

具有数据包丢失及转移概率部分未知的 网络控制系统 H_∞ 控制

邱 丽, 胥布工, 黎善斌

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 研究一类具有数据包丢失及状态转移概率部分未知的网络控制系统随机稳定性及 H_∞ 控制问题. 传感器与控制器之间、控制器与执行器之间存在数据包丢失的网络控制系统被建模成具有4个子系统的跳变系统, 4个子系统之间的跳变遵行Markov跳变过程, 并具有部分未知的跳变概率. 利用Lyapunov稳定性定理及线性矩阵不等式的求解方法得到该类系统随机稳定的充分条件, 并给出了相应的 H_∞ 状态反馈控制器的设计方法. 数值仿真结果验证了本文方法的正确性和有效性.

关键词: H_∞ 控制; 网络控制系统; 数据包丢失; 转移概率部分未知; 马尔科夫跳变线性系统

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

H-infinity control for networked control systems with data packet dropouts and partly unknown transition probabilities

QIU Li, XU Bu-gong, LI Shan-bin

(College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: The stochastic stability and H-infinity control problem for networked control systems(NCSs) with data packet dropouts and partly unknown transition probabilities are addressed. Considering the random data packet dropouts occurring in the sensor-to-controller and controller-to-actuator, we model the closed-loop NCS as a discrete-time Markov jump linear system with four modes and partly unknown transition probabilities. Sufficient conditions for the existence of a controller which guarantees the stochastic stability of NCS and satisfies the H-infinity performance requirements are established based on stochastic Lyapunov functions and linear matrix inequality approach. A simulation example illustrates the validity and feasibility of the results.

Key words: H-infinity control; networked control systems; data packet dropout; partly unknown transition probabilities; Markovian jump linear system

1 引言(Introduction)

网络控制系统(networked control systems, NCSs)是通过网络进行闭环反馈控制的系统^[1~3]. 网络控制系统的主要特征是系统各部分(如传感器、控制器、执行器等)信息(如参考输入、被控对象输出、控制器输入等)的交换都是由网络来实现的^[4]. 与传统的点对点的控制系统相比, 网络控制系统减少了系统的布线, 便于系统诊断和维护, 提高了系统的灵活性和柔性^[5]. 然而, 网络的引入也带来了量化、时延、数据包丢失、有限带宽等不确定性问题, 使得传统的控制方法不能直接应用到网络控制系统中^[6].

数据包丢失是网络控制系统中的一个重要问题. 目前对于具有数据包丢失的NCS的研究已经取得了一些成果^[6~18]. 文献[7~9]分别讨论了具有随机丢

包的NCS的 H_∞ 控制问题, 并分别给出 H_∞ 控制器的设计方法. 文献[10, 11]分别考虑了一类具有网络诱导时延及随机数据包丢失的NCS的镇定问题. 文献[12, 13]将传感器与控制器(S-C)之间及控制器与执行器(C-A)之间具有随机丢包的NCS建模成马尔科夫跳变线性系统, 给出了保证系统均方稳定的充分条件, 并给出控制器的设计方法. 文献[14]将S-C之间及C-A之间具有丢包的NCS建模成具有4个子系统的切换系统, 采用异步动态系统方法研究了保证系统指数稳定的充分条件, 并给出控制器的设计方法. 文献[15]研究了S-C之间及C-A之间具有马尔科夫丢包的NCS的随机稳定性问题及反馈控制器的设计方法. 文献[16]研究了S-C之间及C-A之间具有数据包丢失的NCS的保性能控制问题. 前面的研

究主要集中在网络控制系统稳定性的研究上, 并有一部分文献考虑NCS的抗干扰能力, 但通常被建模成的马尔科夫跳变系统都是假设跳变概率是已知的, 而对于跳变概率部分已知或是未知的情况的研究还不充分. 而在实际的通信网络中数据包的丢失通常是随机的, Markov链的状态转移概率矩阵中元素的获得通常是比较困难或需要较高的成本^[17]. 虽然文献[17]在研究马尔科夫跳变系统的镇定问题时考虑了跳变概率部分未知的情况, 但该文的结果不能直接用在本文的研究对象上. 因为文献[17]研究的是马尔科夫跳变系统而不是具有数据包丢失的网络控制系统, 且没有考虑系统本身对外界干扰的抑制能力, 文献[17]中状态反馈镇定控制器的设计及求解方法也不能应用在本文的研究对象上. 因此研究具有随机数据包丢失及跳变概率部分未知的NCS的 H_∞ 控制问题是很有必要的.

本文考虑网络控制系统中存在随机数据包丢失的情况, 采用增广矩阵的方法将S-C之间及C-A之间具有数据包丢失的NCS建模成4个子系统, 4个子系统之间的切换遵循Markov跳变过程, 且将Markov链的状态转移概率分成已知和未知两部分考虑, 并在该网络环境下, 研究网络控制系统的 H_∞ 控制问题. 基于马尔科夫跳变理论及线性矩阵不等式方法, 给出系统随机稳定且满足 H_∞ 扰动衰减指标的充分条件, 并给出 H_∞ 状态反馈镇定控制器的设计方法. 最后并给出控制器的求解算法.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑NCS中传感器和控制器之间以及控制器与执行器之间都存在网络的情况, 此时NCS的结构如图1所示, 对该系统做如下假设:

- 1) 网络诱导时延小于系统采样周期, 可以忽略不计;
- 2) 控制器和传感器采用时间驱动的方式, 且具有相同的采样周期, 执行器为事件驱动;
- 3) 数据包单传输且丢失率一定;
- 4) 当传感器和控制器之间及控制器和执行器之间分别发生数据包丢失时, 则控制器的输入 $\tilde{x}(k)$ 和控制输入 $\tilde{u}(k)$ 分别采用最近一个时刻的数据.

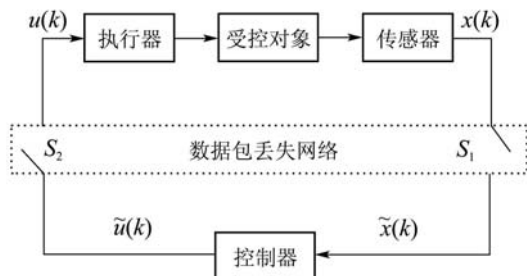


图1 数据包丢失的NCS框图

Fig. 1 The structure of the NCS with data packet dropouts

考虑如下的离散时间线性系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + B_\omega\omega(k), \\ z(k) = Cx(k) + Du(k) + D_\omega\omega(k), \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态向量, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ 是系统的控制输入, $\omega(k) \in \mathbb{R}^q$ 是外部扰动输入, $z(k) \in \mathbb{R}^p$ 是系统被调输出, A, B, B_ω, C, D 和 D_ω 分别是具有适当维数的常数矩阵.

假定系统的状态是可以直接测量得到的, 则状态反馈控制器

$$\tilde{u}(k) = K\tilde{x}(k), \quad (2)$$

其中 K 为状态反馈控制器的增益.

图1中, S_1, S_2 分别为传感器与控制器之间、控制器与执行器之间的网络开关, α, β ($\alpha = 0, 1, \beta = 0, 1$) 分别为 S_1, S_2 的状态. 当 $S_1(S_2)$ 的状态为 $\alpha = 0(\beta = 0)$ 时, 表示数据包未丢失, 这时

$$\tilde{x}(k) = x(k)(u(k) = \tilde{u}(k)),$$

当 $S_1(S_2)$ 的状态为 $\alpha = 1(\beta = 1)$ 时, 表示数据包丢失, 这时

$$\tilde{x}(k) = \tilde{x}(k-1)(u(k) = u(k-1)).$$

这样 $\tilde{x}(k), u(k)$ 可分别描述为

$$\begin{cases} \tilde{x}(k) = (1-\alpha)x(k) + \alpha\tilde{x}(k-1), \\ u(k) = (1-\beta)\tilde{u}(k) + \beta u(k-1). \end{cases} \quad (3)$$

定义向量 $\xi(k) = [x^T(k) \tilde{x}^T(k-1) u^T(k-1)]^T$, 则由式(1)~(3)可得具有数据包丢失的闭环网络控制系统的数学模型

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \Phi_i\xi(k) + \tilde{B}_\omega\omega(k), \\ z(k) = \Psi_i\xi(k) + D_\omega\omega(k), \end{cases} \quad (4)$$

其中:

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} A + (1-\alpha)(1-\beta)BK & \alpha(1-\beta)BK & \beta B \\ (1-\alpha)I & \alpha I & 0 \\ (1-\alpha)(1-\beta)K & \alpha(1-\beta)K & \beta I \end{bmatrix},$$

$$\Psi_i = [C + (1-\alpha)(1-\beta)DK \quad \alpha(1-\beta)DK \quad \beta D],$$

$$i \in \{1, 2, 3, 4\}, \alpha, \beta \in \{0, 1\}, \tilde{B}_\omega = [B_\omega^T \quad 0 \quad 0]^T.$$

因此传感器与控制器之间、控制器与执行器之间具有数据包丢失的闭环网络控制系统(4)可以由如下的4个子系统表示:

- 1) 当 $\alpha = \beta = 0$ 时, 即传感器与控制器之间、控制器与执行器之间没有数据包丢失的情况, 系统(4)对应的数学模型变为

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \Phi_1\xi(k) + \tilde{B}_\omega\omega(k), \\ z(k) = \Psi_1\xi(k) + D_\omega\omega(k), \end{cases} \quad (5)$$

其中:

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} A + BK & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Psi_1 = [C + DK \quad 0 \quad 0].$$

2) 当 $\alpha = 0, \beta = 1$ 时, 即传感器与控制器之间没有数据包丢失, 但控制器与执行器之间存在数据包丢失的情况, 系统(4)对应的数学模型变为

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \Phi_2 \xi(k) + \tilde{B}_\omega \omega(k), \\ z(k) = \Psi_2 \xi(k) + D_\omega \omega(k), \end{cases} \quad (6)$$

其中:

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Psi_2 = [C \ 0 \ D].$$

3) 当 $\alpha = 1, \beta = 0$ 时, 即传感器与控制器之间存在数据包丢失, 但控制器与执行器之间没有数据包丢失的情况, 系统(4)对应的数学模型变为

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \Phi_3 \xi(k) + \tilde{B}_\omega \omega(k), \\ z(k) = \Psi_3 \xi(k) + D_\omega \omega(k), \end{cases} \quad (7)$$

其中:

$$\Phi_3 = \begin{bmatrix} A & BK & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & K & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_3 = [C \ DK \ 0].$$

4) 当 $\alpha = 1, \beta = 1$ 时, 即传感器与控制器之间、控制器与执行器之间都存在数据包丢失的情况, 系统(4)对应的数学模型变为

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \Phi_4 \xi(k) + \tilde{B}_\omega \omega(k), \\ z(k) = \Psi_4 \xi(k) + D_\omega \omega(k), \end{cases} \quad (8)$$

其中:

$$\Phi_4 = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Psi_4 = [C \ 0 \ D].$$

从上面的分析结果可以看出, 随着网络条件的变化, 闭环系统(4)在上面的4个子系统(5)~(8)之间跳变. 在实际的通信系统中, 系统当前时刻的丢包通常和前一时刻的数据包是否丢失有关. 因此将传感器与控制器之间、控制器与执行器之间是否存在数据包丢失情况的NCS(4)建模成具有4个子系统的马尔科夫跳变系统

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \Phi_{\theta(k)} \xi(k) + \tilde{B}_\omega \omega(k), \\ z(k) = \Psi_{\theta(k)} \xi(k) + D_\omega \omega(k), \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\{\theta(k), k \in \mathbb{Z}\}$ 是离散时间齐次马尔科夫链, 并在有限的离散集 $\ell = \{1, 2, 3, 4\}$ 中取值. Markov链的状态 $\theta(k) = 1, \theta(k) = 2, \theta(k) = 3$ 及 $\theta(k) = 4$ 分别对应马尔科夫跳变系统(9)的4个子系统(5)~(8). Markov链 $\theta(k)$ 具有转移概率

$$\pi_{ij} = P\{\theta(k+1) = j | \theta(k) = i\}, \quad (10)$$

其中: $\pi_{ij} \geq 0, \forall i, j \in \ell$, 且 $\sum_{j=1}^4 \pi_{ij} = 1$, 同样地状态

转移概率矩阵定义如下:

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & \pi_{24} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & \pi_{34} \\ \pi_{41} & \pi_{42} & \pi_{43} & \pi_{44} \end{bmatrix}.$$

注 1 闭环系统(9)是一类离散时间马尔科夫跳变系统. 在以往的研究中, 通常假设马尔科夫状态转移概率矩阵是已知的, 而对于状态转移概率矩阵部分未知的情况研究的较少. 本文研究的系统(9)具有部分未知的马尔科夫状态转移概率.

本文考虑的跳变系统(9)的状态转移概率矩阵 π 中元素只有部分可以得到的情况, 即 π 中的许多元素是未知的情况. 例如, 对具有4个子系统的马尔科夫跳变系统(9), 跳变概率矩阵 π 或许是如下情况:

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & ? & \pi_{13} & ? \\ ? & ? & ? & \pi_{24} \\ \pi_{31} & ? & \pi_{33} & ? \\ ? & ? & \pi_{43} & \pi_{44} \end{bmatrix},$$

其中“?”表示转移概率矩阵中的未知元素, 为了表述方便, $\forall i \in \ell$, 将Markov链 $\theta(k)$ 的有限状态集合 ℓ 表示成已知部分 $\ell_{\mathcal{K}}^i$ 及未知部分 $\ell_{\mathcal{UK}}^i$ 之和的形式, 即 $\ell = \ell_{\mathcal{K}}^i + \ell_{\mathcal{UK}}^i$, 其中

$$\begin{cases} \ell_{\mathcal{K}}^i = \{j : \pi_{ij} \text{ 已知}\}, \\ \ell_{\mathcal{UK}}^i = \{j : \pi_{ij} \text{ 未知}\}. \end{cases} \quad (11)$$

而且, 如果 $\ell_{\mathcal{K}}^i \neq \emptyset$, 其进一步表示为

$$\ell_{\mathcal{K}}^i = \{\mathcal{K}_1^i, \dots, \mathcal{K}_m^i\}, \quad \forall 1 \leq m \leq 4, \quad (12)$$

其中 $\mathcal{K}_m^i \in \mathbb{N}^+$ 表示状态转移概率矩阵 π 的第 i 行中的第 m 个已知的元素, 且有 $\pi_{\mathcal{K}}^i = \sum_{j \in \ell_{\mathcal{K}}^i} \pi_{ij}$.

定义 1^[18] 如果存在常数 C 使得

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\{\|x(k)\|^2 | \xi_0, \theta_0\} \leq C\Gamma(\xi_0, \theta_0)$$

成立, 式中 $\Gamma(\xi_0, \theta_0) \geq 0$ 是满足 $\Gamma(0, \dots, 0) = 0$ 的系统初始值函数, 则无扰动跳变系统(9)是随机稳定的.

定义 2^[19] 给定正常数 $\gamma > 0$, 如果: a) 闭环系统(9)是随机稳定的; b) 在零初始条件下, 满足约束条件 $\|z(k)\|_2 \leq \gamma \|\omega(k)\|_2$, 则闭环系统(9)被称为满足H_∞性能指标 γ .

给定扰动衰减性能水平 $\gamma > 0$, 进一步给出H_∞性能函数

$$J_\infty = \gamma^{-1} \|z(k)\|_2^2 - \gamma \|\omega(k)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} E[\gamma^{-1} z(k)^T z(k) - \gamma \omega(k)^T \omega(k) | \xi_0, \theta_0], \quad (13)$$

其中: ξ_0 是系统初始值函数, θ_0 是马尔科夫链 $\theta(k)$ 的初始状态.

本文的研究目的是设计状态反馈控制器(2), 使得转移概率部分未知的闭环系统(9)随机稳定, 且满足 H_∞ 性能指标 γ .

3 NCS的 H_∞ 性能分析(H_∞ performance analysis for NCS)

本节讨论在传感器与控制器之间、控制器与执行器之间存在数据包丢失的情况下, 闭环系统(9)随机稳定并满足 H_∞ 性能指标的充分条件.

定理 1 给定 $\gamma > 0$ 和控制器增益 K , 若存在适当维数矩阵 $P_i > 0$, 使得 $\forall i \in \ell$, 满足下面的矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} -(\mathcal{P}_K^i)^{-1} & \Phi_i & \tilde{B}_\omega & 0 \\ * & -\pi_K^i P_i & 0 & \Psi_i^T \\ * & * & -\frac{1}{2}\gamma I & D_\omega^T \\ * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} -P_j^{-1} & \Phi_i & \tilde{B}_\omega \\ * & -P_i & 0 \\ * & * & -\frac{1}{2}\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall j \in \ell_{UK}^i, \quad (15)$$

其中: $\mathcal{P}_K^i = \sum_{j \in \ell_K^i} \pi_{ij} P_j$, $\Phi_i, \Psi_i (i \in \ell)$ 和 \tilde{B}_ω 在式(4)中有定义. 则转移概率部分未知的马尔科夫跳变系统是随机稳定的, 且满足 $\|z(k)\|_2 \leq \gamma \|\omega(k)\|_2$.

证 选取如下的丢包依赖的Lyapunov函数候选:

$$V(k) = x(k)^T P_{\theta(k)} x(k). \quad (16)$$

记 $\theta(k) = i$, 当 $\omega(k) = 0$ 时, 沿着闭环系统(9)求解得

$$\begin{aligned} E[\Delta V(k)] &= \\ E[V(k+1), \theta(k+1)] - V(k, \theta(k)) &= \\ E\{\xi^T(k+1)P_{\theta(k+1)}\xi(k+1)\} - \xi^T(k)P_{\theta(k)}\xi(k) &= \\ \xi^T(k)(\Phi_i^T \sum_{j \in \ell} \pi_{ij} P_j \Phi_i - P_i)\xi(k) &= \xi^T(k)\Omega_i \xi(k). \end{aligned} \quad (17)$$

注意到 $\sum_{j \in \ell} \pi_{ij} = 1$, 结合式(11)得

$$\begin{aligned} \Omega_i &= \Phi_i^T (\sum_{j \in \ell} \pi_{ij} P_j) \Phi_i - (\sum_{j \in \ell} \pi_{ij}) P_i = \\ \Phi_i^T (\sum_{j \in \ell_K^i} \pi_{ij} P_j) \Phi_i - (\sum_{j \in \ell_K^i} \pi_{ij}) P_i &+ \\ \Phi_i^T (\sum_{j \in \ell_{UK}^i} \pi_{ij} P_j) \Phi_i - (\sum_{j \in \ell_{UK}^i} \pi_{ij}) P_i &= \\ \Phi_i^T \mathcal{P}_K^i \Phi_i - \pi_K^i P_i + \sum_{j \in \ell_{UK}^i} \pi_{ij} (\Phi_i^T P_j \Phi_i - P_i). \end{aligned}$$

由Schur补引理得

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} -(\mathcal{P}_K^i)^{-1} & \Phi_i \\ * & -\pi_K^i P_i \end{bmatrix} + \sum_{j \in \ell_{UK}^i} \pi_{ij} \begin{bmatrix} -P_j^{-1} & \Phi_i \\ * & -P_i \end{bmatrix}.$$

定理1中式(14)(15)使得 $\Omega_i < 0$ 成立. 则有

$$E[\Delta V] \leq -\lambda_{\min}(-\Omega_i) \xi(k)^T \xi(k) \leq -\beta x(k)^T x(k), \quad (18)$$

其中: $\beta = \inf\{\lambda_{\min}(-\Omega_i)\}$, $\lambda_{\min}(-\Omega_i)$ 表示 $-\Omega_i$ 的最小特征根. 由式(18)知, 对任意的 $T \geq 1$, 有

$$E[V(k+1)] - E[V(0)] \leq -\beta \sum_{k=0}^T E[x(k)^T x(k)]. \quad (19)$$

因此,

$$\sum_{k=0}^T E[x(k)^T x(k)] \leq \frac{1}{\beta} E[V(\xi_0, \theta_0)].$$

令 $k \rightarrow \infty$, 得

$$\sum_{k=0}^{\infty} E[x(k)^T x(k)] \leq \frac{1}{\beta} E[V(\xi_0, \theta_0)] < \infty. \quad (20)$$

根据定义1, 可得具有部分未知转移概率的无扰动马尔科夫跳变系统(9)是随机稳定的.

令 $\zeta(k) = [\xi(k)^T \omega(k)^T]^T$, 进而对任意非零的 $\omega(k) \in L_2[0, \infty)$ 有

$$\begin{aligned} E[\Delta V(k, \theta(k))] + \gamma^{-1} z(k)^T z(k) - \gamma \omega(k)^T \omega(k) &= \\ (\Phi_i \xi(k) + \tilde{B}_\omega \omega(k))^T \sum_{j \in \ell} \pi_{ij} P_j (\Phi_i \xi(k) + \tilde{B}_\omega \omega(k)) &- \\ \xi(k)^T P_i \xi(k) - \gamma \omega(k)^T \omega(k) + (\Psi_i \xi(k) + D_\omega \omega(k))^T &\gamma^{-1} (\Psi_i \xi(k) + D_\omega \omega(k)) = \\ \zeta(k)^T \left(\begin{bmatrix} \Phi_i^T \\ \tilde{B}_\omega^T \end{bmatrix} \sum_{j \in \ell} \pi_{ij} P_j \begin{bmatrix} \Phi_i & \tilde{B}_\omega \end{bmatrix} + \right. \\ \left. \begin{bmatrix} -\sum_{j \in \ell} \pi_{ij} P_i & 0 \\ 0 & -\gamma I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_i^T \\ D_\omega^T \end{bmatrix} \gamma^{-1} \begin{bmatrix} \Psi_i & D_\omega \end{bmatrix} \right) \eta_k &= \\ \zeta_k^T \Pi_i \zeta_k, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \begin{bmatrix} \Phi_i^T \\ \tilde{B}_\omega^T \end{bmatrix} \sum_{j \in \ell_K^i} \pi_{ij} P_j \begin{bmatrix} \Phi_i & \tilde{B}_\omega \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} -\sum_{j \in \ell_K^i} \pi_{ij} P_i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\gamma I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_i^T \\ D_\omega^T \end{bmatrix} \gamma^{-1} \begin{bmatrix} \Psi_i & D_\omega \end{bmatrix} + \\ \sum_{j \in \ell_{UK}^i} \pi_{ij} \left(\begin{bmatrix} \Phi_i^T \\ \tilde{B}_\omega^T \end{bmatrix} P_j \begin{bmatrix} \Phi_i & \tilde{B}_\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\gamma I \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

因为 $\pi_{ij} \geq 0, \forall j \in \ell$, 由矩阵的Schur补性质, 如果定理1中式(14)(15)成立, 则有 $\Pi_i < 0$ 成立. 零初始条件下, 对任意的 $N > 0$, 定义

$$J_N = \gamma^{-1} \|z(k)\|_2^2 - \gamma \|\omega(k)\|_2^2 =$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[\gamma^{-1}z(k)^T z(k) - \gamma\omega(k)^T \omega(k)]. \quad (21)$$

由于 $V_0(\zeta(\cdot), \theta_0) = 0$, 因此

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[V(x(N), \theta(N))] = \\ & \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{N-1} (V(x(k+1), \theta(k+1)) - V(x(k), \theta(k)))\right] > 0. \end{aligned} \quad (22)$$

从而

$$\begin{aligned} J_N &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{N-1} (V(k+1, \theta(k+1)) - \right. \\ & \left. V(k, \theta(k)) + \gamma^{-1}z(k)^T z(k) - \right. \\ & \left. \gamma\omega(k)^T \omega(k))\right] - \mathbb{E}[V(N, \theta(N))] \leq \\ & \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{N-1} (V(k+1, \theta(k+1)) - V(k, \theta(k)) + \right. \\ & \left. \gamma^{-1}z(k)^T z(k) - \gamma\omega(k)^T \omega(k))\right] = \\ & \sum_{k=0}^{N-1} [\zeta(k)^T \Pi_i \zeta(k)]. \end{aligned} \quad (23)$$

注意到 $\Pi_i < 0$, 因此, $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} [\zeta(k)^T \Pi_i \zeta(k)] < 0$, 且对于任意非零 $\omega(k) \in L_2[0, \infty)$, $z(k) \in L_2[0, \infty)$, 有

$$\|z(k)\|_2 < \gamma \|\omega(k)\|_2.$$

证毕.

注 2 注意到如果 $\ell_{\mathcal{U}\mathcal{K}}^i = \emptyset, \forall i \in \ell$, 则系统(9)具有已知的转移概率, 系统随机稳定的充分条件变为

$$\Phi_i^T \sum_{j=1}^4 \pi_{ij} P_j \Phi_i - P_i < 0,$$

文献[6]对此类转移概率已知的马尔科夫跳变系统做了研究. 如果 $\ell_{\mathcal{K}}^i = \emptyset, \forall i \in \ell$, 则系统(9)变成切换系统, 系统随机稳定的充分条件变为 $\Phi_i^T P_j \Phi_i - P_i < 0$.

4 H_∞ 状态反馈控制器设计(H_∞ state-feedback controller design)

定理1给出了在给定控制器K作用下, 转移概率部分未知的马尔科夫跳变系统(9)随机稳定并满足H_∞性能的充分条件, 但没有给出状态反馈控制器的设计方法, 本小节在定理1的基础上, 给出状态反馈控制器的求解方法.

为了得到状态反馈控制器增益K的显示表达式, $\Phi_i, \Psi_i (i \in \ell)$ 可以分别写为

$$\Phi_i = \Phi_{0i} + M_i K N_i, \quad \Psi_i = \Psi_{0i} + D K E_i,$$

其中:

$$\Phi_{01} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_{01} = [C \ 0 \ 0],$$

$$\Phi_{02} = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Psi_{02} = [C \ 0 \ D],$$

$$\Phi_{03} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_{03} = [C \ 0 \ 0],$$

$$\Phi_{04} = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Psi_{04} = [C \ 0 \ D],$$

$$M_1 = M_2 = [B^T \ 0 \ I^T]^T, \quad N_1 = [I \ 0 \ 0],$$

$$N_2 = [0 \ I \ 0], \quad E_1 = [I \ 0 \ 0], \quad E_3 = [0 \ I \ 0],$$

$$M_3 = M_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N_3 = N_4 = [0 \ 0 \ 0],$$

$$E_2 = E_4 = [0 \ 0 \ 0].$$

对定理1中的矩阵不等式(14)进行等价变换得

$$\begin{bmatrix} -P_{\mathcal{K}_1^i}^{-1} & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\pi_{i\mathcal{K}_1^i}}(\Phi_{0i} + M_i K N_i) \\ * & -P_{\mathcal{K}_2^i}^{-1} & \cdots & \vdots & \sqrt{\pi_{i\mathcal{K}_2^i}}(\Phi_{0i} + M_i K N_i) \\ * & * & \ddots & 0 & \vdots \\ * & * & * & -P_{\mathcal{K}_m^i}^{-1} & \sqrt{\pi_{i\mathcal{K}_m^i}}(\Phi_{0i} + M_i K N_i) \\ * & * & * & * & -\pi_{\mathcal{K}}^i P_i \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ \sqrt{\pi_{i\mathcal{K}_1^i}} \tilde{B}_\omega & 0 & & & \\ \sqrt{\pi_{i\mathcal{K}_1^i}} \tilde{B}_\omega & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \sqrt{\pi_{i\mathcal{K}_m^i}} \tilde{B}_\omega & 0 & & & \\ 0 & (\Psi_{0i} + D K E_i)^T & & & \\ -\frac{1}{2}\gamma I & D_\omega^T & & & \\ * & -\gamma I & & & \end{bmatrix} < 0. \quad (24)$$

注 3 注意到式(15)(24)中存在非线性项 $P_j^{-1}, P_{\mathcal{K}_1^i}^{-1}, P_{\mathcal{K}_2^i}^{-1}$ 和 $P_{\mathcal{K}_m^i}^{-1}$, 因此式(15)(24)给出的不是线性矩阵不等式条件, 为了求解方便, 用 X_i 替换式(15)(24)中的非线性项 $P_i^{-1}, i \in \ell$. 为了求取控制器增益K, 采用文献[20]中的锥形求补方法, 因此H_∞状态反馈控制器(2)的求解问题转化为如下的有关线性矩阵不等式的非线性最小化问题.

定理 2 给定 $\gamma > 0$, 对系统(9)及H_∞性能指标(13), 若存在适当维数的矩阵 $X_i > 0, P_i > 0, \forall i \in \ell$, 使得以下的优化问题有解.

$$\begin{aligned} & \min_{\gamma, X_i, P_i} \text{tr}(\sum_{i=1}^4 P_i X_i) \\ & \text{s.t. i)} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}
 -X_{\mathcal{K}_1^i} & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\pi_i \mathcal{K}_1^i}(\Phi_{0i} + M_i K N_i) \\
 * & -X_{\mathcal{K}_2^i} & \cdots & \vdots & \sqrt{\pi_i \mathcal{K}_2^i}(\Phi_{0i} + M_i K N_i) \\
 * & * & \ddots & 0 & \vdots \\
 * & * & * & -X_{\mathcal{K}_m^i} & \sqrt{\pi_i \mathcal{K}_m^i}(\Phi_{0i} + M_i K N_i) \\
 * & * & * & * & -\pi_{\mathcal{K}}^i P_i \\
 * & * & * & * & * \\
 * & * & * & * & * \\
 \sqrt{\pi_i \mathcal{K}_1^i} \tilde{B}_\omega & 0 & & & \\
 \sqrt{\pi_i \mathcal{K}_1^i} \tilde{B}_\omega & 0 & & & \\
 \vdots & \vdots & & & \\
 \sqrt{\pi_i \mathcal{K}_m^i} \tilde{B}_\omega & 0 & & & \\
 0 & (\Psi_{0i} + D K E_i)^T & & & \\
 -\frac{1}{2} \gamma I & D_\omega^T & & & \\
 * & -\gamma I & & &
 \end{bmatrix} < 0,$$

$$\text{ii) } \begin{bmatrix}
 -X_j & \Phi_{0i} + M_i K N_i & \tilde{B}_\omega \\
 * & -P_i & 0 \\
 * & * & -\frac{1}{2} \gamma I
 \end{bmatrix} < 0, \forall j \in \ell_{i\mathcal{K}},$$

$$\text{iii) } \begin{bmatrix}
 P_i & I \\
 I & X_i
 \end{bmatrix} > 0, i \in \ell, \quad (25)$$

其中 $\mathcal{K}_1^i, \dots, \mathcal{K}_m^i$ 在式(12)中有定义. 其解为 $(\tilde{X}_i, \tilde{P}_i, \tilde{K})$, 那么状态反馈控制器(2)使得具有部分未知转移概率的闭环马尔科夫跳变系统(9)是随机稳定的, 且满足 H_∞ 扰动衰减指标 γ , 系统(9)的 γ 次优 H_∞ 控制率为 K 通过下列迭代算法1实现.

算法 1

Step 1 采用fesp求解器寻找满足式(25)中的i), ii), iii)的一组可行解 (P_i^0, X_i^0, K^0) , 令 $k = 0$.

Step 2 采用mincx求解器求解以下有关 (P_i, X_i, K) 的LMI优化问题:

$$\begin{aligned}
 \min \text{Tr} \sum_{i=1}^4 (P_i^k X_i + P_i X_i^k), \\
 \text{s.t. 式(21)}.
 \end{aligned}$$

Step 3 令 $P_i^{k+1} = P_i, X_i^{k+1} = X_i, K^{k+1} = K$.

Step 4 如果满足式(25)中的LMI i)和ii), 则退出循环. 否则, 令 $k = k + 1$, 然后返回到Step 2.

5 数值例子(Numerical example)

考虑文[6]中的仿真对象, 其中参数为:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.1 & 1.5 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, B_\omega = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \\
 C = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, D_\omega = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$

通过增广矩阵法得到的马尔科夫跳变系统(9)相应的参数为:

$$\Phi_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{02} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 & 0 & 0.1 & 1.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.2 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{03} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{04} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 & 0 & 0.1 & 1.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0.2 & 0.1 & 0 & 0 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$\Psi_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Psi_4 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0.2 & 0.1 & 0 & 0 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$M_1 = M_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 1.5 \\ 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, M_3 = M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_3 = N_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

马尔科夫链 $\theta(k) \in \{1, 2, 3, 4\}$, 具有部分未知转移概率的转移概率矩阵为

$$\pi = \begin{bmatrix} 0.3 & ? & 0.1 & ? \\ ? & ? & 0.3 & 0.2 \\ ? & 0.1 & ? & 0.3 \\ 0.2 & ? & ? & ? \end{bmatrix}.$$

图2给出了由状态转移概率 π 引起的马尔科夫链 $\theta(k) \in \{1, 2, 3, 4\}$ 的实现情况.

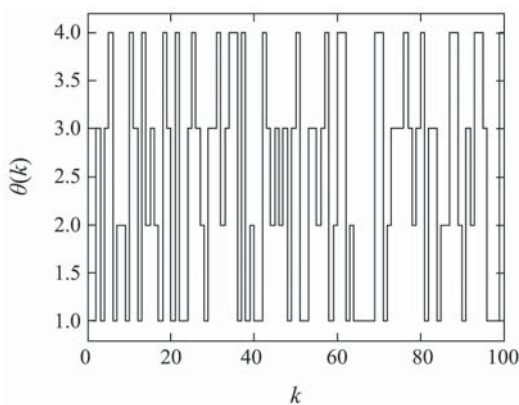


图 2 $\theta(k)$ 的跳变值
Fig. 2 Values of $\theta(k)$

系统矩阵 A 的特征根为1.0639和-0.5639, 有一特征根在单位圆外, 表明系统是开环不稳定的. 设系统初始状态为 $x(0) = [0.4 \quad -0.3]^T$, $\theta(0) = 1$. 根据定理2, 利用MATLAB中的LMI工具箱求得最小 $\gamma_{\min} = 0.317$, 采用算法1求得相应的优化问题(25)有解, 求得的控制增益矩阵为

$$K = \begin{bmatrix} -0.4252 & -0.1802 \\ -0.3463 & 0.1451 \end{bmatrix}.$$

系统状态响应曲线如图3所示, 数值仿真结果表明系统是随机稳定的.

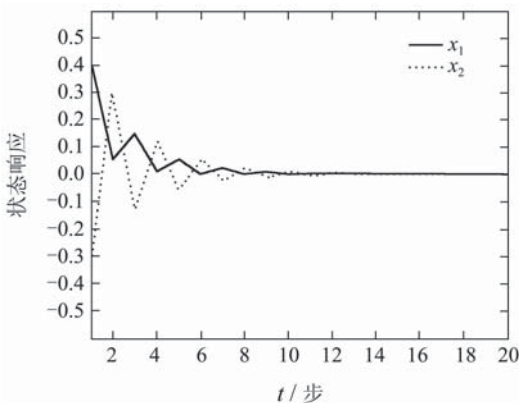


图 3 K 作用下的系统状态轨迹
Fig. 3 State trajectories under K

本文把标准的线性二次高斯(linear-quadratic-Gaussian, LQG)控制方法和本文的方法进行比较. 采用MATLAB工具箱中的dlqr命令求得的LQG控制器的增益为

$$K^{dlqr} = \begin{bmatrix} 0.1347 & -0.1207 \\ 0.4946 & 0.1284 \end{bmatrix}.$$

采用LQG控制器时的系统矩阵 $(A + BK^{dlqr})$ 的特征根为1.8483, -0.6043, 有一特征根在单位圆外, 表明 K^{dlqr} 无法使得系统渐进稳定.

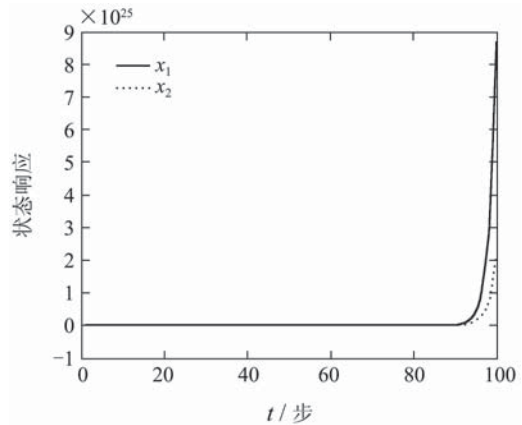


图 4 K^{dlqr} 作用下的系统状态轨迹
Fig. 4 State trajectories under K^{dlqr}

从图3, 4可知, 本文提出的方法能够使得系统(9)随机渐进稳定, 然而标准的LQG控制方法不能稳定该闭环系统.

6 结论(Conclusions)

本文研究了数据包丢失的网络控制系统的鲁棒H_∞控制问题. 将S-C之间及C-A之间具有数据包丢失的网络控制系统建模为转移概率部分未知的马尔科夫跳变系统. 基于丢包依赖的Lyapunov函数法及线性矩阵不等式技术给出数据包丢失的网络控制系统随机稳定性的充分条件, 并给出满足H_∞扰动衰减指标的状态反馈镇定控制器的设计方法. 最后数值仿真例子验证了结果的有效性.

参考文献(References):

- [1] NILSSON J. *Real-time control systems with delays*[D]. Lund: Lund Institute of Technology, 1998.
- [2] WALSH G C, YE H, BUSHNELL L G. Stability analysis of networked control systems[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2002, 10(3): 438 - 446.
- [3] ZHANG W, BRANICKY M S, PHILLIPS S M. Stability of networked control systems[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2001, 21(1): 84 - 99.
- [4] HESPANHA J P, PAYAM N, XU Y G. A survey of recent results in networked control systems[J]. *Proceedings of IEEE*, 2007, 95(1): 138 - 162.
- [5] 黎善斌. 网络控制系统的鲁棒控制算法研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2005.

- (LI Shanbin. *Study on robust control algorithm of networked control systems*[D]. Hangzhou : Zhejiang University, 2005.)
- [6] XIE D X, HAN X D, HUANG H, et al. Research on robust mean square stability of networked control systems with packet dropout[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2010, 21(1): 95 – 101.
- [7] JIA T G, NIU Y G, WANG X Y. H_∞ control for networked systems with data packet dropout[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2010, 8(2): 198 – 203.
- [8] CHE W W, WANG J L, YANG G H. Observer-based H_∞ control in multiple channel networked control systems with random packet dropouts[J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2010, 8(3): 359 – 367.
- [9] WEN D L, YANG G H. Dynamic output feedback H_∞ control for networked control systems with random consecutive packet dropouts[C] //2010 Chinese Control and Decision Conference. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2010: 1925 – 1930.
- [10] ZHANG W A, YU L. Modelling and control of networked control systems with both network-induced delay and packet-dropout[J]. *Automatica*, 2008, 44(12): 3206 – 3210.
- [11] WANG X H, YANG Z Q, QIAN Q, et al. Analysis and control of networked control systems with time-delay and stochastic packet-dropout process[C] //2010 Chinese Control and Decision Conference. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2010: 1936 – 1941.
- [12] ZHANG W A, YU L, SONG H B. Modelling and control of networked control systems with random packet losses[C] //Proceedings of the 26th Chinese Control Conference, CCC 2007. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 2007: 695 – 699.
- [13] XIONG J L, LAM J. Stabilization of linear systems over networks with bounded packet loss[J]. *Automatica*, 2007, 43(1): 80 – 87.
- [14] ZHANG W A, YU L. Output feedback stabilization of networked control systems with packet dropouts[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(9): 1705 – 1710.
- [15] WU J, CHEN T W. Design of networked control systems with packet dropouts[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(7): 1314 – 1319.
- [16] 宋洪波, 俞立, 张文安. 具有数据包丢失的网络控制系统保性能控制[J]. *控制理论与应用*, 2008, 25(5): 913 – 916.
(SONG Hongbo, YU Li, ZHANG Wenan. Guaranteed cost control of networked control systems with packet dropouts[J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(5): 913 – 916.)
- [17] ZHANG L X, BOUKAS E K. Stability and stabilization of Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities[J]. *Automatica*, 2009, 45(2): 463 – 468.
- [18] LI S B, SUN Y X. Networked guaranteed cost control for uncertain discrete-time Markovian jump linear systems[J]. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications and Algorithms*, 2008, 15(1): 129 – 146.
- [19] 郭亚锋, 李少远. 网络控制系统的 H_∞ 状态反馈控制器设计[J]. *控制理论与应用*, 2008, 25(3): 414 – 420.
(GUO Yafeng, LI Shaoyuan. H-infinity state-feedback controller design for networked control systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(3): 414 – 420.)
- [20] GHAOUI L E, OUSTRY F, AITRAMI M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1171 – 1176.

作者简介:

邱丽 (1981—), 女, 博士研究生, 研究方向为网络控制系统理论及其应用、马尔科夫跳变系统等, E-mail: qiuli05@gmail.com;

胥布工 (1956—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为复杂系统的控制及其应用等, E-mail: aubgxu@scut.edu.cn;

黎善斌 (1978—), 男, 讲师, 博士, 研究方向为网络控制系统理论及其应用、故障诊断等, E-mail: lishb@scut.edu.cn.