

两类 B 样条模糊系统及其应用

谭彦华^{1,2}, 李洪兴¹, 许吉祥^{1,3}

(1. 大连理工大学 电子信息与电气工程学部, 辽宁 大连 116024; 2. 河北工业大学 理学院, 天津 300130;

3. 辽宁石油化工大学 理学院, 辽宁 抚顺 113001)

摘要: 能够同时逼近函数及其导函数的模糊系统在实际应用中具有重要意义. 本文利用 B 样条函数作为推理前件, 得到了两类能够同时逼近函数及其导函数的 B 样条模糊系统. 其中第一类 B 样条模糊系统是插值系统且对函数及其一阶导函数分别具有二阶和一阶逼近精度, 第二类 B 样条模糊系统是拟插值系统且对函数及其一阶、二阶导函数均具有二阶逼近精度. 最后, 将这两类模糊系统应用到一级倒立摆的稳定控制中, 仿真结果表明利用这两类模糊系统设计的控制器是可行的, 且具有一定的鲁棒性.

关键词: B 样条; 模糊系统; 逼近精度; 模糊控制; 泛逼近性

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Two classes of B -spline fuzzy systems and their applications

TAN Yan-hua^{1,2}, LI Hong-xing¹, XU Ji-xiang^{1,3}

(1. Faculty of Electronics Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116024, China;

2. School of Sciences, Hebei University of Technology, Tianjin 300130, China;

3. School of Sciences, Liaoning Shihua University, Fushun Liaoning 113001, China)

Abstract: Fuzzy systems that approximate a given function and its derivatives play an important role in applications. Two classes of B -spline fuzzy systems that employ B -spline functions as the if-part sets are presented. They are universal approximators for a given function and its derivatives. Especially, the first class of B -spline fuzzy systems with the interpolation condition can approximate a function and its derivative respectively with the 2nd order accuracy and the 1st order accuracy in the approximation. The second class of B -spline fuzzy systems with the quasi-interpolation condition can approximate a function and its first and second derivatives with the 2nd order accuracy for all. Finally, a controller based on the two fuzzy systems is designed to realize the stability for a 1st order single inverted pendulum. The simulation results demonstrate the effectiveness and robustness of the controller based on the proposed fuzzy systems.

Key words: B -spline; fuzzy systems; approximation accuracy; fuzzy control; universal approximation

1 引言(Introduction)

1965年, Zadeh提出了模糊集的概念, 标志着模糊数学的诞生. 40多年来, 模糊系统理论在控制、医学及信号处理等方面都取得了成功的应用^[1]. 这与模糊系统理论的深入研究是密不可分的. 其中模糊系统的泛逼近性一直是学者关注的主要论题^[2~6]. 直到2010年, 文献[7]仍指出具有泛逼近性是模糊系统的优点. 泛逼近性是指模糊系统能逼近连续函数到任意指定的精度. 自1990年以来, 众多学者从不同角度对泛逼近性进行了深入而系统的讨论. 大多数文献采用三角形的、高斯型的和伪梯形的模糊集^[4~6]作为模糊系统的推理前件来考察模糊系统对函数的逼近能力. 特别地, 文献[8,9]指出能够同时逼近函数和导函数的模糊系统的重要性, 并构造了这

样的系统.

由于样条函数具有良好的逼近性能, 1991年, 文献[10]将样条函数应用到了模糊控制系统中. 但是文中并没有讨论其泛逼近性. 1996年, 文献[11]指出了 B 样条函数作为推理前件的模糊系统的泛逼近性, 但是没有给出后件参数的确定方法. 对于 B 样条模糊系统中后件参数的辨识及边界问题, 文献[12,13]利用虚拟边界点增加规则数目处理边界问题, 通过有监督的学习调整系统的参数, 并将其应用到一级倒立摆的稳定控制中. 然而, 文中并没有给出边界处理的理论依据. 2009年, 文献[14]将样条函数应用到稀疏规则的模糊插值推理系统中, 但只是利用样条函数计算得出后件的特征点, 并没有利用样条函数良好的逼近性能.

收稿日期: 2010-07-13; 收修稿日期: 2011-01-03.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61074044, 61104038, 60834004); 高校博士点基金资助项目(20090041110003); 国家“863”高技术计划资助项目(2006AA04Z163); 国家“973”计划资助项目(2009CB320602, 2002CB312200).

本文将样条函数应用到模糊系统的构造中,给出了两类B样条模糊系统.首先,利用线性外推的方法将已知数据集两端分别向外扩展一个数据点,得到一个外推的数据集,并利用它构造推理规则进行推理得到第一类B样条模糊系统.接着,按照插值的要求确定了系统的参数,从而表明第一类B样条模糊系统是插值系统^[15].随后,证明了这类模糊系统对函数及其一阶导函数分别具有二阶和一阶逼近精度.其次,直接利用已知数据集构造推理规则得到第二类B样条模糊系统.整体上,这一系统是有理样条函数.事实上,它只在两端子区间是有理函数,而在内部子区间是三次样条函数且不满足插值性质.但这却从根本上改善了其逼近性质,本文证明了这一模糊系统对函数及其一阶、二阶导函数均具有二阶逼近精度.最后,本文利用上面两类B样条模糊系统,为实现一级倒立摆的稳定控制设计了具有二阶光滑性的控制器.文献[16]指出许多简化的模糊控制策略是以失去鲁棒性为代价的.本文特别对控制器的鲁棒性能进行考察.仿真结果表明了利用这两类模糊系统设计的控制器具有一定的鲁棒性.

2 准备知识(Preliminaries)

定义1^[17] 设在 $[a, b]$ 区间上给定一个划分

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

$[a, b]$ 上的一个函数 $s(x)$ 称为3次样条函数,如果它满足下列条件:

1) 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \cdots, n$)上 $s(x)$ 是3次多项式;

2) 在整个区间 $[a, b]$ 上, $s(x)$ 为二阶连续可导的函数,即在点 x_i ($i = 1, 2, \cdots, n-1$)处成立

$$s^{(k)}(x_i - 0) = s^{(k)}(x_i + 0), \quad k = 0, 1, 2,$$

x_i ($i = 0, 1, \cdots, n$)称为 $s(x)$ 的节点.

在给定一组有序数列 y_i ($i = 0, 1, \cdots, n$)后,如果 $s(x)$ 再满足:

3) $s(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, \cdots, n$), 则称 $s(x)$ 为插值3次样条函数.

区间 $[a, b]$ 上对于划分 Δ 的3次样条函数空间记为 $\text{span}(\Delta, 3)$.

为了确定插值3次样条函数的表达式,按照具体问题的物理要求在区间 $[a, b]$ 两端给出的约束条件称为边界条件.

这里给出两个类型的边界条件:

1) 给定边界的斜率 $s'(x_0) = y'_0, s'(x_n) = y'_n$.

2) 给定边界的二阶导数 $s''(x_0) = y''_0, s''(x_n) = y''_n$.

定理1^[17] 已知函数 $f \in C^4[a, b]$ 及 $[a, b]$ 上的一个划分 Δ . 设 $s(x) \in \text{span}(\Delta, 3)$ 是关于 $f(x)$ 的带

有1)型或2)型边界条件的插值3次样条函数,则有误差估计

$$\|(f - s)^{(r)}\|_{\infty} \leq C_r \|f^{(4)}\|_{\infty} h^{4-r}, \quad r = 0, 1, 2, 3,$$

其中: $\|\cdot\|_{\infty}$ 是最大值范数, $C_0 = \frac{5}{384}, C_1 = \frac{1}{24}, C_2 = \frac{3}{8}, C_3 = \frac{\beta + \beta^{-1}}{2}, h_i = x_{i+1} - x_i, i = 0, 1, \cdots, n-1, h = \max_i h_i, \beta = \frac{\max_i h_i}{\min_i h_i}$ 是分割比,并且系数 C_0, C_1 是最优的估计.

定义2^[18] 函数

$$\Omega_3(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 2, \\ \frac{1}{2}|x|^3 - x^2 + \frac{2}{3}, & |x| \leq 1, \\ -\frac{1}{6}|x|^3 + x^2 - 2|x| + \frac{4}{3}, & 1 < |x| < 2 \end{cases}$$

称为均匀3次B样条函数.

如不特别声明,本文总假设数据集为

$$\{(x_i, y_i) | i = 0, 1, \cdots, n\},$$

其中: $x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \cdots, n, h = \frac{b-a}{n}, x_0 = a, x_n = b$. 此时对应区间 $[a, b]$ 的划分为 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

3 第一类B样条模糊系统及其逼近性质(The first class of B-spline fuzzy systems and their approximation properties)

众所周知,在实际应用中,一般采用单点模糊化、CRI推理方法、乘积推理机、中心平均解模糊化方法构造Mamdani模糊系统.这样的模糊系统是推理前件的表达式,从而模糊系统的逼近性质与推理前件密切相关.从函数逼近论的角度看,样条函数具有能够同时逼近函数及其导函数的优点,而B样条函数是样条函数空间的基.不失一般性,本文选择均匀3次B样条函数作为推理前件.

由文献[17]知,确定插值样条函数表达式时,除了有内点条件外,还要有边界条件.这是由样条函数本身的特性决定的.事实上,区间 $[a, b]$ 上对于划分 Δ 的3次样条函数空间 $\text{span}(\Delta, 3)$ 的维数是 $n+3$.因此,要得到样条函数空间 $\text{span}(\Delta, 3)$ 中函数的表达式,就需要 $n+3$ 个条件.而在模糊推理的情形下,边界条件是不容易获得的,且已知的数据集只有 $n+1$ 个点,也即只有 $n+1$ 个条件.此时,要用样条函数来表示模糊系统,就需要对已知数据集的边界进行处理.本文采用如下处理方法:在数据集中添加两个点 $(x_{-1}, y_{-1}), (x_{n+1}, y_{n+1})$, 其中:

$$x_{-1} = x_0 - h, \quad x_{n+1} = x_0 + (n+1)h,$$

$$y_{-1} = 2y_0 - y_1, \quad y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1}$$

是线性外推的结果.

取 $A_i(x) = \Omega_3(\frac{x-x_i}{h})$, $i = -1, 0, \dots, n+1$, 构造 $n+3$ 条推理规则如下:

If x is A_i , then y is B_i , $i = -1, 0, \dots, n+1$.

文献[4]指出, 作为推理后件的模糊集在最终推理结果中只出现其峰点而与其形状关系不大, 故只需假设后件 B_i 的峰点为 u_i , 而对其形状不做要求. 利用单点模糊化、乘积推理机、中心平均解模糊化得到第一类B样条模糊系统:

$$(S1): F_1(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} A_i(x)u_i. \quad (1)$$

令 $U = (u_{-1}, u_0, \dots, u_{n+1})^T$, 将外推的数据集直接代入, 解方程组 $F_1(x_i) = y_i$, $i = -1, 0, \dots, n+1$, 即可确定 U . 由文献[15]知, 系统(S1)是插值系统.

为了分析系统(S1)的逼近性质, 给出如下引理.

引理 1 设

$$L(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \Omega_3(\frac{x-x_0}{h} - i), \quad (2)$$

其中: $i \geq 0$ 时, $c_i = \sqrt{3}(-2 + \sqrt{3})^i$, $i < 0$ 时, $c_i = c_{-i}$. 令 $L_j(x) = L(x - hj)$, $j = -1, 0, \dots, n+1$, 则 $\{L_j(x)|j = -1, 0, \dots, n+1\}$ 与 $\{A_j(x)|j = -1, 0, \dots, n+1\}$ 都能作为区间 $[a, b]$ 上对于划分 Δ 的 3 次样条函数空间 $\text{span}(\Delta, 3)$ 的基.

证 由文献[18]知, $\{A_j(x)|j = -1, 0, \dots, n+1\}$ 是函数空间 $\text{span}(\Delta, 3)$ 的基. 只需证明 $\{L_j(x)|j = -1, 0, \dots, n+1\}$ 与 $\{A_j(x)|j = -1, 0, \dots, n+1\}$ 等价即可. 容易看出

$$(L_{-1}(x), \dots, L_{n+1}(x))^T = C(\Omega_3(\frac{x-x_0}{h} + 1), \dots, \Omega_3(\frac{x-x_0}{h} - n - 1))^T, \quad (3)$$

其中

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+2} \\ c_1 & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n+1} & c_n & \cdots & c_0 & c_1 \\ c_{n+2} & c_{n+1} & \cdots & c_1 & c_0 \end{pmatrix}.$$

若 C 可逆, 则二者等价. 而 C 可逆 $\Leftrightarrow \det(C) > 0$.

下证 $\det(C) > 0$. 令 $\alpha = -2 + \sqrt{3}$, 则

$$\det(C) = (\sqrt{3})^{n+3} \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \cdots & \alpha^{n+1} & \alpha^{n+2} \\ \alpha & 1 & \alpha & \cdots & \alpha^n & \alpha^{n+1} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 & \cdots & \alpha^{n-1} & \alpha^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha^{n+1} & \alpha^n & \alpha^{n-1} & \cdots & 1 & \alpha \\ \alpha^{n+2} & \alpha^{n+1} & \alpha^n & \cdots & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

将上式右端行列式第 $n+2$ 行乘以 $-\alpha$ 加到 $n+3$ 行,

第 $n+1$ 行乘以 $-\alpha$ 加到 $n+2$ 行, $\dots$, 第 1 行乘以 $-\alpha$ 加到 2 行, 可知 $\det(C) > 0$. 故二者等价. 证毕.

定理 2 若数据集来自函数 $y = f(x)$ 且 $f \in C^4[a, b]$, 则 $R_1(x) \triangleq f(x) - F_1(x)$ 满足

$$\|R_1^{(r)}\|_{\infty} \leq C_r h^{4-r} \|f^{(4)}\|_{\infty} + D_r M h^{2-r}, \quad r=0, 1, 2,$$

其中:

$$C_0 = \frac{5}{384}, \quad C_1 = \frac{1}{24}, \quad C_2 = \frac{3}{8}, \quad D_0 = 2,$$

$$D_1 = \frac{12(2\sqrt{3}-1)}{11}, \quad D_2 = 12(2\sqrt{3}-1),$$

$$M = \max\{\max_{x \in [x_{-1}, x_{n+1}]} |s''(x)|, \max_{x \in [x_0, x_n]} |f''(x)|\}.$$

证 由引理 1 知,

$$F_1(x) = \sum_{j=-1}^{n+1} A_j(x)u_j =$$

$$(\Omega_3(\frac{x-x_{-1}}{h}), \dots, \Omega_3(\frac{x-x_{n+1}}{h})) \begin{pmatrix} u_{-1} \\ \vdots \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = (L_{-1}(x), \dots, L_{n+1}(x)) C^{-1} \begin{pmatrix} u_{-1} \\ \vdots \\ u_{n+1} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

由于 $F_1(x_i) = y_i$, $L_i(x_j) = \delta_{ij}$, 故

$$C^{-1}(u_{-1}, \dots, u_{n+1})^T = (y_{-1}, \dots, y_{n+1})^T,$$

从而

$$F_1(x) = \sum_{j=-1}^{n+1} A_j(x)u_j = \sum_{j=-1}^{n+1} L_j(x)y_j.$$

由文献[18]知, 满足 1) 型边界条件的插值 3 次样条函数 $s(x) = \sum_{j=-1}^{n+1} L_j(x)\hat{y}_j$, 且 $\hat{y}_i = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. 但是 $\hat{y}_{-1} \neq y_{-1}$, $\hat{y}_{n+1} \neq y_{n+1}$. 故

$$\begin{aligned} |F_1(x) - s(x)| &= |(y_{-1} - \hat{y}_{-1})L_{-1}(x) + (y_{n+1} - \hat{y}_{n+1})L_{n+1}(x)| \leq \\ &|y_{-1} - \hat{y}_{-1}||L_{-1}(x)| + |y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}||L_{n+1}(x)| \leq \\ &|y_{-1} - \hat{y}_{-1}| + |y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}|, \end{aligned}$$

即 $\|F_1 - s\|_{\infty} \leq |y_{-1} - \hat{y}_{-1}| + |y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}|$. 下面考察 $|y_{-1} - \hat{y}_{-1}|$. 在 $[x_{-1}, x_0]$ 内,

$$s(x) = s(x_0) + s'(x_0)(x - x_0) + s''(\xi) \frac{(x - x_0)^2}{2!},$$

从而 $\hat{y}_{-1} = s(x_{-1}) = y_0 - y'_0 h + s''(\xi_1) \frac{h^2}{2!}$, 而

$$y_{-1} = 2y_0 - y_1 =$$

$$2y_0 - (y_0 + y'_0 h + f''(\xi_2) \frac{h^2}{2!}) =$$

$$y_0 - y'_0 h - f''(\xi_2) \frac{h^2}{2!}.$$

故 $|y_{-1} - \hat{y}_{-1}| \leq |s''(\xi_1) + f''(\xi_2)| \frac{h^2}{2} \leq Mh^2$.

同理可证 $|y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}| \leq Mh^2$. 又由于

$$\begin{aligned} |F'_1(x) - s'(x)| &= \\ |(y_{-1} - \hat{y}_{-1})L'_{-1}(x) + (y_{n+1} - \hat{y}_{n+1})L'_{n+1}(x)| &\leq \\ |y_{-1} - \hat{y}_{-1}||L'_{-1}(x)| + |y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}||L'_{n+1}(x)|, \\ |F''_1(x) - s''(x)| &= \\ |(y_{-1} - \hat{y}_{-1})L''_{-1}(x) + (y_{n+1} - \hat{y}_{n+1})L''_{n+1}(x)| &\leq \\ |y_{-1} - \hat{y}_{-1}||L''_{-1}(x)| + |y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}||L''_{n+1}(x)|. \end{aligned}$$

由 $L(x)$ 的性质知,

$$\begin{aligned} \|L'_{-1}\|_\infty &= \|L'_{n+1}\|_\infty = \|L'\|_\infty = \frac{1}{h} \frac{6}{11} (2\sqrt{3} - 1), \\ \|L''_{-1}\|_\infty &= \|L''_{n+1}\|_\infty = \|L''\|_\infty = \frac{6}{h^2} (\sqrt{3} - 1). \end{aligned}$$

再由定理1, 有

$$\begin{aligned} \|F_1 - f\|_\infty &\leq \|F_1 - s\|_\infty + \|s - f\|_\infty \leq \\ 2Mh^2 + \frac{5}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_\infty, \\ \|F'_1 - f'\|_\infty &\leq \|F'_1 - s'\|_\infty + \|s' - f'\|_\infty \leq \\ \frac{12}{11} (2\sqrt{3} - 1) Mh + \frac{1}{24} h^3 \|f^{(4)}\|_\infty, \\ \|F''_1 - f''\|_\infty &\leq \|F''_1 - s''\|_\infty + \|s'' - f''\|_\infty \leq \\ 12(\sqrt{3} - 1) M + \frac{3}{8} h^2 \|f^{(4)}\|_\infty. \end{aligned}$$

结论得证. 证毕.

4 第二类B样条模糊系统及其逼近性质(The second class of B-spline fuzzy systems and their approximation properties)

前面, 本文利用外推的数据集得到了具有插值性质的第一类B样条模糊系统. 事实上, 在构造模糊系统时, 一般并不对数据集进行处理. 于是, 自然考虑可以直接利用数据集构造模糊系统.

取 $A_i(x) = \Omega_3(\frac{x-x_i}{h})$, $i = 0, 1, \dots, n$, 构造 $n+1$ 条推理规则如下:

If x is A_i , then y is B_i , $i = 0, 1, \dots, n$.

其中 B_i 的峰点为 y_i . 利用单点模糊化, 乘积推理机, 中心平均解模糊化得到第二类B样条模糊系统:

$$(S2): F_2(x) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{A_i(x)}{\sum_{j=0}^n A_j(x)} \right) y_i. \quad (5)$$

此时, 由于 A_i 是样条函数, 从而系统(S2)整体上是具有有理样条函数. 但是 $\frac{A_i(x)}{\sum_{j=0}^n A_j(x)}$ 不满足 Kronecker 性

质, 由文[15]知, 系统(S2)是拟插值系统. 下面分析系统(S2)的逼近性质.

引理2 设 $A_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$ 为如上的3次样条函数, 则对任意的 $i = 1, 2, \dots, n-2$ 有

$$\begin{aligned} A_{i-1}(x) + A_i(x) + A_{i+1}(x) + A_{i+2}(x) &= 1, \\ A_{i-1}(x) - A_{i+1}(x) - 2A_{i+2}(x) &= -\frac{x-x_i}{h}, \\ A_{i-1}(x) + A_{i+1}(x) + 4A_{i+2}(x) &= \\ \frac{(x-x_i)^2}{h^2} + \frac{1}{3}, \\ A'_{i-1}(x) + A'_{i+1}(x) + 4A'_{i+2}(x) &= \frac{2(x-x_i)}{h^2}, \\ |A'_{i-1}(x)| + |A'_{i+1}(x)| + 8|A'_{i+2}(x)| &= \\ \frac{3(x-x_i)^2}{h^3} + \frac{1}{h}, \\ A''_{i-1}(x) - A''_{i+1}(x) - 8A''_{i+2}(x) &= -\frac{6(x-x_i)}{h^3}, \\ |A''_{i-1}(x)| + |A''_{i+1}(x)| + 8|A''_{i+2}(x)| &\leq 18. \end{aligned}$$

证 略.

由引理2知, 当 $x \in [x_0, x_1]$ 时,

$$F_2(x) = \frac{A_0(x)y_0 + A_1(x)y_1 + A_2(x)y_2}{A_0(x) + A_1(x) + A_2(x)};$$

当 $x \in [x_{n-1}, x_n]$ 时,

$$F_2(x) = \frac{A_{n-2}(x)y_{n-2} + A_{n-1}(x)y_{n-1} + A_n(x)y_n}{A_{n-2}(x) + A_{n-1}(x) + A_n(x)};$$

当 $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ 时,

$$A_{i-1}(x) + A_i(x) + A_{i+1}(x) + A_{i+2}(x) = 1,$$

从而

$$\begin{aligned} F_2(x) &= A_{i-1}(x)y_{i-1} + A_i(x)y_i + \\ &A_{i+1}(x)y_{i+1} + A_{i+2}(x)y_{i+2}. \end{aligned}$$

也即系统(S2)在两端子区间 $[x_0, x_1]$ 和 $[x_{n-1}, x_n]$ 上是有理函数, 在内部子区间 $[x_1, x_{n-1}]$ 上是3次样条函数.

系统(S2)的逼近结果如下:

定理3 若数据来自函数 $y = f(x)$, 且 $f \in C^4[a, b]$, 则 $R_2(x) \triangleq f(x) - F_2(x)$ 满足

$$\max_{x \in [x_1, x_{n-1}]} |R_2^{(r)}(x)| \leq C_r M_r h^2, \quad (6)$$

其中:

$$C_0 = C_1 = \frac{7}{6}, \quad C_2 = \frac{5}{4},$$

$$M_r = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(r+2)}(x)|, \quad r = 0, 1, 2.$$

证 $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, n-1$,

$$\begin{aligned} F_2(x) &= A_{i-1}(x)y_{i-1} + A_i(x)y_i + \\ &A_{i+1}(x)y_{i+1} + A_{i+2}(x)y_{i+2}, \end{aligned}$$

此时,

$$\begin{aligned} y_{i-1} &= f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(\xi_1)h^2}{2}, \\ y_{i+1} &= f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(\xi_2)h^2}{2}, \\ y_{i+2} &= f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)2h + \frac{f''(\xi_3)2h^2}{2}, \\ f(x) &= f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{f''(\xi)(x - x_i)^2}{2}, \end{aligned}$$

其中: $\xi, \xi_2 \in (x_i, x_{i+1})$, $\xi_1 \in (x_{i-1}, x_i)$, $\xi_3 \in (x_i, x_{i+2})$, 从而

$$\begin{aligned} &|f(x) - F_2(x)| = \\ &|f(x_i)(1 - (A_{i-1}(x) + A_i(x) + A_{i+1}(x) + \\ &A_{i+2}(x))) + f'(x_i)(x - x_i + A_{i-1}(x)h - \\ &A_{i+1}(x)h - 2A_{i+2}(x)h) + f''(\xi)\frac{(x - x_i)^2}{2} - \\ &f''(\xi_1)A_{i-1}(x)\frac{h^2}{2} - f''(\xi_2)A_{i+1}(x)\frac{h^2}{2} - \\ &f''(\xi_3)A_{i+2}(x)2h^2| \leq \\ &M_0|\frac{(x - x_i)^2}{2} + A_{i-1}(x)\frac{h^2}{2} + \\ &A_{i+1}(x)\frac{h^2}{2} + A_{i+2}(x)2h^2| \leq \frac{7M_0h^2}{6}. \end{aligned}$$

证毕.

其他两种情形同理可证.

5 应用(The application)

模糊系统的一个重要应用就是设计模糊控制器实现系统稳定控制. 而倒立摆仿真或实物控制实验是控制领域中用来检验某种控制理论或方法的典型方案^[19]. 下面利用本文构造的两类B样条模糊系统设计控制器来实现一级倒立摆的稳定控制, 进而检验这两类系统的可行性. 一级倒立摆主要由小车、摆杆组成, 它们之间自由链接. 小车可以在水平导轨上左右移动, 摆杆可以在铅锤平面内运动, 将其置于坐标系后如图1所示.

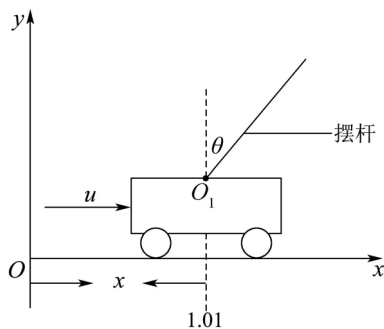


图 1 一级倒立摆简化模型

Fig. 1 A simplified model of the single inverted pendulum

规定顺时针方向的转角和力矩均为正, 并约定以下记号: u 为外界作用力, x 为小车位移, θ 为摆杆与

铅锤线方向的夹角, O_1 为摆杆的链接点位置, m_0 为小车的质量, m_1 为摆杆的质量, J_1 为摆杆绕其质心的转动惯量, l_1 为 O_1 到摆杆的质心的距离, f_0 为小车与导轨间的滑动摩擦系数, f_1 为摆杆绕 O_1 的转动摩擦阻力矩系数. 一级倒立摆的数学模型为

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \cos \theta \\ a_1 \cos \theta & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_0 & a_1 \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & -f_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ a_1 g \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (7)$$

其中:

$$a_0 = m_0 + m_1, \quad a_1 = m_1 l_1, \quad b_1 = J_1 + m_1 l_1^2.$$

基于角度的模糊控制规则见表1.

表 1 基于角度的模糊控制规则

Table 1 Fuzzy control rules based on the angles

θ/rad	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6
u/N	-35	-30	-12	0	12	30	35

对于模糊系统来说, 上面的表即为构造系统的已知数据集. 从而可构造两个模糊控制器如下:

$$\begin{aligned} u_1(\theta(t)) &= -52.3346\Omega_3\left(\frac{\theta(t) + 0.8}{0.2}\right) - \\ &30.6598\Omega_3\left(\frac{\theta(t) + 0.6}{0.2}\right) - \\ &35.0237\Omega_3\left(\frac{\theta(t) + 0.4}{0.2}\right) - \\ &9.2439\Omega_3\left(\frac{\theta(t) + 0.2}{0.2}\right) + \\ &9.2439\Omega_3\left(\frac{\theta(t) - 0.2}{0.2}\right) + \\ &35.0237\Omega_3\left(\frac{\theta(t) - 0.4}{0.2}\right) + \\ &30.6598\Omega_3\left(\frac{\theta(t) - 0.6}{0.2}\right) + \\ &52.3346\Omega_3\left(\frac{\theta(t) - 0.8}{0.2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(\theta(t)) &= \\ &\frac{1}{\sum_{i=0, i \neq 3}^6 \Omega_3\left(\frac{\theta(t) + 0.6}{0.2} - i\right)} \times \\ &(-35\Omega_3\left(\frac{\theta(t) + 0.6}{0.2}\right) - 30\Omega_3\left(\frac{\theta(t) + 0.4}{0.2}\right) - \\ &12\Omega_3\left(\frac{\theta(t) + 0.2}{0.2}\right) + 12\Omega_3\left(\frac{\theta(t) - 0.2}{0.2}\right) + \\ &30\Omega_3\left(\frac{\theta(t) - 0.4}{0.2}\right) + 35\Omega_3\left(\frac{\theta(t) - 0.6}{0.2}\right)). \end{aligned}$$

在MATLAB 6.5环境下, 利用Simulink仿真工具箱进行计算机模拟得到角度的响应曲线和控制量曲

线如图2和图3所示。

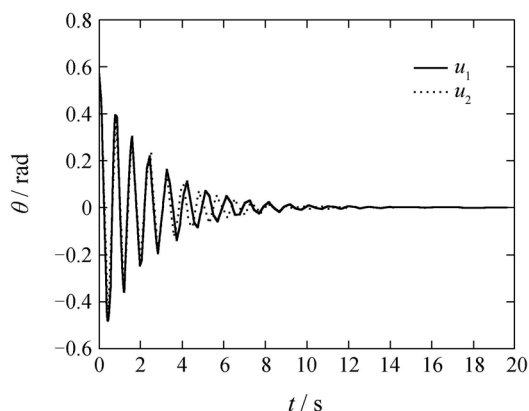


图2 摆角曲线

Fig. 2 Response curve of the rod

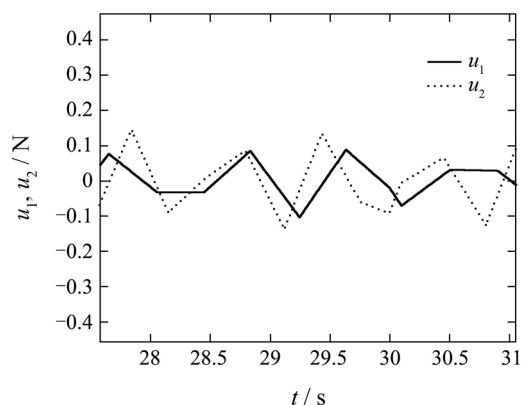


图3 控制量曲线

Fig. 3 The control value

对系统每隔10s施加一个幅度为0.2的干扰后,角度响应曲线如图4所示。

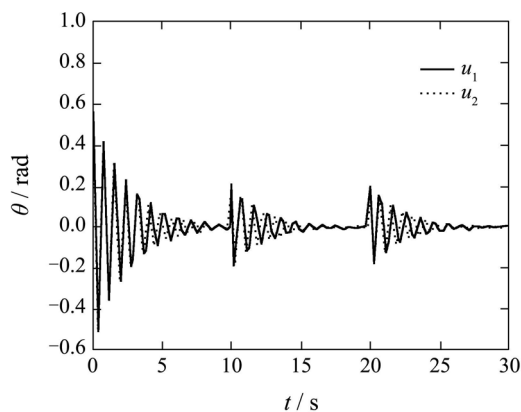


图4 系统施加干扰后的摆角曲线

Fig. 4 Response curve of the rod

为了考察系统的鲁棒性,对插值结点施加一个幅度为0.2的干扰后,系统仍能稳定.其角度响应曲线如图5所示。

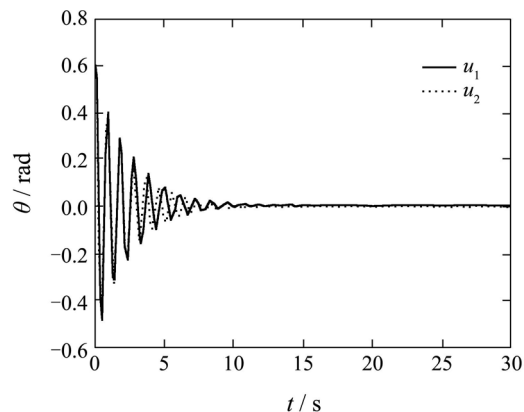


图5 结点施加干扰后的摆角曲线

Fig. 5 Response curve of the rod

从仿真结果看,两个控制器均能实现一级倒立摆的稳定控制,也均具有一定的鲁棒性。

6 结论(Conclusion)

本文对均匀3次B样条模糊系统进行了深入的讨论,并利用其设计了具有二阶光滑性的模糊控制器实现了一级倒立摆的稳定控制.对于Zhang给出的利用虚拟边界点增加规则的方法,本文指出其理论依据,并利用外推的方法处理了边界,得到了第一类B样条模糊系统,同时给出了逼近误差界.对于第二类B样条模糊系统,它事实上是一个有理样条函数,也从推理的角度,本文构造了一个有理样条函数并证明了其逼近性质.在一级倒立摆的稳定控制中,利用这两类模糊系统设计的控制器均能达到理想的控制效果,特别是当系统有干扰时,控制器仍能够实现一级倒立摆的稳定控制,这表明控制器具有一定的鲁棒性.事实上,其它阶次的以及非均匀的样条函数都可以类似的讨论,本文不再赘述.接下来,本文将研究多元样条模糊系统及其在更复杂的控制系统中的应用。

参考文献(References):

- [1] PRECUP R E, HELLENDORF H. A survey on industrial applications of fuzzy control[J]. *Computers in Industry*, 2010, DOI: 10.1016/j.compind.2010.10.001.
- [2] FEI Y, HAO Y. Interval type-2 boolean fuzzy systems are universal approximators[C] // *Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS) 2010 Annual Meeting of the North American*. Toronto, Canada: IEEE, 2010: 1-4.
- [3] ZENG X J, GOULERMAS J Y, LIATISIS P, et al. Hierarchical fuzzy systems for function approximation on discrete input spaces with application[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2008, 16(5): 1197-1215.
- [4] LI H X. Interpolation mechanism of fuzzy control[J]. *Science in China (Series E)*, 1998, 41(3): 312-320.
- [5] MENDEL J M, WANG L X. Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-squares learning[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1992, 3(5): 807-814.

- [6] ZENG X J, SINGH M G. Approximation theory of fuzzy systems-MIMO case[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1995, 3(2): 219 – 235.
- [7] LUGHOFFER E, KINDERMANN S. Spare FIS: data-driven learning of fuzzy systems with sparsity constraints[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, 18(2): 396 – 411.
- [8] HASSINE R, KARRAY F, ALIM I A M, et al. Approximation properties of fuzzy systems for smooth functions and their first-order derivative[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 2003, 33(2): 160 – 168.
- [9] ZENG K, ZHANG N R, XU W L. Approximation of C^1 functions and their derivative functions by SISO linear T-S fuzzy systems[C] // *Proceedings of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation*. Piscataway: IEEE, 2000, 3: 1836 – 1839.
- [10] BROWN M, HARRIS C J. A nonlinear adaptive controller: A comparison between fuzzy logic control and neural control[J]. *IMA Journal Mathematical Control Information*, 1991, 8(3): 239 – 265.
- [11] ZENG X J, SINGH M G. Approximation accuracy analysis of fuzzy systems as function approximators[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1996, 4(1): 44 – 63.
- [12] ZHANG J W, KNOLL A. Constructing fuzzy controllers with B-splines models-principles and applications[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 1998, 13(2/3): 257 – 285.
- [13] ZHANG J W, VAN LE K, KNOLL A. Unsupervised learning of control surface based on B-splines models[C] // *Proceedings of the 6th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Piscataway: IEEE, 1997, 3: 1725 – 1730.
- [14] WANG C W, WU L X. Fuzzy interpolative reasoning method based on spline[C] // *2009 the 1st International Workshop on Education Technology and Computer Science*. Piscataway: IEEE, 2009: 143 – 147.
- [15] LI H X, YUAN X H, WANG J Y, et al. The normal numbers of the fuzzy systems and their classes[J]. *Science China(Information Science)*, 2010, 53(11): 2215 – 2229.
- [16] LI H X, ZHANG L, CAI K Y, et al. An improved robust fuzzy-PID controller with optimal fuzzy reasoning[J]. *IEEE Transactions on Systems Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2005, 35(6): 1283 – 1294.
- [17] 苏步青, 刘鼎元. 计算几何[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1980. (SU Buqing, LIU Dingyuan. *Computation Geometry*[M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publishers, 1980.)
- [18] 李岳生, 齐东旭. 样条函数方法[M]. 北京: 科学出版社, 1979. (LI Yuesheng, QI Dongxu. *Spline Function Methods*[M]. Beijing: Science Press, 1979.)
- [19] LI H X, MIAO Z H, WANG J Y. Variable universe adaptive fuzzy control on the quadruple inverted pendulum[J]. *Science in China(Series E)*, 2002, 45(2): 213 – 224.

作者简介:

谭彦华 (1980—), 女, 博士研究生, 目前研究方向为模糊系统及模糊控制, E-mail: tanyh@hebut.edu.cn;

李洪兴 (1953—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为智能控制、变论域自适应控制、不确定性系统的统一理论和微分方程逼近论等, lhqx@bnu.edu.cn;

许吉祥 (1982—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为模糊因素期权定价, E-mail: jixiangxu@yahoo.cn.