

基于非光滑观测器的带死区三明治系统状态估计

周祖鹏^{1,3}, 谭永红²

(1. 西安电子科技大学 电子工程学院, 陕西 西安 710071;

2. 上海师范大学 信息与机电工程学院, 上海 200234; 3. 桂林电子科技大学 机电工程学院, 广西 桂林 541004)

摘要: 在控制工程实际中, 许多含有死区的系统可以用带死区的三明治系统描述. 本文针对带死区的三明治系统特点, 构建了一种非光滑观测器以对系统状态进行估计. 首先根据带死区三明治系统的特点, 由分离原理, 建立了描述系统特性的非光滑状态空间方程. 据此构造了能够随系统工作区间变化而自动切换的非光滑观测器, 给出了相应的收敛定理及其证明. 最后通过仿真, 分别比较了非光滑观测器和传统的观测器对状态的跟踪效果, 比较结果表明非光滑观测器对于带死区三明治系统状态变量估计的准确性要优于传统的观测器.

关键词: 非光滑观测器; 死区; 三明治系统; 状态估计

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Non-smooth observer for sandwich systems with dead-zone

ZHOU Zu-peng^{1,3}, TAN Yong-hong²

(1. School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an Shaanxi 710071, China;

2. College of Information, Mechanical and Electrical Engineering, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China;

3. School of Mechanical and Electrical Engineering, Guilin University of Electronic Technology, Guilin Guangxi 541004, China)

Abstract: In control engineering practice, many systems involving dead-zone can be described by the so-called sandwich systems with dead-zone. In this paper, a novel non-smooth observer is proposed to handle the state estimation for the sandwich systems with dead-zone. Based on the characteristics of the system, a non-smooth state-space equation is constructed by the separation principle; and then, a non-smooth observer is developed based on this state-space equation. The observer can be switched among different operating zones automatically according to the change of operation conditions. The convergence theorem of the non-smooth observer and its proof are given respectively. Simulations are performed. The comparison of simulation results between the proposed non-smooth scheme and the conventional method is illustrated. It shows that the proposed non-smooth approach is much better than the conventional one in estimation performances.

Key words: non-smooth observer; dead-zone; sandwich system; state estimation

1 引言(Introduction)

死区是一种广泛存在于各种电机、机械传动系统、液压传动系统、机电一体化系统中的非光滑非线性特性^[1]. 死区非线性特性不是孤立存在的, 而是往往与其他环节相联接, 比如一个直流电机伺服系统中, 功率放大器和直流电机的线性部分特性可以视为一个位于前端的线性子系统, 而电机所带的负载视为位于后端的线性子系统, 直流电机的非线性部分——死区则夹在两个线性动态环节之间, 这样的结构称为带死区的三明治系统. 在工业领域, 许多系统可以用带死区三明治系统描述, 比如带液压执行器驱动的飞机升降梯^[2]、由直流电机驱动的定位平台和由主阀控制的液压执行器等^[3]. 对于任何系统来说, 无论是实现系统闭环极点的任意配置, 或是实

现系统的最优控制和系统故障诊断都离不开全状态反馈^[4,5]. 因此, 有必要构造状态观测器对能观状态进行估计. 为此, 针对特定系统构造相应的特定状态观测器去估计其状态变量一直控制领域的研究课题之一. 文[6]构造了一种自适应鲁棒观测器对具有不确定因素的非线性系统的延时扰动状态变量进行估计. 文[7]利用求矩阵不等式的方法构造切换观测器对包含不确定性因素系统的状态进行估计, 并将该方法用于可用带有迟滞的Wiener模型描述的机械系统状态估计中. 文[8]针对带死区的Hammerstein系统构造了一种高增益观测器, 同时对死区参数和状态变量进行估计. 文[9]利用两层神经网络构造观测器对复杂非线性系统的状态进行估计. 由于带死区的三明治系统不仅是含有非光滑特性, 而且死区

收稿日期: 2010-07-23; 收修改稿日期: 2010-10-17.

基金项目: 上海师范大学重点学科项目资助项目(DZL811, DRL904, DYL201005); 上海市教育委员会科研创新项目资助项目(09ZZ141); 国家自然科学基金资助项目(60971004); 上海市科委重点项目资助项目(09220503000, 10JC1412200); 上海市自然科学基金资助项目(09ZR1423400).

环节的前、后端都连接有动态子系统,死区的输入和输出均为不可测量的中间变量.因此,此类系统具有更为复杂的结构.迄今为止,尚未发现针对带死区的三明治系统构造观测器的文献.因此,构造非光滑观测器对带死区三明治系统状态进行准确估计,以此类系统进行相应的最优控制或进行故障诊断.

2 带死区的三明治系统模型(The model of the sandwich systems with dead-zone)

设所研究的带死区三明治系统结构如图1所示,其中: u 和 y 分别为系统的输入和输出, L_1 为前段线性子系统, L_2 则为后端线性子系统, x 和 v 为不可测的中间变量, D_1 和 D_2 为死区宽度($0 < D_1 < \infty$ 和 $0 < D_2 < \infty$); m_1 和 m_2 为线性区斜率($0 < m_1 < \infty$ 和 $0 < m_2 < \infty$).本节将介绍描述带死区的三明治系统的模型,为了便于构造状态观测器,本文在文献[2]所提出的一种描述带死区的三明治系统的输入输出参数模型的基础上,构造相应的关于该系统的状态空间模型.

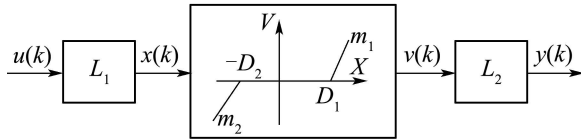


图1 带死区的三明治离散时间系统结构

Fig. 1 The structure of the sandwich systems with dead-zone

2.1 线性子系统的模型(The models of the linear subsystems)

设系统的前端线性子系统 L_1 的离散时间状态方程可表示为:

$$\mathbf{x}_1(k+1) = A_1 \mathbf{x}_1(k) + B_1 u(k), \quad (1)$$

$$y_1(k) = C_1 \mathbf{x}_1(k), \quad (2)$$

而系统的后端线性子系统 L_2 的离散时间状态方程:

$$\mathbf{x}_2(k+1) = A_2 \mathbf{x}_2(k) + B_2 v(k), \quad (3)$$

$$y_2(k) = C_2 \mathbf{x}_2(k), \quad (4)$$

其中:

$$\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}, A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}, y_i \in \mathbb{R}^{1 \times 1}, C_i \in \mathbb{R}^{1 \times n_i}, u \in \mathbb{R}^{1 \times 1}, v \in \mathbb{R}^{1 \times 1}, i = 1, 2,$$

x_{1i} 表示 L_1 环节的第 i 个状态变量, x_{2i} 表示 L_2 环节的第 i 个状态变量, $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ 为转移矩阵, $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$ 表示输入矩阵, $y_i \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ 为输出, n_i 表示第 i 个线性环节的状态变量的维数, $u \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ 为输入, $v \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ 为死区环节的输出变量.不失一般性,建模时约定,对于 L_1 来说,令 $x_{1n_1}(k) = x(k)$;对于 L_2 来说,令 $x_{2n_2}(k) = y(k)$.注意到系统只有 $u(k)$ 和 $y(k)$ 可测.

2.2 三明治系统死区部分的模型(The model of the dead-zone of sandwich systems)

根据文献[2, 10]可以得到如下死区模型:定义强制中间变量 $m(k)$ 和 $v_1(k)$ 如下所示:

$$m(k) = m_1 + (m_2 - m_1)h(k), \quad (5)$$

$$v_1(k) = m(k)(x(k) - D_1 h_1(k) + D_2 h_2(k)), \quad (6)$$

其中:

$$h(k) = \begin{cases} 1, & x(k) < 0, \\ 0, & x(k) \geq 0, \end{cases} \quad h_1(k) = \begin{cases} 1, & x(k) > D_1, \\ 0, & x(k) \leq D_1, \end{cases}$$

$$h_2(k) = \begin{cases} 1, & x(k) < -D_2, \\ 0, & x(k) \geq -D_2 \end{cases}$$

是切换函数,用于判断工作区间和在不同工作区间之间的切换.根据死区的输出特性可以得到

$$v(k) = v_1(k) - h_3(k)v_1(k) = (1 - h_3(k))v_1(k), \quad (7)$$

其中 $h_3(k) = \begin{cases} 1, & h_1(k) + h_2(k) = 0, \\ 0, & h_1(k) + h_2(k) = 1 \end{cases}$ 为切换函数,

负责死区线性区和死区之间的切换^[2].从式(7)可以看出,当 $h_3(k) = 0$ 时,系统工作在线性区, $v(k) = v_1(k)$;当时,系统工作在死区(零输出区), $v(k) = v_1(k) - v_1(k) = 0$.将式(6)代入式(7)得

$$v(k) = (1 - h_3(k))v_1(k) = (1 - h_3(k))m(k)(x(k) - D_1 h_1(k) + D_2 h_2(k)) = (1 - h_3(k))m(k)x(k) - (1 - h_3(k))m(k)D_1 h_1(k) + (1 - h_3(k))m(k)D_2 h_2(k). \quad (8)$$

根据前面的约定有

$$x(k) = x_{1n_1}(k). \quad (9)$$

将式(8)(9)代入式(3)得

$$\mathbf{x}_2(k+1) = A_2 \mathbf{x}_2(k+1) + B_2 v(k) = A_2 \mathbf{x}_2(k+1) + B_2 [(1 - h_3(k))m(k)x_{1n_1}(k) - (1 - h_3(k))m(k)D_1 h_1(k) + (1 - h_3(k))m(k)D_2 h_2(k)]. \quad (10)$$

2.3 带死区三明治系统的状态空间模型(State space model of the sandwich systems with dead-zone)

由式(1)和式(10),得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) \\ \mathbf{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{11} & \partial_{12} \\ \partial_{21} & \partial_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$y(k) = Cx_z(k), \quad (12)$$

其中:

$$\begin{aligned} \partial_{11} &= A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, \partial_{12} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, \\ \partial_{21} &= [\beta_1 \ \beta_2], \beta_1 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_2 \times (n_2-1)}, \\ \beta_2 &= B_2 m(k)[1 - h_3(k)] \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}, \\ \partial_{22} &= A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}, \varphi_2 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}, \\ \theta_1 &= \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}, \\ \theta_2 &= B_2 m(k)[1 - h_3(k)][D_2 h_2(k) - \\ &\quad D_1 h_1(k)] \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}, \\ C &= [\varepsilon_1 \ C_2] = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1], \\ x_z(k) &= \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times 1}, y \in \mathbb{R}^{1 \times 1}, \\ \varepsilon_1 &= \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{1 \times n_1}, C_2 = [\varepsilon_2 \ 1], \\ \varepsilon_2 &= \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{1 \times (n_2-1)}. \end{aligned}$$

这里 $\mathbf{0}$ 表示具有相应阶数的零矩阵. 若令

$$\begin{aligned} A_{zj} &= \begin{bmatrix} \partial_{11} & \partial_{12} \\ \partial_{21j} & \partial_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}, \\ \eta_j &= \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_{2j} \end{bmatrix}, j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

则式(11)可写成分段矩阵形式, 即

$$\begin{aligned} x_z(k+1) &= A_{zj}x_z(k) + Bu(k) + \eta_j(k), \\ j &= 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (13)$$

其中: j 表示开关切换区间标号, j 的切换取决于切换函数 $h_1(k)$, $h_2(k)$ 和 $h_3(k)$ 的取值组合; A_{zj} 表示不同区域的转移矩阵, 死区和线性区的 A_{zj} 不同, 但是当 $m_1 = m_2$ 时, 线性区的 A_{zj} 相同, 即 $A_{z1} \neq A_{z2}$, $A_{z1} = A_{z3}$; B 是输入矩阵, 各个工作区间相同; η_j 向量是由于死区的存在而产生的, 在不同的区域其表达式不同, 并且注意到

$$\begin{aligned} \partial_{21j} &= [\beta_1 \ \beta_{2j}], \beta_{2j} = \begin{cases} B_2 m_1, & j = 1, \\ 0, & j = 2, \\ B_2 m_2, & j = 3, \end{cases} \\ \theta_{2j} &= \begin{cases} -B_2 m_1 D_1, & j = 1, \\ 0, & j = 2, \\ B_2 m_2 D_2, & j = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

3 带死区三明治系统的非光滑观测器(The non-smooth observer of sandwich systems with dead-zone)

设 $n_1 = n_2 = n$. 则一个需要明确的事实是: 如果系统只有输入 $u(k)$ 和输出 $y(k)$ 可测, 那么三明治系统只有在线性工作区是满足完全能观条件的, 即当 $j = 1, 3$ 时, 能观性矩阵 $N = [C \ CA_{zj} \ \dots$

$CA_{zj}^{2n-1}]^T$ 的秩等于 $2n$. 在死区工作区间, 能观性矩阵的秩小于 $2n$, 所以不完全能观. 因此, 本文分线性区和死区分别讨论观测器的构造和收敛性.

3.1 线性区的观测器(The observer in linear zones)

根据式(12), 可得相应的线性区间的龙伯格(Luenberger)观测器, 即

$$\begin{cases} \hat{x}_z(k+1) = \\ \begin{cases} A_{z1}\hat{x}_z(k) + Bu(k) + \eta_1 + K(y(k) - \hat{y}(k)), \\ \hat{x}_{1n_1}(k) > D_1; \\ A_{z3}\hat{x}_z(k) + Bu(k) + \eta_3 + K(y(k) - \hat{y}(k)), \\ \hat{x}_{1n_1}(k) < -D_2, \end{cases} \\ \hat{y}(k) = C\hat{x}_z(k). \end{cases} \quad (14)$$

由式(12)和式(13)可以得相应的误差动态转移方程:

$$\begin{cases} e(k) = x_z(k) - \hat{x}_z(k), \\ e(k+1) = \\ \begin{cases} (A_{z1} - KC)e(k), \hat{x}_{1n_1}(k) > D_1, \\ (A_{z3} - KC)e(k), \hat{x}_{1n_1}(k) < -D_2. \end{cases} \end{cases} \quad (15)$$

其中: $\hat{x}_z(k)$ 表示观测器对状态向量的估计值, $\hat{y}(k)$ 表示观测器对输出的估计值, $e(k)$ 表示观测器的估计误差向量.

3.2 线性区的观测器收敛条件(The convergence of the observer in the linear zones)

根据完全能观的离散系统的观测器设计定理, 对给定的系统 $\Sigma_{0j} = (A_{zj}, B, C) (j = 1, 3)$ 完全能观, 令 $F_j = A_{zj} - KC$, 设计 K (反馈矩阵), 使 F_j 的特征值都在单位圆内, 则离散观测器系统收敛. 因此, 在线性区只要求出合适的 K 就能保证观测器的收敛性.

3.3 死区段的观测器(The observer in the dead-zone)

由于三明治系统工作在死区段时, 状态方程如式(12)所示, 系统 $\Sigma_0 = (A_{zi}, B, \eta_i, C) (i = 2)$ 不完全能观, 所以关于死区段的观测器构造不同于线性区, 由此, 给出如下定理:

定理 对于部分能观的离散时间定常系统:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu + \eta, \quad y(k) = Cx(k),$$

简记为 $\Sigma_0 = (A, B, \eta, C)$. 系统相应的能观性分解形式为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} +$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}(k) = [\mathbf{0} \ C_2] \mathbf{x}(k).$$

式中: $\mathbf{0}$ 表示具有相应阶数的零阶矩阵. \mathbf{x}_1 为不能观子状态, \mathbf{x}_2 为能观子状态; 因此, $(A_{11}, B_1, \theta_1, \mathbf{0})$ 为不能观子系统, $(A_{22}, B_2, \theta_2, C_2)$ 为能观子系统. 系统 $\Sigma_0 = (A, B, \eta, C)$ 的状态观测器收敛的充分条件是: Σ_0 的不能观子系统系数矩阵 A_{11} 的谱范数 $\|A_{11}\|_2 < 1$, 且 Σ_0 的能观子系统的系数矩阵 A_{22} 与增益矩阵 G_2 构成的特征矩阵 $(A_{22} - G_2 C_2)$ 的特征值均在单位圆内. 其中: $\|A_{11}\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$, λ_1 为 $A^T A$ 的最大特征值. 定理证明详见附录. 由式(11)可知, 三明治系统工作在死区段时的状态方程下式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) \\ \mathbf{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{11} & \partial_{12} \\ \partial_{212} & \partial_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_{22} \end{bmatrix},$$

$$-D_2 \leq x_{1n}(k) \leq D_1,$$

$$\mathbf{y} = C \mathbf{x}_z, \quad C = [\mathbf{0} \ C_2].$$

上式给出的状态方程的形式与定理中给出的部分能观系统的形式完全一致, 其中: ∂_{11} 相当于定理中的 A_{11} , ∂_{12} 相当于定理中的 A_{12} , ∂_{212} 由式(11)中的定义可知在死区段时为零, 相当于定理中的 $\mathbf{0}$ 矩阵, ∂_{22} 相当于定理中的 A_{22} , 式(15)中的 B_1 和 φ_2 分别相当于定理中的 B_1 和 B_2 , 式(15)中的 θ_1 和 θ_{22} 相当于定理中的 θ_1 和 θ_2 . 在死区工作段时, \mathbf{x}_1 为不能观子状态, \mathbf{x}_2 为能观子状态; $(\partial_{11}, B_1, \theta_1, \mathbf{0})$ 构成不能观子系统, $(\partial_{22}, \varphi_2, \theta_{22}, C_2)$ 构成能观子系统. 设构造反馈矩阵为 $K_2 = (K_{21}, K_{22})^T$, 观测器为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_z(k+1) = A_{z2} \hat{\mathbf{x}}_z(k) + B u(k) + \eta_2 + \\ \quad K_2(\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)), \\ -D_2 \leq \hat{x}_{1n_1}(k) \leq D_1. \end{cases} \quad (16)$$

由定理知, 若 $\|\partial_{11}\|_2 < 1$, 且通过适当选择 K_{22} , 可使 $(\partial_{22} - K_{22} C_2)$ 的特征值均在单位圆内, 那么如式(16)所示的死区段观测器收敛.

4 仿真研究(Simulation)

设带死区三明治系统可表示为线性子环节 L_1 :

$$\begin{bmatrix} x_{11}(k+1) \\ x_{12}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.99 & 0 \\ 0.01 & 0.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(k) \\ x_{12}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.004107 \\ 0 \end{bmatrix} u(k).$$

死区环节:

$$v(k) = DZ(x_{12}(k)) = \begin{cases} x_{12}(k) - 0.01, & x_{12}(k) > 0.01, \\ 0, & -0.01 \leq x_{12}(k) \leq 0.01, \\ x_{12}(k) + 0.01, & x_{12}(k) < -0.01, \end{cases}$$

其中: $m_1 = m_2 = 1$, $D_1 = D_2 = 0.01$. 线性子环节 L_2 :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_{21}(k+1) \\ x_{22}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.01 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21}(k) \\ x_{22}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0 \end{bmatrix} v(k), \\ y(k) = C \mathbf{x}_z(k) = [0 \ 0 \ 0 \ 1] [x_{11} \ x_{12} \ x_{21} \ x_{22}]^T. \end{cases} \quad (17)$$

按照式(11)的形式, 将式(17)所给的带死区三明治系统写成整体矩阵形式, 即

$$\mathbf{x}_z(k+1) = \begin{bmatrix} 0.99 & 0 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25(1-h_3(k)) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0.9 \end{bmatrix} \mathbf{x}_z(k) + \begin{bmatrix} 0.4107 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0025(1-h_3(k))(h_2(k) - h_1(k)) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

按式(12)所给形式, 将式(18)写成如下形式:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_z(k+1) = A_{z1} \mathbf{x}_z(k) + B u(k) + \eta_1(k), \\ \quad x_{12}(k) > 0.01; \\ \mathbf{x}_z(k+1) = A_{z2} \mathbf{x}_z(k) + B u(k) + \eta_2(k), \\ \quad -0.01 \leq x_{12}(k) \leq 0.01; \\ \mathbf{x}_z(k+1) = A_{z3} \mathbf{x}_z(k) + B u(k) + \eta_3(k), \\ \quad x_{12}(k) < -0.01; \\ y(k) = C \mathbf{x}_z(k) = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}_z(k), \end{cases} \quad (19)$$

其中:

$$A_{z1} = A_{z3} = \begin{bmatrix} 0.99 & 0 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0.9 \end{bmatrix},$$

$$A_{z2} = \begin{bmatrix} 0.99 & 0 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0.9 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.004107 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \eta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.0025 \\ 0 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\eta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0025 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \ 0 \ 0 \ 1].$$

根据式(18)(19)和第2节给出的定理, 以及由式(13)和式(15)所表示的观测器, 当分别选择在线性区的增益矩阵 $K = [0.9 \ 0.9 \ 0.9 \ 0.9]^T$ 和死区的增益矩阵 $K = [0.9 \ 0.9 \ 0.9 \ 0.9]^T$ 时, 相应的线性区特征矩阵 $F_i = A_{z_i} - KC (i = 1, 3)$ 的特征值

$$[0.9884 + 0.0064i \ 0.9884 + 0.0064i \ 0.4592 \ 0.004]^T$$

均在单位圆内, 满足线性工作区观测器收敛条件. 另外在死区, 系统后端线性子系统的两个状态变量能观, 而前段线性子系统两个状态变量不能观, $\|A_{11}\|_2 = 0.9901 < 1$, $(A_{22} - K_2C_2)$ 的特征值为 $[0.9909 \ 0.0091]^T$ 在单位圆内, 所以满足定理给出的收敛条件, 在死区观测器也收敛. 相应的仿真实验结果如图2所示, 其中实线表示状态的真实值, 虚线表示状态的估计值.

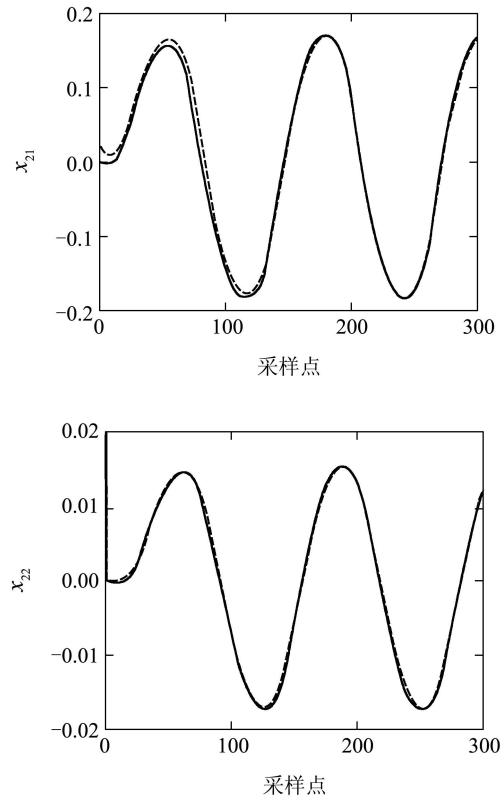


图 2 非光滑观测器的状态估计效果

Fig. 2 The estimate performance of the non-smooth observer

由图2可见, 非光滑观测器就能够快速、准确地跟踪系统的各个状态变量真实值. 与此同时, 将其与传统的观测器在相同的条件下进行比较.

由于传统的观测器设计忽略死区的影响, 因此所构建观测器是光滑的, 那么原来的三明治系统模型蜕变成了由两个线性环节和一个比例环节串联而成的系统. 相应的观测器具有如下形式:

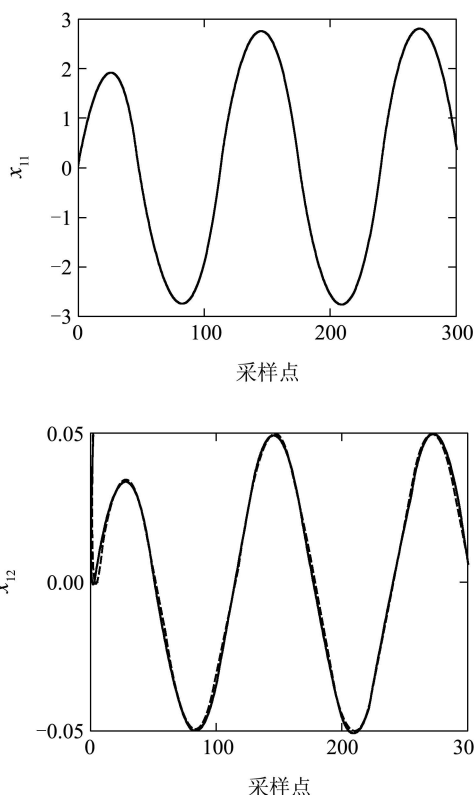
$$\hat{x}_z(k+1) = A_z \hat{x}_z(k) + Bu(k) + K_1(y(k) - \hat{y}(k)). \quad (20)$$

若取

$$K_1 = [0.9 \ 0.9 \ 0.9 \ 0.9]^T,$$

由前面的讨论可知, 观测器满足收敛条件. 图3给出了传统观测器对各个状态变量的估计情况. 其中实线表示非光滑观测器的状态估计, 虚线表示传统观测器的状态估计. 由图3可见, 传统观测器对状态的估计效果要明显不如本文所提出的非光滑观测器. 特别是对状态 x_{z1}, x_{z2} 的估计出现了明显的偏差.

为了进一步比较两种观测器对各个状态估计效果, 图4给出了两类观测器对各个状态估计的误差值曲线, 其中实线表示非光滑观测器的估计误差, 虚线表示传统观测器的估计误差. 从图4中可以清楚地看到, 与传统观测器比较, 非光滑观测器的估计误差很小, 并能较快地收敛为零. 而传统观测器由于没有考



考虑非光滑非线性环节的作用, 所以对状态的估计误差也较大. 因此, 从状态估计效果上说, 非光滑观测器比传统观测器要好得多, 这也反映了本文构建非光滑观测器的意义所在.

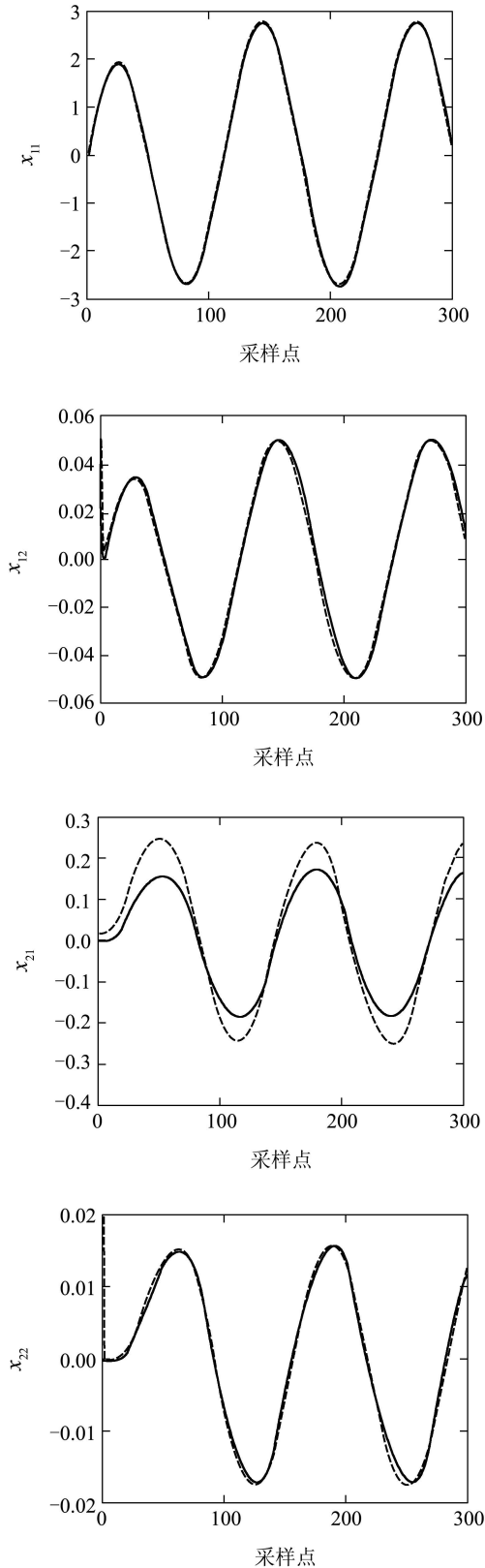


图3 传统观测器的状态估计效果

Fig. 3 The estimation performance of conventional observer

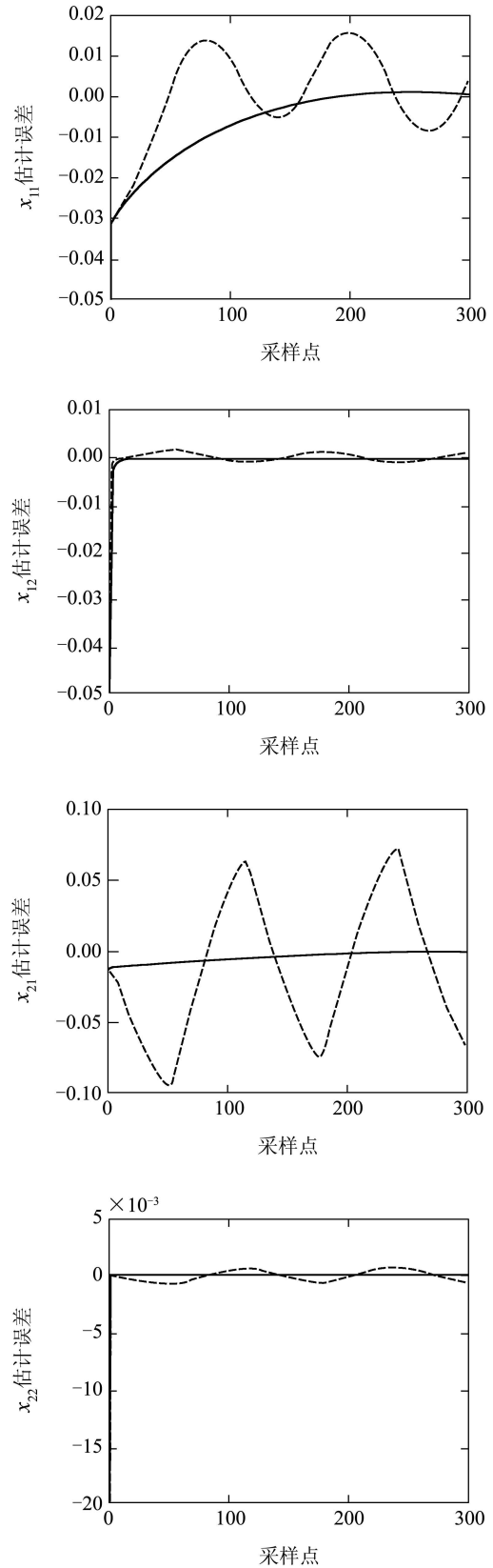


图4 观测器误差比较

Fig. 4 Estimation error comparison of two kinds of observer

5 结论(Conclusion)

本文提出了一种针对带死区三明治系统的非光滑观测器以估计系统的状态. 通过构造描述这类系

统的非光滑状态空间模型, 进而在观测器中引入自动切换项. 本文讨论了观测器的结构和设计原则, 分析了非光滑观测器的收敛性. 仿真实验表明本文提出的非光滑观测器能够快速、准确跟踪系统的状态, 与传统的观测器相比, 非光滑观测器获得了较快和更准确的状态估计效果.

参考文献(References):

- [1] VOROS J. Recursive identification of Hammerstein systems with discontinuous nonlinearities containing dead-zones[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(12): 2203 – 2206.
- [2] TAN Y H, DONG R L, LI R Y. Recursive identification of sandwich systems with dead-zone and application[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2009, 17(4): 945 – 951.
- [3] TAWARE A, TAO G. *Control of sandwich nonlinear system*[D]. Virginia: University of Virginia, 2001: 27 – 37.
- [4] CACCAVALE F, CILIBRIZZI P, PIERRI F, et al. Actuator fault diagnosis for robot manipulators with uncertain model[J]. *Control Engineering Practice*, 2009, 17(1): 14 – 157.
- [5] CACCAVALE F, PIERRI F, VILLAN LI. Adaptive observer for fault diagnosis in nonlinear discrete-time systems[J]. *ASME Journal of Dynamic System, Measurement, and Control*, 2008, 130(2): 1 – 9.
- [6] WU H S. Adaptive robust state observers for a class of uncertain nonlinear dynamical systems with delayed state perturbations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(6): 1407 – 1412.
- [7] NOUAILLETAS R, KOENIG D, MENDES E. LMI design of a switched observer with model uncertainty: Application to a hysteresis mechanical system[C] // *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*. Piscataway, NJ: IEEE, 2007: 6298 – 6303.
- [8] IBRIR S. Simultaneous state and dead-zone parameter estimation using high-gain observers[C] // *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*. New York: IEEE, 2009: 311 – 316.
- [9] SHAIK F A, PURWAR S. A nonlinear state observer design for 2-dof twin rotor system using neural networks[C] // *2009 International Conference on Advances in Computing, Control, and Telecommunication Technologies*. Piscataway, NJ: IEEE, 2009: 15 – 19.
- [10] 董瑞丽. 非光滑三明治系统的辨识和控制研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2008: 25 – 37.
(DONG RuiLi. *Identification and control of the nonsmooth sandwich systems*[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2008: 25 – 37.)
- [11] 刘豹, 唐万生. 现代控制理论[M]. 第3版. 北京: 机械工业出版社, 2006: 210 – 212.
(LIU Bao, TANG Wansheng. *Modern Control Theory*[M]. 3rd edition. Beijing: Mechanical Technology Press, 2006: 210 – 212.)
- [12] 曾祥金, 吴华安. 矩阵分析及其应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2007: 115 – 123.
(ZENG Xiangjin, WU Hua'an. *Analysis and Application of Matrix*[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2007: 115 – 123.)

附录 定理证明(Appendix Proof of the theorem)

证 1) 对系统进行分解: 设系统 $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) + \boldsymbol{\eta}$ 不完全能观, 则对其进行能观性结构分解. 这里, 不妨设 $\Sigma_0 = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{C})$ 已具有能观性分解形式. 即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) \\ \mathbf{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}(k) = (\mathbf{0}, C_2) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix},$$

式中: \mathbf{x}_1 为不能观子状态; \mathbf{x}_2 为能观子状态; $(A_{11}, B_1, \theta_1, \mathbf{0})$ 为不能观子系统; $(A_{22}, B_2, \theta_2, C_2)$ 为能观子系统.

2) 构造状态观测器 $\hat{\Sigma}_0$: 设 $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2)^T$ 为状态的估计值, $G = (G_1, G_2)^T$ 为调节 $\hat{\mathbf{x}}$ 渐近于 \mathbf{x} 的速度的反馈增益矩阵. 于是得观测器方程

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}u(k) + \boldsymbol{\eta} + G(\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k)),$$

即 $\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}u(k) + \boldsymbol{\eta} + \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{x}(k)$.

定义 $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ 为状态误差矢量, 则可导出状态误差方程:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x}(k+1) &= \\ \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \\ \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) - \hat{\mathbf{x}}_1(k+1) \\ \mathbf{x}_2(k+1) - \hat{\mathbf{x}}_2(k+1) \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} A_{11}\mathbf{x}_1(k) + A_{12}\mathbf{x}_2(k) + B_1u(k) + \theta_1 \\ A_{22}\mathbf{x}_2(k) + B_2u(k) + \theta_2 \end{pmatrix} - & \\ \begin{pmatrix} \mathcal{J} + G_1C_2\mathbf{x}_2(k) + \theta_1 \\ \mathcal{K} + G_2C_2\mathbf{x}_2(k) + \theta_2 \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} \mathcal{L} + A_{11}(\mathbf{x}_1(k) - \hat{\mathbf{x}}_1(k)) \\ (A_{22} - G_2C_2)(\mathbf{x}_2(k) - \hat{\mathbf{x}}_2(k)) \end{pmatrix}, & \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= (A_{12} - G_1C_2)\hat{\mathbf{x}}_2(k) + A_{11}\hat{\mathbf{x}}_1(k) + B_1u(k), \\ \mathcal{K} &= (A_{22} - G_2C_2)\hat{\mathbf{x}}_2(k) + B_2u(k), \\ \mathcal{L} &= (A_{12} - G_1C_2)(\mathbf{x}_2(k) - \hat{\mathbf{x}}_2(k)). \end{aligned}$$

3) 确定使 $\hat{\mathbf{x}}$ 渐近于 \mathbf{x} 的条件: 由上式, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(k+1) - \hat{\mathbf{x}}_1(k+1) &= \\ (A_{12} - G_1C_2)(\mathbf{x}_2(k) - \hat{\mathbf{x}}_2(k)) + & \\ A_{11}(\mathbf{x}_1(k) - \hat{\mathbf{x}}_1(k)), & \quad (\text{A1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(k+1) - \hat{\mathbf{x}}_2(k+1) &= \\ (A_{22} - G_2C_2)(\mathbf{x}_2(k) - \hat{\mathbf{x}}_2(k)). & \quad (\text{A2}) \end{aligned}$$

通过对式(A2)的递推可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(k+1) - \hat{\mathbf{x}}_2(k+1) &= \\ (A_{22} - G_2C_2)^k(\mathbf{x}_2(1) - \hat{\mathbf{x}}_2(1)), & \end{aligned}$$

其中 $(\mathbf{x}_2(1) - \hat{\mathbf{x}}_2(1))$ 为能观状态的初始误差, 设其为一个有界的向量. 令 $(A_{22} - G_2C_2) = F_{22}$, 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(k+1) - \hat{\mathbf{x}}_2(k+1) &= \\ (A_{22} - G_2C_2)^k(\mathbf{x}_2(1) - \hat{\mathbf{x}}_2(1)) &= \\ F_{22}^k(\mathbf{x}_2(1) - \hat{\mathbf{x}}_2(1)). & \quad (\text{A3}) \end{aligned}$$

由参考文献[12]中的矩阵序列收敛定理可知, 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \mathbf{0}$ 的充分必要条件是谱半径 $\rho(A) < 1$. 因此, 通过适当选择 G_2 , 使得 F_{22} 的特征值均在单位圆内, 即特征值的模都小于1 ($|\lambda_i| < 1$), 由矩阵谱半径的定义知矩阵的谱半径小于1, 即: 使 $\rho(F_{22}) < 1$, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} F_{22}^k &= \mathbf{0} \Rightarrow \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_2(k+1) - \hat{\mathbf{x}}_2(k+1)) &= \\ (\mathbf{x}_2(1) - \hat{\mathbf{x}}_2(1)) \lim_{k \rightarrow \infty} F_{22}^k &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

则能保证能观状态 \mathbf{x}_2 的收敛. 同理, 由式(A1)可得其解为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(k+1) - \hat{\mathbf{x}}_1(k+1) &= \\ (A_{12} - G_1 C_2)(\mathbf{x}_2(k) - \hat{\mathbf{x}}_2(k)) + A_{11}(\mathbf{x}_1(k) - \hat{\mathbf{x}}_1(k)). \end{aligned}$$

对上式两边取2范数, 根据范数的相容性定理有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_1(k+1) - \hat{\mathbf{x}}_1(k+1)\|_2 &\leq \\ \|(A_{12} - G_1 C_2)\|_2 \|\mathbf{x}_2(k) - \hat{\mathbf{x}}_2(k)\|_2 + \\ \|A_{11}\|_2 \|\mathbf{x}_1(k) - \hat{\mathbf{x}}_1(k)\|_2. \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

对式(A4)两边取极限, 并注意到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_2(k) - \hat{\mathbf{x}}_2(k)\|_2 = 0,$$

故得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_1(k+1) - \hat{\mathbf{x}}_1(k+1)\|_2 \leq$$

$$\begin{aligned} \|(A_{12} - G_1 C_2)\|_2 \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_2(k) - \hat{\mathbf{x}}_2(k)\|_2 + \\ \|A_{11}\|_2 \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_1(k) - \hat{\mathbf{x}}_1(k)\|_2 = \\ \|A_{11}\|_2 \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_1(k) - \hat{\mathbf{x}}_1(k)\|_2. \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

因为 $\|A_{11}\|_2 < 1$, 则由式(A5)得

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_1(k+1) - \hat{\mathbf{x}}_1(k+1)\|_2 &\leq \\ \|A_{11}\|_2 \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_1(k) - \hat{\mathbf{x}}_1(k)\|_2 &\Rightarrow \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_1(k+1) - \hat{\mathbf{x}}_1(k+1)\|_2}{\|\mathbf{x}_1(k) - \hat{\mathbf{x}}_1(k)\|_2} &\leq \|A_{11}\|_2 < 1. \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

因为 $\|\mathbf{x}_1(k+1) - \hat{\mathbf{x}}_1(k+1)\|_2$ 范数序列是一个正值序列, 且式(A6)成立, 根据正项级数的比值判别定理可知, 该正项级数收敛. 而正项级数收敛的必要条件为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_1(k) - \hat{\mathbf{x}}_1(k)\|_2 = 0,$$

因此, $\hat{\mathbf{x}}_1(k)$ 收敛于 $\mathbf{x}_1(k)$. 证毕.

作者简介:

周祖鹏 (1977—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为非线性系统状态估计、非线性系统故障诊断等, E-mail: zhouzupeng@guet.edu.cn;

谭永红 (1958—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为智能控制与信号处理、非线性系统建模与控制、机电系统故障诊断等, E-mail: tanyongh@yahoo.com.cn, 本文通讯作者.