

非线性电路的簇发现象及分岔机制

陈章耀, 毕勤胜

(江苏大学 土木工程与力学学院, 江苏 镇江 212013)

摘要: 通过在立方非线性Hartley模型中引入交变的电流源, 并选定适当的参数和激励频率, 建立了具有快慢行为的两时间尺度周期激励电路系统. 由Hopf分岔的产生条件, 推导了自治系统Hopf分岔的第一Lyapunov系数解析表达式, 并在数值计算中得到了验证. 结合该系数, 重点分析了系统中的快慢行为, 给出了典型的周期簇发现象及其相应的分岔模式, 并利用自治系统和转换相图从分岔角度指出了该种簇发现象的产生机理.

关键词: 非线性电路; 分岔机制; 转换相图; 快慢行为

中图分类号: TP273, O415 **文献标识码:** A

Bursting phenomena as well as bifurcation mechanism in nonlinear circuit

CHEN Zhang-yao, BI Qin-sheng

(Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang Jiangsu 212013, China)

Abstract: By introducing time-dependent current source to Hartley model with cubic nonlinearity and choosing suitable values of parameter and excited frequency, we produce a periodically excited fast-slow electric circuit with two time-scales. The condition for the occurrence of Hopf bifurcation is used to derive the analytical expression of the first Lyapunov coefficient, which is validated by numerical simulation. The coefficient, as well as the bifurcation theory is employed to investigate the fast-slow effect in the system, which leads to the typical periodic bursting in the associated bifurcation modes. Based on the autonomous system and the transformed phase-portraits, the mechanism of the bursting phenomenon is presented from the standpoint of bifurcation.

Key words: nonlinear circuit; bifurcation mechanism; transformed phase portrait; fast-slow behavior

1 引言(Introduction)

对于周期激励的非线性系统, 当周期激励频率与系统的固有频率之间存在量级上的差异时, 会产生明显的快慢效应^[1], 这种由于两时间尺度上沉寂态和激发态相互作用导致的各种簇发现象存在着不同的分岔机制^[2], 深入探讨不同簇发中的各种分岔模式对于揭示其复杂现象的本质具有一定的科学意义^[3,4]. 本文基于经典的非线性电路即蔡氏电路开展相关的工作.

作为一个经典的混沌电路, 蔡氏电路由于在实验上比较容易构建, 可以作为分析诸如阵发混沌、周期激剧增加等丰富的非线性行为^[5]和模拟保密通信的测试平台^[6,7], 其动力学行为一直是国内外研究的热点课题之一^[8]. 基于蔡氏模型, 通过适当改变其中的部分电路结构, 可以相应地建立其他混沌电路^[9], 如LÜ等人系统研究了产生多涡卷混沌的理论、方法, 并建立了相应的电路^[10]. 值得指出的是

是Hartley等人用三次方模块取代原来的分段线性的二极管(称为立方非线性电路), 不仅避开了原系统的非光滑性, 同时也保留了蔡氏电路中的许多非线性现象^[11], 受到了许多学者的关注^[12,13]. 但该模型在许多方面尚未研究如建立多涡卷混沌的Hartley模型等.

本文在Hartley等人提出的立方非线性电路模型基础上, 并联一个周期变化的交变电流源, 同时选取适当的物理量, 使得电流源的周期变化频率与系统的固有频率在无量纲下存在着量级上的差距, 从而构建了两时间尺度下的非自治立方非线性电路. 在此基础上, 探讨了参数变化下系统的动力学演化过程. 通过使用恒流源作用的自治系统和转换相图研究方法, 分析了自治系统随参数变化的分岔行为. 利用第一Lyapunov系数的解析表达式区分了不同类型的Hopf分岔, 给出了连接快慢过程的fold-Hopf分岔的簇发现象, 揭示了其相应的分岔机制.

2 不同尺度下非线性电路模型(The model of nonlinear circuit with different time scales)

在具有立方非线性模块的Hartley模型的基础上(图1不含虚线所示), 并联一个电流源(图1包含虚线所示), 简称非线性电路模型. 可由如下方程刻画:

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} = \frac{1}{C_1}[G_1(V_2 - V_1) - g(V_1) + i_G], \\ \frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{C_2}[G_1(V_1 - V_2) + i_3], \\ \frac{di_3}{dt} = -\frac{1}{L_1}V_2. \end{cases} \quad (1)$$

其电阻特性曲线(图2)为 $g(V_1) = \frac{1}{R_1}(\alpha V_1^3 - \beta V_1)$.

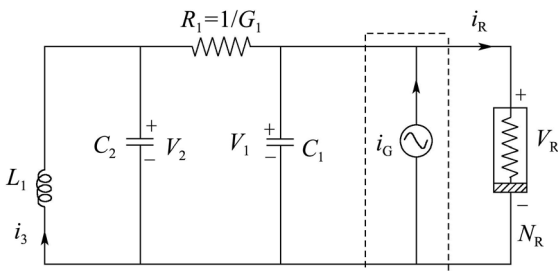


图1 非线性蔡氏电路
Fig. 1 Nonlinear chua's circuit

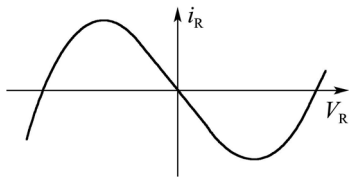


图2 非线性电阻特性曲线
Fig. 2 The characteristic of the nonlinear resistor

若电流源为恒定电流源即 $i_G = I_G$, 则引入变换 $x = V_1, y = V_2, z = i_3 R_1, t = R_1 C_2 \tau, f(x) = R_1 g(V_1)$, 得到无量纲参数: $a = \frac{C_2}{C_1}, b = \frac{R_1^2 C_2}{L_1}, A = I_G R_1$, 式(1)可表示为如下无量纲形式:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = a[y - x - f(x)] + A, \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z, \quad \frac{dz}{d\tau} = -by. \end{cases} \quad (2)$$

若电流源为交变的电流源即 $i_G = I_G \sin(\omega t)$, 则引入相同的变换, 且 $\theta = \omega R_1 C_2$. 式(1)可表示为如下无量纲形式:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = a[y - x - f(x)] + A \sin(\theta\tau), \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z, \quad \frac{dz}{d\tau} = -by. \end{cases} \quad (3)$$

其中在式(2)(3)中, $f(x) = \alpha x^3 - \beta x$, 参数 a, b, A, θ 均为大于零的值.

由于在本文中, 非线性模块在参数控制中是不变的模块, 这里取定 $\alpha = \frac{2}{7}, \beta = \frac{8}{7}$. 为此, 为了研究方便, 方程(2)(3)写为

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = a(y - \frac{2}{7}x^3 + \frac{1}{7}x) + w, \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z, \quad \frac{dz}{d\tau} = -by. \end{cases} \quad (4)$$

其中在恒定的电流源作用下,

$$w = A, \quad (5a)$$

或在交变的电流源作用下,

$$w = A \sin(\theta\tau), \quad (5b)$$

且 $a > 0, b > 0, A > 0, \theta > 0$. 需要指出, 在交变电流源的作用下, 当外激励频率 ω 远小于系统固有频率时, 周期激励项表现为慢变量, 从而导致整个系统存在两个时间尺度 $t, \omega t$ (无量纲时为 $\tau, \theta\tau$). 而两种不同尺度上的相互作用导致快慢耦合的簇发现象, 从而建立了具有快慢行为的不同尺度的非线性电路.

3 恒流源作用下系统的分岔分析(Bifurcation analysis of system with time-independent current source)

非线性电路在恒流源作用下的无量纲方程(4)(5a)为自治系统, 下文简称为自治系统. 为与后文一致, 这里使用式(4)时, 将 w 定义为参数.

对于非线性电路自治系统的分岔行为, 根据文献[14]类似的过程首先给出自治系统(4)(5a)的分岔条件.

系统(4)(5a)平衡点 $E(x_0, 0, -x_0)$ 在 $w = w_c$ 处产生fold分岔的条件是

$$\frac{w_c}{a} = \pm \sqrt{\frac{2}{1323}}, \quad x_0 = \mp \sqrt{\frac{1}{6}}. \quad (6)$$

系统(4)(5a)平衡点 $E(x_0, 0, -x_0)$ 在 $w = w_c$ 处产生Hopf分岔条件是

$$\begin{cases} (\frac{w_c}{a})^2 > \frac{2}{1323}, \\ (\frac{e_3 w_c}{e_1 + e_2 w_c^2})^3 - \frac{1}{2} (\frac{e_3 w_c}{e_1 + e_2 w_c^2}) - \frac{7w_c}{2a} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

其中:

$$\begin{aligned} e_1 &= 48a^4(6a - 7)(10a^2 + 35a - 49b), \\ e_2 &= -127008a^5, \quad e_3 = 7056a^4(7b - 7 + 4a - 4a^2). \end{aligned}$$

3.1 自治系统的分岔曲线(Bifurcation set of the autonomous system)

自治系统(4)(5a)可能产生fold和Hopf两种分岔行

为. 为进一步形象描述各种分岔及其相应条件, 取

$$R_1 = 0.1 \Omega, C_2 = 10 \text{ mF}, L_1 = 0.007 \text{ mH},$$

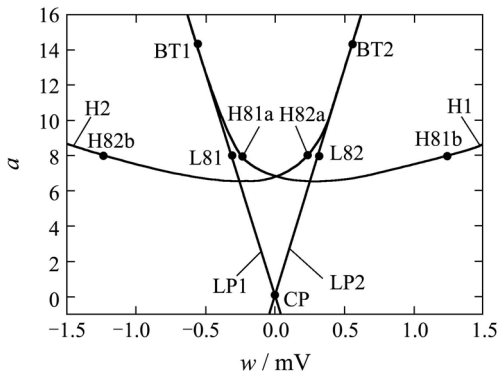
此无量纲的参数 $b = 100/7$, 可得自治系统无量纲参数 $a-w$ 平面上的分岔曲线(图3(a)). 由式(6)(7)可画出fold分岔直线LP1, LP2和Hopf分岔曲线H1, H2.

注意到, 由式(6)可求得fold分岔点的 $x_0^2 = \frac{1}{6} = (\pm 0.408248)^2$, 它与参数 a 及 w 无关. 同时在式(7)中有

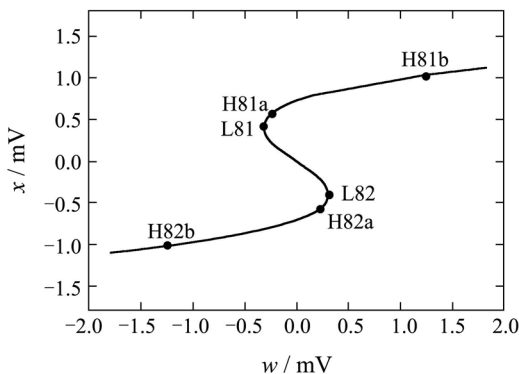
$$x_0^2 > \frac{1}{6} \text{ 即 } \left(\frac{w_c}{a}\right)^2 > \frac{2}{1323},$$

由此可知Hopf分岔点与fold分岔点位置关系, 从图3(a)中可以看到, 两根Hopf分岔曲线在fold分岔直线的一侧, 最多与fold分岔直线相切即Bogdanov-Takens分岔点BT1, BT2.

这里选取 $C_1 = 10/8 \text{ mF}$, 此时 $a = 8.0$. 可以看到(图3(b)), 自治系统平衡曲线上有两个互为对称的fold分岔点L81, L82, 有4个Hopf分岔点H81a, H81b, H82a, H82b, 其中: H81a, H82b互为对称, H81b, H82b互为对称. 但同一侧H81a, H81b或H82a, H82b都是Hopf分岔点. 为揭示同类Hopf分岔点之间的差别, 在此推出了如下自治系统的第一Lyapunov系数^[15]解析表达式.



(a) 分岔曲线



(b) $a = 8.0$ 关于参数 w 的分岔图

图 3 $b = 100/7$ 时系统状态

Fig. 3 The system of $b = 100/7$

3.2 自治系统的第一Lyapunov系数(The first Lyapunov coefficient of the autonomous system)

若系统(4)在平衡点 $E(x_0, 0, -x_0)$ 产生Hopf分岔, 则在平衡点 $E(x_0, 0, -x_0)$ 处存在第一Lyapunov系数

$$l_1(x_0, 0, -x_0) = m(L_{01} - 2L_{02} + L_{03}). \quad (8)$$

当参数 a, b 满足 $l_1(x_0, 0, -x_0) < 0$, 则该系统在平衡点 $E(x_0, 0, -x_0)$ 处产生超临界Hopf分岔; 当 $l_1(x_0, 0, -x_0) > 0$, 则该系统在 $E(x_0, 0, -x_0)$ 处产生亚临界Hopf分岔. 其中:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = -\frac{6x_0^2}{7} + \frac{1}{7}, k_2 = -\frac{6}{7}x_0, k_3 = -\frac{2}{7}, \\ \omega = b - a(k_1 + 1), \\ m = [\omega^4 + (1 - 2b)\omega^2 + b^2]/2\omega / \\ \quad [(\omega^4 - (a + 2b + 1)\omega^2 + \\ \quad b^2 - ba)^2 + 4\omega^2(\omega^2 - b)^2], \\ n = -4a^3k_2^2/[4\omega^2(1 - ak_1) + abk_1]^2 + \\ \quad 4\omega^2(4\omega^2 + a + ak_1 - b)^2], \end{array} \right. \quad (9)$$

$$L_{01} = 6ak_3[\omega^8 + (2 - a - 4b)\omega^6 + (a + ab - 4b + 6b^2 + 1)\omega^4 + (ab^2 + ab + 2b^2 - 4b^3)\omega^2 - ab^3 + b^4], \quad (10)$$

$$L_{02} = \frac{4ak_2^2}{k_1}[\omega^8 + (2 - a - 4b)\omega^6 + (a + ab - 4b + 6b^2 + 1)\omega^4 + (ab^2 + ab + 2b^2 - 4b^3)\omega^2 - ab^3 + b^4], \quad (11)$$

$$L_{03} = n[16k_1\omega^{12} + (36k_1 - 60 - 16k_1a - 72k_1b)\omega^{10} + (-8 + 24k_1 + 129b^2k_1 + 16b + 12ak_1 - 96k_1b - 20a + 24k_1ab)\omega^8 + (-24k_1b + 4 + 4a + 90b^2k_1 + 7ab^2k_1 + 4ak_1 + 4k_1 + 84b^2 + 8ab - 16b + 12abk_1 - 116b^3k_1)\omega^6 + (-3b^2ak_1 - 48b^3 + 9b^2k_1 + 4ba + 4abk_1 - 23ab^3k_1 + 54b^4k_1 - 36b^3k_1 + 24b^2 + 20ab^2)\omega^4 + (9ab^4k_1 + 6b^4k_1 - 3ab^3k_1 + 8b^4 - 12b^5k_1 - 8ab^3)\omega^2 + b^6k_1 - ab^5k_1]. \quad (12)$$

由此得到自治系统 $a = 8.0$ 在参数 w 下平衡点的分岔曲线, 并根据式(8)画出稳定的极限环和不稳定的极限环(图4), 所以LPC1, LPC2为极限环的折叠分岔点(limit point bifurcation of cycles). 图中平衡曲线中粗实线为稳定的焦点, 细实线为不稳定焦点. 平衡曲线上存在两个fold分岔点即L81, L82($\mp 0.311046, \pm 0.408248$)和4个Hopf分岔点. 由式(8)及文献[15]容易验证: H81a, H82a($\mp 0.231872, \pm 0.566508$)为超临

界Hopf分岔点, H81b, H82b($\pm 1.238914, \pm 1.016482$)为亚临界Hopf分岔点. 图中从H81a, H82a出发分别到LPC1, LPC2(± 1.73748)的实心圆点部分为稳定极限环, H81b, H82b出发分别到LPC1, LPC2的空心圆点为不稳定极限环.

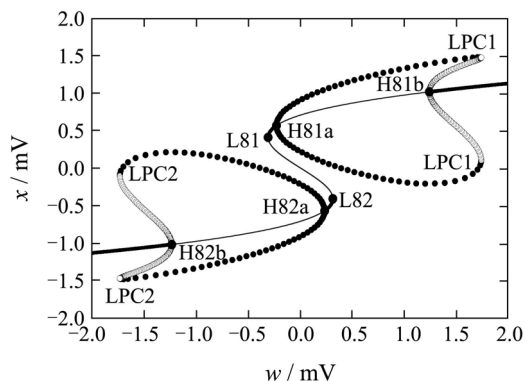


图4 $a = 8.0$ 时的平衡点分岔图

Fig. 4 The bifurcation diagram with respect to for $a = 8.0$

下面结合恒流源作用的非线性电路分岔分析结果, 讨论交变电流源作用下非线性电路系统中出现的快慢现象及其Hopf分岔机制.

4 不同尺度下非线性电路的快慢行为及其分岔机制(Fast-slow behavior as well as bifurcation mechanism in nonlinear circuit with different scales)

仍取定 $C_1 = 10/8$ mF, 即无量纲参数 $a = 8.0$. 为讨论交变电流源作用下非线性电路中出现的快慢行为, 根据恒流源作用下自治系统的分岔分析, 选取合适的交变电流源的幅值和频率, 使非线性电路成为不同尺度的非线性电路, 讨论其快慢行为及其分岔机制.

4.1 不同激励幅值下的快慢行为和分岔机制(Fast-slow behavior as well as bifurcation mechanism in nonlinear circuit with different periodically excited amplitude)

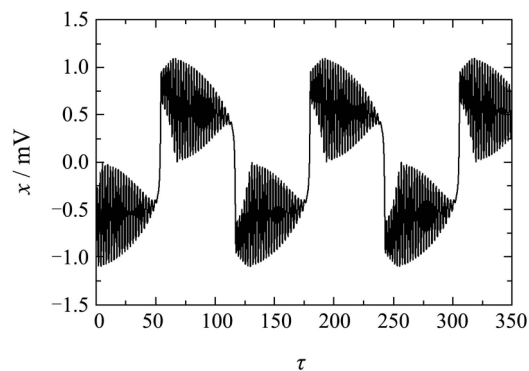
为便于式(4)(5b)外激励系统(下简称为系统)轨线的观察, 取定相对于系统频率较小的激励频率 $\omega = 0.05$. 根据自治系统的分岔分析分别选取相应的幅值进行讨论.

在外激励幅值 $I_G = 3.2$ mA时, 即外激励参数 $w = 0.32 \sin(0.05\tau)$ (图5). 幅值在对应自治系统两个fold分岔点的外侧附近. 图5(a)为时间历程图, 图5(b)为 x - y 平面的相图和对自治系统 x - y 平面的相图的叠加. 从图5(a)显示了系统的快变振荡和慢变振荡的交替, 图5(b)中粗实线为对应自治系统 $w = \pm 0.32$ 时的极限环, 细线为系统的轨线, 可清晰看出系统振荡大部分时间交替在两个极限环内进行, 只在某一时刻从一个极限环跳跃到另一极限环内. 此时对应自

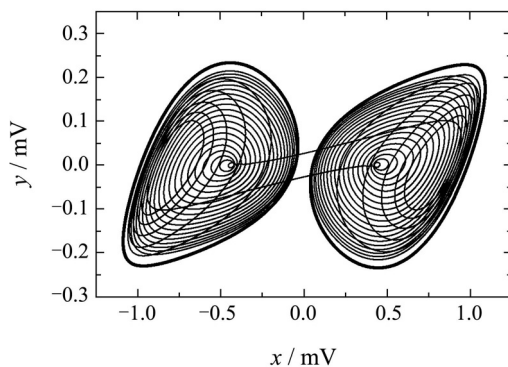
治系统极限环的振荡频率为2.8868. 从图5(a)(b)可以分析得到, 这是一种典型的两时间尺度的快慢现象. 为说明其中的分岔机制, 在此作者引入转换相图的概念, 即将系统轨线转换到 $(x, w) = (x(\tau), A \sin(\theta\tau))$ 平面上即图5(c)振荡曲线部分. 其中图5(c)给出转换相图的运动轨迹和自治系统平衡点分岔图的叠加.

不妨从图5(c)上分支 $w = 0$ 处开始分析. 系统在 $w = 0$ 时, 上分支轨线被稳定的极限环吸引. 随着 w 减少, 因稳定的极限环缩小, 轨线的幅值也逐渐减小. 经过超临界Hopf分岔点H81a时又被稳定的焦点吸引, 轨线迅速减小. 而在fold分岔点L81的左侧, 只有下支稳定的极限环吸引, 故轨线在fold分岔点L81点处产生跳跃, 到达下分支. 由于受下侧稳定的极限环的吸引, 轨线振荡的幅值逐渐增大到极限环附近. 当 w 继续增加, 系统轨线在超临界Hopf分岔点H82a时又被稳定的焦点吸引, 轨线迅速减小. 而在fold分岔点L82的右侧, 只有上支稳定的极限环吸引, 故轨线在fold分岔点L82点处产生跳跃, 到达上分支. 如此往复形成了系统的快慢行为. 注意到在fold分岔点L81, L82跳跃到另一侧的瞬时, 幅值较小是因为跳跃后尽管被另一侧稳定的极限环吸引, 但跳跃前幅值很微小, 故跳跃后不可能有很大的变化.

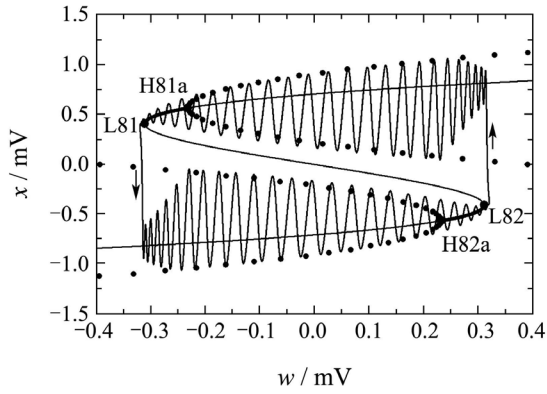
要指出的是图5(c)为系统 w - x 平面的转换相图, 是作者为解释系统快慢行为分岔机制所画的相图. 而图5(a)时间历程图和图5(b) x - y 平面相图才真实的呈现了系统周期振荡和微幅振荡的快慢现象.



(a) 时间历程



(b) x - y 平面的相图和对自治系统相图叠加

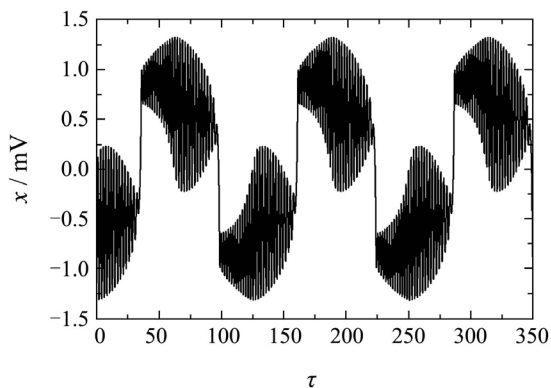


(c) w - x 转换相图和对应自治系统平衡点分岔图叠加

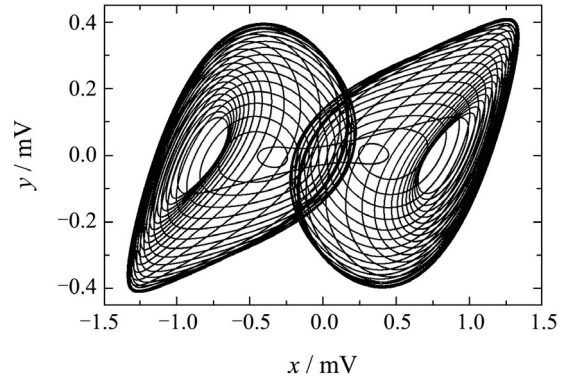
图 5 $A = 0.32, \theta = 0.05$ 时系统的动力学行为
Fig. 5 Dynamic behavior for $A = 0.32, \theta = 0.05$

在外激励幅值 $I_G = 10 \text{ mA}$ 时, 外激励参数 $w = 1.00 \sin(0.05\tau)$ (图6). 幅值在对应自治系统两个亚临界Hopf分岔点的区间. 图6(a)为系统的时间历程图, 图6(b)为系统 x - y 平面的相图和对应 $w = \pm 1.00$ 自治系统极限环(粗实线), $w = \pm 1.00$ 自治系统极限环的振荡频率为3.0555. 图6(c)说明系统Hopf分岔机制. 与幅值 $I_G = 3.2 \text{ mA}$ 不同的是, 图6(c)中因为激励幅值大于fold分岔点区间的变化范围, 轨线在fold分岔点跳跃后出现新的情况. 如 w 继续减少, 轨线在上分支fold分岔点左侧由于只有下分支稳定的极限环吸引, 跳跃到下分支, 但由于激励幅值大于fold分岔点的变化范围, w 继续减少, 轨线则继续振荡, 直到 $w = -1.0$ 处折回. 下侧轨线的运动相似. 此过程中由于受稳定极限环的吸引, 轨线幅值逐渐增大折回后逐渐在稳定极限环附近振荡.

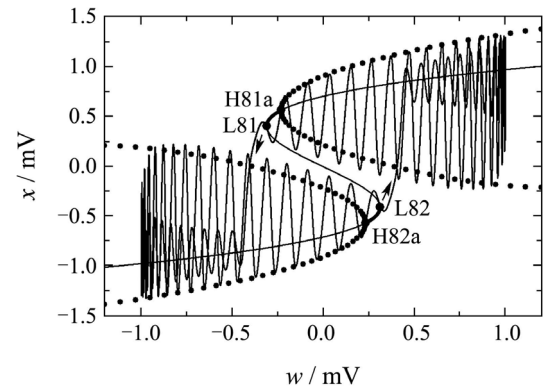
在外激励幅值 $I_G = 25 \text{ mA}$ 时, 外激励参数 $w = 2.50 \sin(0.05\tau)$ (图7). 幅值在对应自治系统大于极限环的折叠分岔点区间. 图7(a)为时间历程图, 图7(b)为 x - y 平面的相图, 图7(c)为系统 w - x 平面的转换相图的运动轨迹和自治系统平衡点分岔图的叠加. 此时对应系统的频率为3.6123.



(a) 时间历程



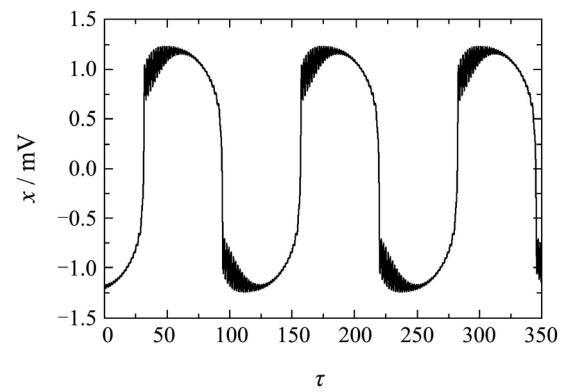
(b) x - y 平面的相图和对应自治系统相图叠加



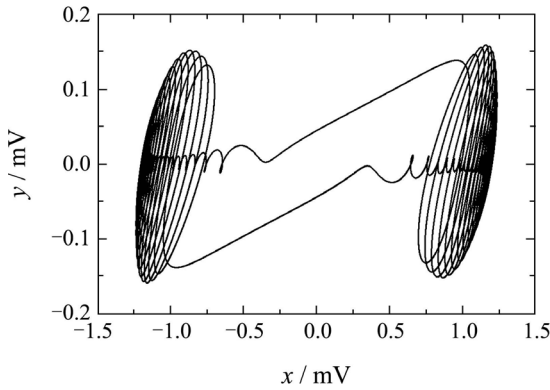
(c) w - x 转换相图和对应自治系统平衡点分岔图叠加

图 6 $A = 1.00, \theta = 0.05$ 时系统的动力学行为
Fig. 6 Dynamic behavior for $A = 1.00, \theta = 0.05$

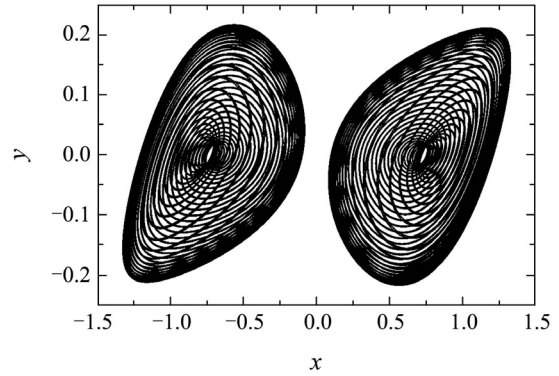
图7(c)说明系统分岔机制, 由于激励幅值大于极限环折叠分岔点LPC1, LPC2的变化范围, 轨线在fold分岔点跳跃后出现不同的情况. 如 w 继续减少, 轨线在上分支fold分岔点左侧只有稳定的极限环吸引, 跳跃到下分支, 但由于激励幅值大于LPC1, LPC2分岔点的变化范围, w 要继续减少, 轨线继续振荡, 直到 $w = -2.5$ 处折回. 此过程中由于主要受稳定的焦点吸引, 轨线幅值逐渐减少折回后几乎是在平衡点附近振荡.



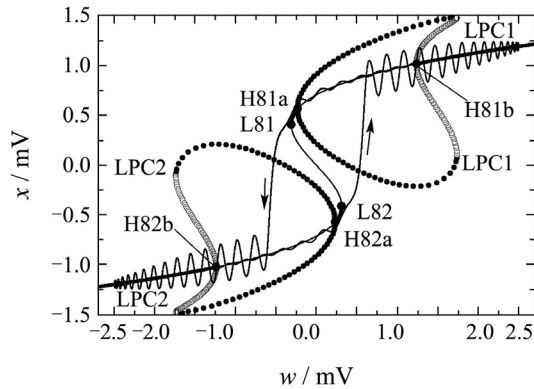
(a) 时间历程



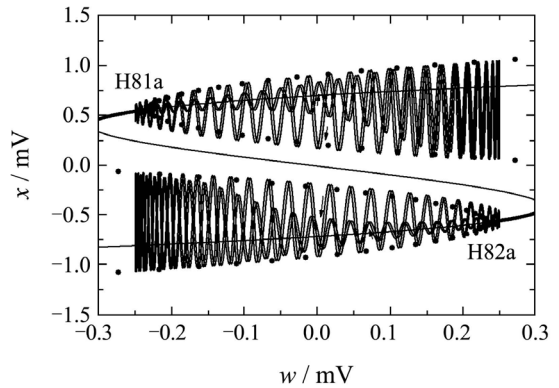
(b) x - y 平面的相图



(b) x - y 平面的相图和对对应自治系统相图叠加



(c) w - x 转换相图和对对应自治系统平衡点分岔图叠加



(c) w - x 转换相图和对对应自治系统平衡点分岔图叠加

图7 $A = 2.50, \theta = 0.05$ 时系统的动力学行为

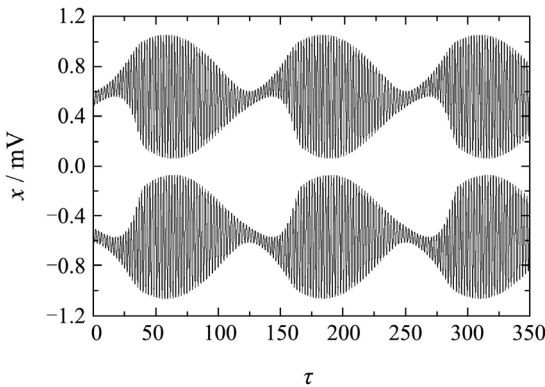
Fig. 7 Dynamic behavior for $A = 2.50, \theta = 0.05$

图8 $A = 0.25, \theta = 0.05$ 时系统的动力学行为

Fig. 8 Dynamic behavior for $A = 0.25, \theta = 0.05$

在外激励幅值 $I_G = 2.5 \text{ mA}$ 时, 外激励参数 $w = \pm 0.25 \sin(0.05\tau)$ (图8). 幅值在对应自治系统两个fold分岔点的区间内. 此时对应自治系统的频率为2.8673.

由图8(c)分析, 上支的轨线, 由于幅值小于LP1, LP2的范围, 即轨线不通过fold分岔点. 不可能跳跃. 只能在同一侧运动. 注意到上支轨线当 w 增大时, 轨线振荡幅值受稳定极限环吸引逐渐增大, 折回后(w 减小)沿极限环幅值变化. 如此往复形成了系统的快慢行为. 但注意到这种轨线在折回时出现不重复的现象.



(a) 时间历程

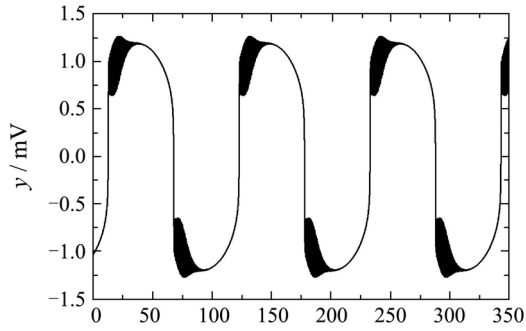
从上面看到, 在一定的激励频率下, 系统中不同的激励幅值有着不同的快慢行为. 而这些不同的快慢行为与系统对应的自治系统的分岔紧密关联, 且是有fold和Hopf簇发引起的.

4.2 不同激励频率下的快慢行为和分岔机制 (Fast-slow behavior as well as bifurcation mechanism in nonlinear circuit with different periodically excited frequency)

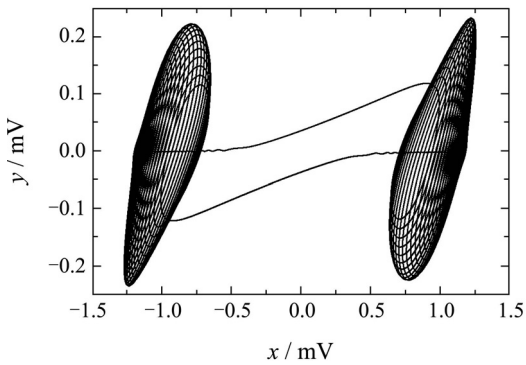
图9是激励幅值为2.5, 激励频率为0.02时系统的时间历程, 系统轨线和转换相图. 图9(c)与图7比较, 同样的幅值, 当激励频率愈小, 轨线受稳定的极限环吸引愈大. 在图9(c)中轨线的振荡幅值变化与极限环幅值变化的趋势相同. 这一点同样在 $w = 1.5$ 得到验证(图10). 注意到该幅值在亚临界Hopf分岔点和极限环的折叠分岔点之间. 从图10和图11可以看出, 当 $w = 1.5$ 时对应自治系统稳定周期解的频率为3.1916, 轨线同时被稳定极限环和稳定焦点的吸引. 当激励频率较大时(图10c), 系统处于不稳定的状态. 当激励频率较小时(图11c), 快慢效应越明显. 这说明系统的幅值受稳定极限环的影响要大.

这里通过使用恒流源作用下自治系统的分岔分析和转换相图研究方法有效的解释了非自治系统簇

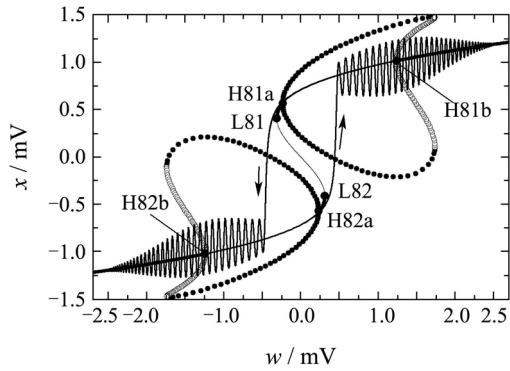
发现现象的产生机制, 这为探讨非自治系统的动力学行为和控制提供了途径.



(a) 时间历程

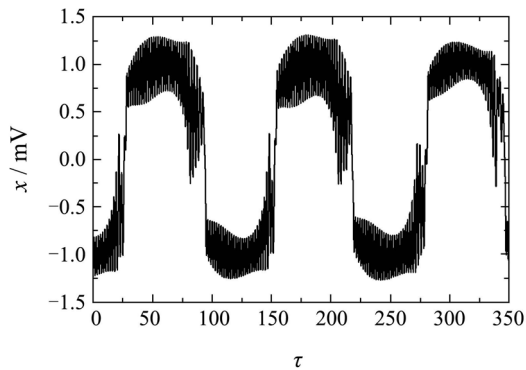


(b) x - y 平面的相图

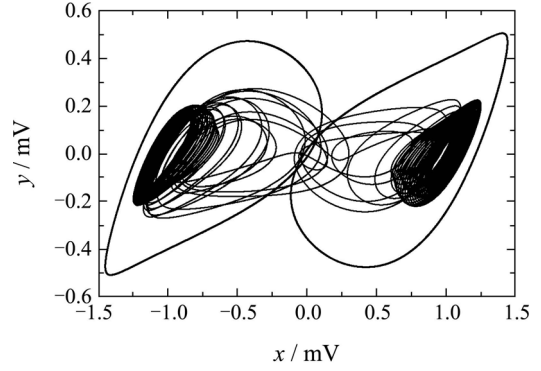


(c) w - x 转换相图和对应自治系统平衡点分岔图叠加

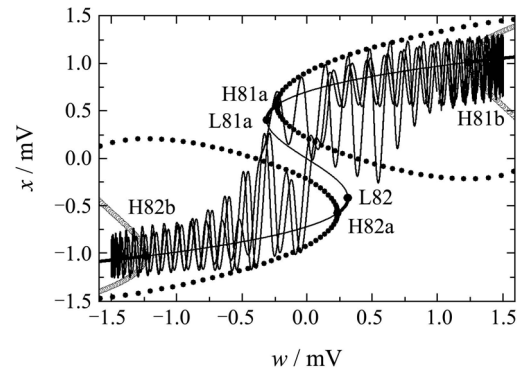
图 9 $A = 2.50, \theta = 0.02$ 时系统的动力学行为
Fig. 9 Dynamic behavior for $A = 2.50, \theta = 0.02$



(a) 时间历程

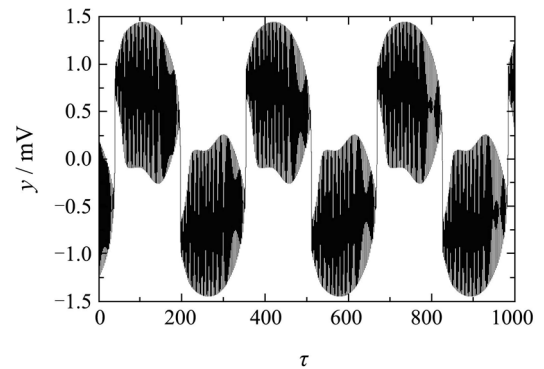


(b) x - y 平面的相图和对应自治系统相图叠加

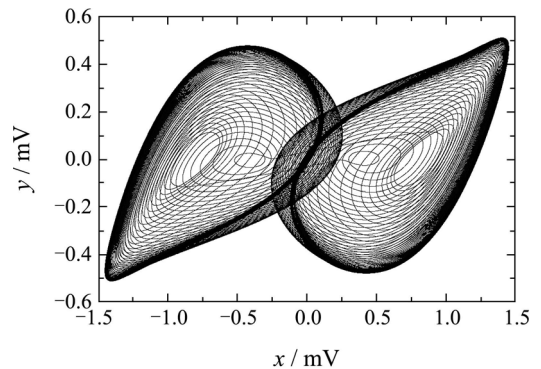


(c) w - x 转换相图和对应自治系统平衡点分岔图叠加

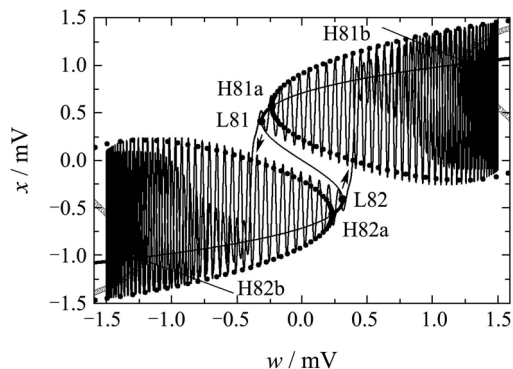
图 10 $A = 1.50, \theta = 0.05$ 时系统的动力学行为
Fig. 10 Dynamic behavior for $A = 1.50, \theta = 0.05$



(a) 时间历程



(b) x - y 平面的相图和对应自治系统相图叠加



(c) w - x 转换相图和对应自治系统平衡点分岔图叠加

图 11 $A = 1.50, \theta = 0.02$ 时系统的动力学行为

Fig. 11 Dynamic behavior for $A = 1.50, \theta = 0.02$

5 结论(Conclusions)

选取合适的参数, 周期激励下的非线性电路可以具有快慢效应. 恒流源作用下的自治系统在一定条件下可能出现fold及Hopf两种分岔行为, 而第一Lyapunov系数可以进一步给出其中的Hopf分岔类型. 这两种分岔模式连接着系统的快慢过程, 从而导致fold-Hopf簇发. 同时, 由快变振荡与对应自治系统Hopf分岔产生的极限环在振动幅值上基本接近, 说明慢变周期激励下系统在快过程中呈现出一定的准静态特征. 同时与系统的频率相比, 激励频率越小, 幅值相同的系统快慢效应越明显.

参考文献(References):

- [1] JI Y, BI Q S. Bursting behavior in a non-smooth electric circuit[J]. *Physics Letters A*, 2010, 374(13/4): 1434 – 1439.
- [2] IZHIKEVICH E M. Neural excitability, spiking and bursting[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2000, 10(6): 1171 – 1266.
- [3] 韩修静, 姜波, 毕勤胜. 快慢型超混沌Lorenz系统分析[J]. *物理学报*, 2009, 58(9): 6006 – 6015.
(HAN Xiujing, JIANG Bo, BI Qinsheng. Analysis of the fast-slow hyperchaotic Lorenz system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(9): 6006 – 6015.)
- [4] YANG Z Q, LU Q S, GU H G, et al. GWN-induced bursting, spiking and random sub threshold impulsing oscillation before Hopf bifurca-

- tion in the Chay model[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, 14(12): 4143 – 4159.
- [5] SILVANO C, SIMONA D S. Complex dynamical behaviours in two non-linearly coupled Chua's circuits[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, 21(3): 633 – 641.
- [6] GÁMEZ-GUZMÁN L, CRUZ-HERNÁNDEZ C, LÓPEZ-GUTIÉRREZ R M, et al. Synchronization of Chua's circuits with multi-scroll attractors: application to communication[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, 14(6): 2765 – 2775.
- [7] LIAO T L, TSAI S H. Adaptive synchronization of chaotic systems and its application to secure communications[J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2000, 11(9): 1387 – 1396.
- [8] GAO T G, CHEN G R, CHEN Z Q, et al. The generation and circuit implementation of a new hyper-chaos based upon Lorenz system[J]. *Physics Letters A*, 2007, 361(1/2): 78 – 86.
- [9] CHEN Z Y, ZHANG X F, BI Q S. Bifurcations and chaos of coupled electrical circuits[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2008, 9(3): 1158 – 1168.
- [10] LÜ J H, CHEN G R. Generating multiscroll chaotic attractors: theories, methods and applications[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2006, 16(4): 775 – 858.
- [11] DE ABREU-GARCIA J A, HARTLEY T T. Matrix integrators for real-time simulation of singular systems[C]//*Proceedings of the 1989 American Control Conference*. New York: IEEE, 1989: 417 – 418.
- [12] ZHONG G Q. Implementation of Chua's circuit with a cubic nonlinearity[J]. *IEEE Transactions on Circuits & Systems I-Fundamental Theory & Applications*, 1994, 41(12): 934 – 941.
- [13] SUN H J, CAO H J. Chaos control and synchronization of a modified chaotic system[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2008, 37(5): 1442 – 1455.
- [14] 陈章耀, 张晓芳, 毕勤胜. 广义蔡氏电路簇发现象及其分岔机制[J]. *物理学报*, 2010, 59(4): 0112 – 0119.
(CHEN Zhangyao, ZHANG Xiaofang, BI Qinsheng. Bursting phenomena as well as the bifurcation mechanism in generalized Chua's circuit[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, 59(4): 0112 – 0119.)
- [15] KUZNETSOV Y A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*[M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1998.

作者简介:

陈章耀 (1960—), 男, 副教授, 博士, 目前主要研究方向为非线性理论与应用、动力学与控制, E-mail: zychen@ujs.edu.cn;

毕勤胜 (1968—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为一般力学、动力学与控制, E-mail: qbi@ujs.edu.cn.