内外椭圆相邻所以只需要很小的在线计算量即可驱动系统状态向平衡点收敛, 每一步都重新定义 ε_{out} 和 ε_{in} 后重复上述步骤, 直至状态进入 ε_N , ε_N 内直接采用控制律 $u(k|k) = F_N x(k|k)$.

算法 2 离线部分:

与算法1相同, 建立储存 γ_i, Q_i^{-1}, Y_i 的 look-up table.

在线部分:

Step 1 根据状态 $x(k)$ 在 look-up table 中搜索满足 $\|x(k|k)\|_{Q_i^{-1}}^2 \leq 1$ 的最大 i 即找到当前状态所处的最小的不变椭圆, 如果 $i \neq N, Y_{out} = Y_i, Y_{in} = Y_{i+1}; Q_{out} = Q_i, Q_{in} = Q_{i+1}$, 转 Step 2; 如果 $i = N$, 转 Step 3;

Step 2 求解式(13)获得寻优结果 θ^* 由此可以得到式(14)(15). 应用 $u(k) = Y(\theta^*(k)) Q(\theta^*(k))^{-1} x(k)$ 于系统(1), 返回 Setp 1;

Step 3 $x(k)$ 位于最小终端椭圆, 控制律采用 $u(k) = F_N x(k)$.

定理 1 对于给定的系统(1), 初始状态如果满足 $\|x(0)\|_{Q_1^{-1}} \leq 1$, 则应用算法2能渐近稳定闭环系统.

证 由引理1可知, 离线确定的各组 $(\gamma_i, Q_i, Y_i, Z_i, \Gamma_i)$ 均满足约束(8)~(11), 同样对于分别属于 ε_{out} 和 ε_{in} 的 $(\gamma_{out}, Q_{out}, Y_{out}, Z_{out}, \Gamma_{out})$ 和 $(\gamma_{in}, Q_{in}, Y_{in}, Z_{in}, \Gamma_{in})$ 也成立. 在线优化计算得到 $0 < \theta^* \leq 1$, 与式(14)(15)类似的有 $F(\theta^*(k)), Z(\theta^*(k)), \Gamma(\theta^*(k))$.

约束(8)以及条件

$$\|x(k+1)\|_{Q(\theta^*(k))}^2 \leq \|x(k)\|_{Q(\theta^*(k))}^2$$

可以由下式保证:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} Q(\theta^*(k))^{-1} (A_l + B_l F(\theta^*(k)))^T \\ * & Q(\theta^*(k)) \end{bmatrix} \geq 0, \\ l = 1, \dots, L, \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ x(k) & Q(\theta^*(k)) \end{bmatrix} \geq 0, Q(\theta^*(k)) > 0. \tag{20}$$

对于约束的(10)(11)同样也转变为

$$\begin{bmatrix} Z(\theta^*(k)) & F(\theta^*(k)) \\ * & Q(\theta^*(k))^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix} Q(\theta^*(k))^{-1} & * \\ \Psi(A_l + B_l F(\theta^*(k)t)) & \Gamma(\theta^*(k)) \end{bmatrix} \geq 0, \quad (22)$$

所以, 控制律

$$u(k) = Y(\theta^*(k))Q(\theta^*(k))^{-1}x(k),$$

可以保证位于 ε_{out} 为 $x(k)$ 的控制不变集, 且状态向 ε_{in} 收敛.

对于Step3中的 $u(k) = F_N x(k)$ 则显然能控制状态始终处于最小椭圆内且最终收敛于原点.

注 1 与时变终端约束集方法不同, 文献[12]的Corollary 3只设计了两个不变椭圆集后在线优化求解 θ , 本文提出的改进在线优化算法构建了一系列不变终端约束集, 在时刻 k 由当前状态所在的椭圆与内部相邻椭圆构成 ε_{out} 和 ε_{in} 后求解优化 θ , 减小了组合的两个椭圆的跨度, 这样对于 θ 求解可获得更大的可行域且运行更稳定.

3.2 变约束预测综合算法(Synthesizing predictive control with variable constraints)

控制约束通常保持恒定不变 \bar{u} , 而预测算法的优化求解过程常常是在约束要求的范围内搜索出满足条件的使得性能指标最小的决策变量. 恒定的约束提供了稳定不变的求解环境, 但过于保守的约束范围往往使得解的搜索空间扩大且在一些没有必要的范围内搜寻最优解, 造成了在线运行计算时间的不必要浪费.

3.2.1 变约束预测综合算法设计(Design of synthesizing predictive control with variable constraints)

对于离线预测在线优化的算法, 求解得到的输入控制量 $u(k) = F(\theta^*)x(k|k)$ 随着状态所在位置的不同而不同. 这样可在不影响求解的情况下, 依照当前状态位置对约束进行调整, 减小求解范围, 缩短计算时间. 在算法2中求解的反馈矩阵 $Q(\theta^*)^{-1}$, $Y(\theta^*)$ 是 ε_{out} 和 ε_{in} 的凸组合, 从而考虑到位于 ε_i 内的状态所对应的控制量最大值也可以由 ε_i 及 ε_{i+1} 中的参数给出.

算法 3 离线部分: 与算法2相同, 只是在对应的look-up table中除了保存 γ_i, Q_i^{-1}, Y_i 外还保存

$$\begin{aligned} u_{\max i, r} = & \\ & \max\{|(Y_i Q_i^{-1})_r x(i)|, |(Y_{i+1} Q_{i+1}^{-1})_r x(i)|\}, \\ & r = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

在线部分:

Step 1 同样, 首先确定 $x(k)$ 所在的最小椭圆 ε_i , 如果 $i \neq N, Y_{\text{out}} = Y_i, Y_{\text{in}} = Y_{i+1}; Q_{\text{out}} = Q_i, Q_{\text{in}} = Q_{i+1}$ 且 $u_{\max, r} = \min\{u_{\max i, r}, \bar{u}\}$, 那么转Step 2; 如果 $i = N$, 那么转Step 3, $u(k) = F_N x(k)$.

Step 2 将式(13d)替换为式(21)之后, 求解式(13).

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} Z(\theta(k)) & F(\theta(k)) \\ * & Q(\theta(k))^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \\ Z = Z^T, Z_{jj} \leq u_{\max, r}^2, j = 1 \dots m, \end{cases} \quad (23)$$

得到 θ^* 后应用 $u(k) = Y(\theta^*(k))Q(\theta^*(k))^{-1}x(k)$, 返回Setp 1.

Step 3 $x(k)$ 位于最小终端椭圆, 控制律采用 $u(k) = F_N x(k)$.

3.2.2 稳定性分析(Stability analysis)

定理 2 对于系统 (1), 如果初始状态满足 $\|x(0)\|_{Q_1^{-1}}^{-1} \leq 1$, 则变约束高效预测控制(VC-MPC)算法3在与算法2取得相同优化性能的情况下可以渐近稳定闭环系统.

证 稳定性分析部分只需要证明算法3引入的变约束设计不影响其取得与算法2相同的优化性能及控制量. 不妨假设当前状态 $x(k)$ 处于 ε_i 内则有

$$\begin{cases} F(\theta^*(k)) = \theta^*(k)F_i + (1 - \theta^*(k))F_{i+1}, \\ i = 1, \dots, N - 1, 0 \leq \theta^*(k) \leq 1, \end{cases} \quad (24)$$

对应的有

$$\|F(\theta^*(k))\| = \|\theta^*(k)F_i + (1 - \theta^*(k))F_{i+1}\|, \quad (25)$$

所以

$$\begin{cases} \|F_r(\theta^*(k))\|_2^2 \leq \\ \theta^*(k)\|F_{i,r}\|_2^2 + (1 - \theta^*(k))\|F_{i+1,r}\|_2^2, \\ r = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (26)$$

显然, 可以得到

$$\|F_r(\theta^*(k))\|_2^2 \leq \max\{\|F_{i,r}\|_2^2, \|F_{i+1,r}\|_2^2\}. \quad (27)$$

考虑到 $x(k) \in \varepsilon_i$, 也即 $\|x(k)\| \leq \|x(i)\|$, 有

$$|F_r(\theta^*(k))x(k)| \leq \max\{|F_{i,r}x(i)|, |F_{i+1,r}x(i)|\}. \quad (28)$$

据此, 可以得到

$$\begin{aligned} u_{\max i, r} = & \\ & \max\{|(Y_i Q_i^{-1})_r x(i)|, |(Y_{i+1} Q_{i+1}^{-1})_r x(i)|\}. \end{aligned} \quad (29)$$

在线运行约束范围完全可限定在 $\min\{u_{\max i}, \bar{u}\}$ 范围内而不影响可行性与最优性. 可见, 改变约束后在相同情况下, 算法3仍然取得与算法2相同的控制量, 所以其稳定性不受影响. 其他部分证明与定理1证明类似省略.

注 2 算法3中的控制量约束与各稳定椭圆域相对应, 随着状态所处的不同位置而改变, 并不是单调的随运动

时间收缩. 若初始时刻 $\|x(0)\|_{Q_1^{-1}}^{-1} \leq 1$, 整个过程中变约束机制都在发挥作用, 若 $\|x(0)\|_{Q_1^{-1}}^{-1} > 1$ 即当初始位置或运行中的状态处于所设计的嵌套椭圆集外部时, 需要考虑按照最大状态设计一最大椭圆不变集 $\varepsilon_{outermost}$ 后使用算法3.

4 仿真实例(Simulation examples)

考虑系统

$$\begin{bmatrix} x^{(1)}(k+1) \\ x^{(2)}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ \beta(k) & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)}(k) \\ x^{(2)}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k), \quad (30)$$

其中: $\beta(k)$ 为不确定参数, 满足 $0.5 \leq \beta(k) \leq 2.5$, 实例中由 $\beta(k) = 1.5 + \sin k$ 产生, 约束 $|u(k+i|k)| \leq 2, \forall i \geq 0, W = I, R = 1$.

首先, 离线选择系列状态点

$$X = [1.2, 1.2; 1, 1; 0.9, 0.9; 0.75, 0.75; 0.65, 0.65; 0.52, 0.52; 0.4, 0.4; 0.28, 0.28; 0.18, 0.18; 0.1, 0.1],$$

图1是由各离散点对应的 Q_i^{-1} 确定的对应各点的不变椭圆.

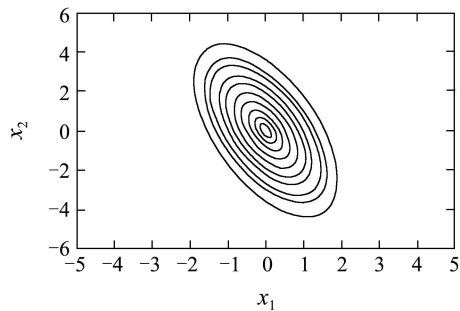


图1 各离散点的 Q_i 定义的椭圆
Fig. 1 The ellipsoids defined by for all discrete points

给定初始状态 $x_0 = [1 \ 0]$, 分别采用算法1和算法2运算20步得到的闭环状态轨迹如图2所示. 仿真的过程中算法2与算法3轨迹始终相同表明了变约束措施并不影响求解.

从状态轨迹看两种算法均能驱动状态到达平衡点, 但改进在线优化方法后的算法2和3的运动轨迹要更理想. 图3为状态分量 x_1 与 x_2 的对比曲线.

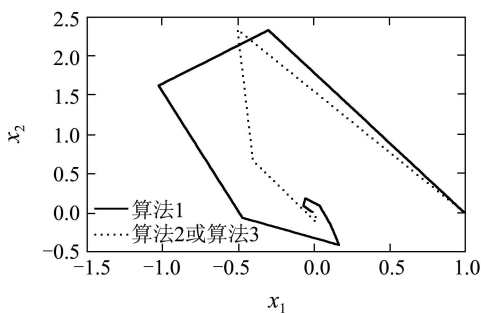
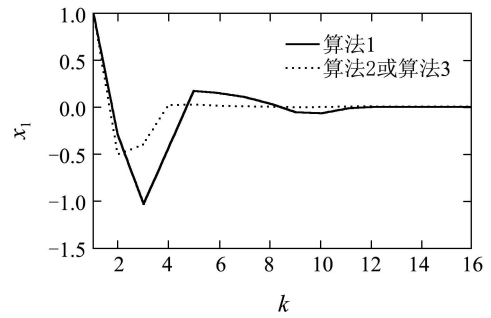
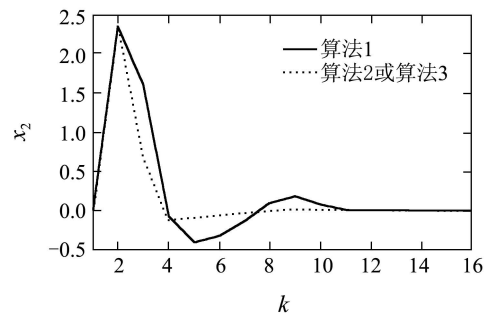


图2 系统状态运动轨迹
Fig. 2 The system state trajectories



(a) x_1 响应曲线



(b) x_2 响应曲线

图3 状态 x_1 与 x_2 对比曲线

Fig. 3 Comparative curves of the state x_1 and x_2

输入控制量的对比如图4所示, 可以看出算法2的控制量波动明显小于算法1.

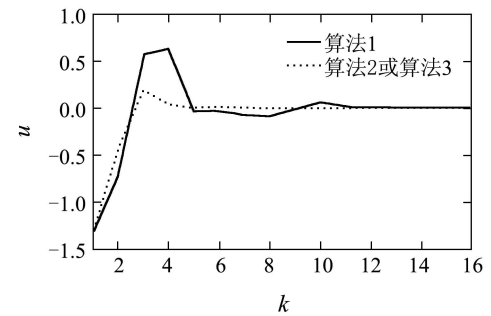


图4 输入控制量对比曲线

Fig. 4 Comparative curves of the control volume

由于控制量约束是对控制指令绝对值的限定, 所以图5中绘制了算法3控制量绝对值与对应的约束变化曲线. 图5(a)中显示的是无扰动情况, 虚线表示的约束很明显的小于给定的恒定约束, 且不影响求解的控制量变化; 在运行第10步对状态分量 x_1 与 x_2 均增加了0.5扰动, 控制量出现明显波动如图5(b), 同时约束也随着控制量进行改变且始终小于给定的约束 $\bar{u} = 2$; 图5(c)中对状态分量 x_1 加了持续扰动 $0.2 \sin(k/20)$, 产生了时变控制指令, 从曲线中可以发现约束仍然能保持在较小的范围内且不影响控制量求解.

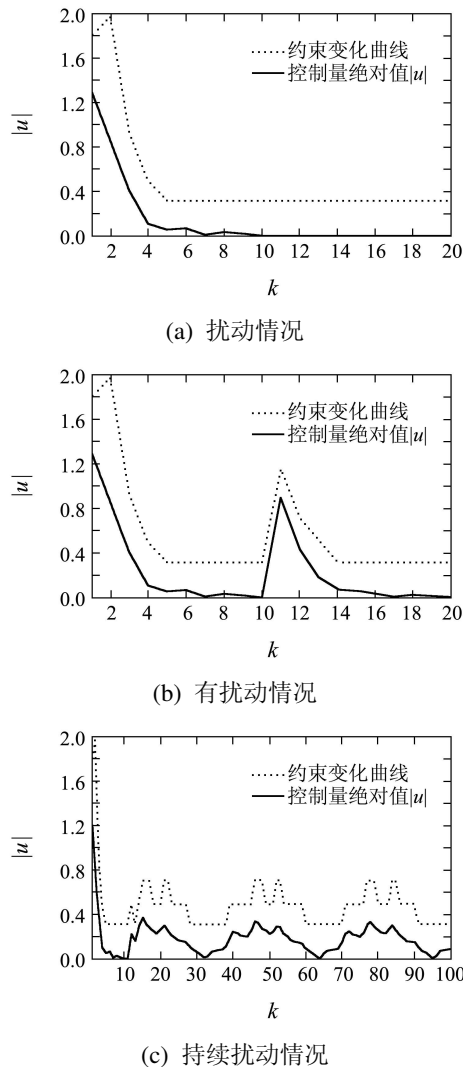


图5 控制量与对应约束曲线

Fig. 5 Control volume and the corresponding constraint curve

表1中的各项时间的对比显示了应用了变约束策略后明显减少了在线运行计算的时间。

表1 变约束前后运算时间对比
Table 1 Comparison of computing time before and after variable constraints

对比项	恒定约束(算法2)/s	变约束(算法3)/s
在线50步运算	2.126955	1.358535
平均 $\theta(\alpha)$ 求解	0.014319	0.010283
平均求解 u	0.014729	0.010945
前5步	0.376304	0.267981

5 结论(Conclusions)

本文结合了离线鲁棒预测与变终端约束集的方法,在少量增加在线计算量的情况下明显的改善了前者的控制性能。同时,还提出了变约束预测控制(VC-MPC)的策略,根据状态位置的不同选择不同的约束,避免了在恒定约束方法中搜索范围过大造成的计算时间不必要的浪费,有效减小了计算时间。

参考文献(References):

- [1] KANEV S, VERHAEGEN M. Robustly asymptotically stable finite-horizon MPC[J]. *Automatica*, 2006, 42(12): 2189 – 2194.
- [2] 席裕庚, 李德伟. 预测控制定性综合理论的基本思路和研究现状[J]. *自动化学报*, 2008, 34(10): 1225 – 1234. (XI Yugeng, LI Dewei. Fundamental philosophy and status of qualitative synthesis of model predictive control[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(10): 1225 – 1234.)
- [3] 丁宝仓, 杨鹏. 基于标称性能指标的离线鲁棒预测控制器综合[J]. *自动化学报*, 2006, 32(2): 304 – 310. (DING Baocang, YANG Peng. Synthesizing off-line robust model predictive controller based on nominal performance cost[J]. *Automatica Sinica*, 2006, 32(2): 304 – 310.)
- [4] 丁宝仓, 邹涛. 约束时变不确定系统的输出反馈预测控制综合[J]. *自动化学报*, 2007, 33(1): 78 – 83. (DING Baocang, ZOU Tao. Synthesizing output feedback predictive control for constrained uncertain time-varying discrete systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(1): 78 – 83.)
- [5] KOTHARE M V, BALAKRISHNAN V. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities[J]. *Automatica*, 1996, 32(10): 1361 – 1379.
- [6] CUZZOLA F C, GEROMEL J C, MORARI M. An improved approach for constrained robust model predictive control[J]. *Automatica*, 2002, 38(7): 1183 – 1189.
- [7] MAO W J. Robust stabilization of uncertain time-varying discrete systems and comments on “an improved approach for constrained robust model predictive control” [J]. *Automatica*, 2003, 39(6): 1109 – 1112.
- [8] KOUVARITAKIS B, ROSSITER J A, SCHUURMANS J. Efficient robust predictive control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(8): 1545 – 1579.
- [9] IMSLAND L, ROSSITER J A. Robust triple model MPC[J]. *International Journal of Control*, 2008, 81(4): 679 – 689.
- [10] 李德伟, 席裕庚. 有界扰动系统高效鲁棒预测控制器设计[J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(5): 535 – 539. (LI Dewei, XI Yugeng. Design of efficient robust model-predictive controller for systems with bounded disturbances[J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(5): 535 – 539.)
- [11] WAN Z Y, KOTHARE M V. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities[J]. *Automatica*, 2003, 39(5): 837 – 846.
- [12] WAN Z Y, KOTHARE M V. Efficient robust constrained model predictive control with a time varying terminal constraint set[J]. *Systems & Control Letters*, 2003, 48(5): 375 – 383.
- [13] PLUYMERS B, SUYKENS J A K, DE MOOR B. Min-max feedback MPC using a time-varying terminal constraint set and comments on “efficient robust constrained model predictive control with a time-varying terminal constraint set” [J]. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(12): 1143 – 1148.
- [14] WAN Z, PLUYMERS B, KOTHARE M V, et al. Comments on: “efficient robust constrained model predictive control with a time varying terminal constraint set” by Wan and Kothare[J]. *Systems & Control Letters*, 2006, 55(7): 618 – 621.

作者简介:

高宪文 (1955—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为复杂工业过程建模与控制, E-mail: gaioxianwen@ise.neu.edu.cn;

张立 (1979—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为复杂工业过程智能预测控制方法研究, E-mail: neuzhangli@163.com;

王介生 (1977—), 男, 副教授, 目前研究方向为流程工业生产过程建模与控制、智能控制, E-mail: wjs197720@163.com;

赵娟平 (1972—), 女, 讲师, 目前研究方向为事复杂工业过程的建模与智能控制, E-mail: zjp020417@tom.com.