

# 有向网络下仿射非线性多个体协同动力学系统的整体行为

金继东<sup>1,2</sup>, 郑毓蕃<sup>1</sup>

(1. 上海大学 数学系, 上海 200444; 2. 首都经济贸易大学 计算机科学与技术系, 北京 100070)

**摘要:** 本文讨论有向通讯网络条件下仿射非线性多个体动力学系统的结构及其整体行为. 系统可以分解为独立基本子系统和非独立基本子. 每个独立基本子系统将趋于自身的一致状态, 非独立子系统的个体状态将趋于独立基本子系统一致状态为顶点的凸集内. 系统所有个体的状态趋于一致的充分必要条件是存在唯一的独立基本子系统. 这一结果涵盖了线性多个体动力学系统此前的研究结果.

**关键词:** 有向网络; 多个体动力学系统; 协同; 仿射; 一致性; 整体行为; 凸空间

**中图分类号:** N941.3, O231.5      **文献标识码:** A

## Collective behavior of affine nonlinear multi-agent dynamic systems in directed network

JIN Ji-dong<sup>1,2</sup>, ZHENG Yu-fan<sup>1</sup>

(1. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, China;

2. Department of Computer Science and Technology, Capital University of Economics and Business, Beijing 100070, China)

**Abstract:** The structure and collective behavior of affine nonlinear multi-agent dynamic system under directed network are discussed. The system can be decomposed into some basic subsystems; some of them are independent from the others and some are not. Each basic independent subsystem will reach its own consensus state. The state of each agent in the nonindependent subsystems will go inside of a convex set, which is formed by the consensus states of basic independent subsystems. The states of all agents in system reach consensus if and only if there is only one independent subsystem in the system. This result also covers the results of previous works on linear multi-agent dynamic systems.

**Key words:** directed network; multi-agent dynamic system; cooperative; affine; consensus; collective behavior; convex space

### 1 引言(Introduction)

动力学与多体问题是紧密相关的, 如牛顿天体物理学系统是多体系统. 由于作用与反作用的关系, 经典多体动力学系统是相互作用系统, 其作用关系网络是对称的. 近20年来基于对称作用关系网络的多个体系统研究占较大比重. 20世纪90年代, Heppner等人用动力学系统稳定性分析的方法分析了鸟群在具有头鸟的情况下状态一致性问题<sup>[1]</sup>, 说明用动力学方法研究多个体系统的集体行为是可行的. 近来, Bausob等人则将这项研究推进到一般非线性系统<sup>[2]</sup>. 尽管这项研究针对个体状态为一维的情况, 但却预示了近年在线性系统方面已经取得的研究成果可以推广到个体状态为高维的仿射动力学系统.

然而自然界中的许多集体行为, 例如动物的集体行为, 个体间的作用关系网络往往是非对称的.

针对非对称作用关系网络条件下的多个体动力学系统, Fax, Olfati-Saber, Murray始于本世纪初的一项研究取得了实质性的进展<sup>[3,4]</sup>. 文献[5~9]则在此

基础上更加深入地研究了这类系统. 目前这方面的研究大多局限于线性系统. 而从应用的角度看, 线性系统并不完全符合实际情况. 本文将线性系统推广为仿射系统, 研究非对称作用关系网络条件下仿射非线性多个体协同动力学系统的整体行为.

### 2 协同系统(Cooperative system)

$A$ 是个体的集合,  $a_i \in A (i = 1, \dots, n)$ 为个体,  $x_i(t) \in \mathbb{R}^m$ 表示个体 $a_i$ 在 $t$ 时刻的状态.  $N(a_i)$ 为影响 $a_i$ 行为的个体集合, 称为 $a_i$ 的邻集.  $A$ 中所有个体的邻集定义了 $A$ 上的有向图 $G = \langle A, \varepsilon \rangle$ :

$$\varepsilon = \{(a_i, a_j) \in A \times A \mid a_j \in N(a_i)\},$$

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, x_{j_1}, \dots, x_{j_k}), \quad x_{j_1}, \dots, x_{j_k} \in N(a_i)$$

是多个体动力学方程的一般形式.

如果 $a_i$ 受不同个体的影响是相互独立的并且具有可叠加性, 则系统的动力学描述为式(1):

$$\dot{x}_i = f_i(\cdot) = \sum_{a_j \in N(a_i)} f_{ij}(x_i, x_j), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Euclid空间 $\mathbb{R}^m$ 上的等距 $\mathcal{T}x = \mathcal{C}x - \mathcal{D}$ , 是具有式(2)性质的 $\mathbb{R}^m$ 上的变换. 其中:  $\mathcal{C}$ 为 $m \times m$ 坐标系旋转变换矩阵,  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^m$ 定义了坐标系的平移.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^m, \|\mathcal{T}x - \mathcal{T}y\| = \|x - y\|. \quad (2)$$

**定义 1** 如果对 $\mathbb{R}^m$ 上任意的等距 $\mathcal{T}$ , 均有

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_i}{dt} &= \sum_{a_j \in N(a_i)} f_{ij}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j), \\ \frac{d\tilde{x}_i}{dt} &= \mathcal{T} \frac{dx_i}{dt}, f_{ij}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) = f_{ij}(\mathcal{T}x_i, \mathcal{T}x_j), \end{aligned}$$

则式(1)为多个体仿射动力学系统.

**定理 1** 基于个体受不同个体影响相互独立的多个体叠加动力学系统(1)是仿射的, 当且仅当

$$f_{ij}(x_i, x_j) = q_{ij}(\|x_i - x_j\|)\vec{r}_{ij}, \quad (3)$$

其中:  $\|\cdot\|$ 是Euclid范数,  $q_{ij}(\cdot)$ 是标量,  $\vec{r}_{ij} = (x_i - x_j)/\|x_i - x_j\|$ 是 $x_i - x_j$ 的单位矢量.

**证** 必要性. 由于个体受不同个体的影响是相互独立的, 因此 $f_{ij}$ 不因 $N(a_i)$ 的不同而不同, 只需对 $N(a_i) = \{a_j\}$ , 也即以下动力学方程证明:

$$\dot{x}_i = f_{ij}(x_i, x_j). \quad (4)$$

令

$$\begin{aligned} \mathcal{T}x &= x - \mathcal{D} = x - x_j, \\ \mathcal{T}\dot{x}_i &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(x_i(t+\Delta t) - x_j) - (x_i(t) - x_j)}{\Delta t} = \dot{x}_i, \\ f_{ij}(\mathcal{T}x_i, \mathcal{T}x_j) &= f_{ij}(x_i - x_j, 0) = f_{ij}(x_i - x_j). \end{aligned}$$

式(4)是仿射, 则

$$\dot{x}_i = \mathcal{T}\dot{x}_i = f_{ij}(\mathcal{T}x_i, \mathcal{T}x_j) = f_{ij}(x_i - x_j).$$

令 $\mathcal{T}x = \mathcal{C}x$ .  $\mathcal{C}$ 是矢量 $x_i - x_j$ 所在直线为固定轴的空间旋转变换.  $\mathcal{T}(x_i - x_j)$ 不变, 因此 $f_{ij}(\mathcal{T}(x_i - x_j))$ 不变.  $f_{ij}(x_i - x_j)$ 与 $x_i - x_j$ 在同一直线.

$$\dot{x}_i = f_{ij}(x_i - x_j) = q_{ij}(x_i - x_j)\vec{r}_{ij},$$

其中 $q_{ij}(\cdot)$ 是标量.

对任给的等距 $\mathcal{T}$ ,  $\|\mathcal{T}\dot{x}_i\| = \|\dot{x}_i\|$ , 因此

$$q_{ij}(x_i - x_j) = q_{ij}(\|x_i - x_j\|).$$

必要性得证.

$f_{ij}$ 取形式(3), 式(1)的仿射性易得. 证毕.

用等距 $\mathcal{T}x = \mathcal{C}x + \mathcal{D}$ 对式(3)形式的 $f_{ij}$ 变换, 有

$$f_{ij}(\mathcal{T}(x_i - x_j)) = \mathcal{C}f_{ij}(x_i - x_j),$$

因此系统(1)为仿射动力学系统时,

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = \mathcal{T}\dot{x}_i = \sum_{a_i \in N(a_i)} \mathcal{C}f_{ij}(x_i - x_j) = \mathcal{C}\dot{x}_i.$$

这意味其初值问题在同构的距离空间中具有全同的几何流形, 也即一个是另一个的整体旋转.

**定义 2** 多个体仿射动力学系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{a_j \in N(a_i)} f_{ij}(x_i - x_j) = \\ &\sum_{a_j \in N(a_i)} -g_{ij}(\|x_i - x_j\|)\vec{r}_{ij}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

称为状态协同动力学系统, 如果

$$g_{ij}(\|x_i - x_j\|) \begin{cases} = 0, & x_i = x_j, \\ > 0, & x_i \neq x_j, \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $g_{ij}(\cdot) \in \mathbb{R}$ 为 $a_j$ 对 $a_i$ 的影响强度函数,  $\vec{r}_{ij} = (x_i - x_j)/\|x_i - x_j\|$ 为 $x_i - x_j$ 的单位矢量.

**评论 1** 仿射性前提源于伽利略相对性: 实际动力学系统的性质与研究者的观测坐标系无关.

根据常微分方程论, 如果对 $i = 1, \dots, n$ ,  $f_i(\cdot)$ 是 $C^1$ 类函数(连续可微), 则系统(1)是光滑动力学系统, 初值问题的解存在且唯一<sup>[10]</sup>.

本文约定 $g_{ij}(y)$ 是 $y \in [0, \infty)$ 上 $C^1$ 类函数. 这样, 系统(5)是光滑动力学系统.

### 3 系统结构(Structure of system)

**定义 3** 1) 有向图 $G = \langle A, \varepsilon \rangle$ 上的边集

$$\{(a_i, a_{p_1}), (a_{p_1}, a_{p_2}), \dots, (a_{p_{k-1}}, a_{p_k}), (a_{p_k}, a_j)\} \subset \varepsilon$$

称为结点 $a_j$ 到 $a_i$ 存在路径, 记为 $W(a_i, a_j)$ .

2) 如果对任意不同的 $a_i, a_j \in A$ , 均存在 $W(a_i, a_j)$ ,  $W(a_j, a_i) \subset \varepsilon$ , 则 $G$ 是强连通的.

3)  $A_s \subset A$ ,  $G_s = \langle A_s, \varepsilon \cap (A_s \times A_s) \rangle$ 为 $G$ 的导出子图. 如果 $G_s$ 强连通, 且对任意 $a_j \in A - A_s$ ,

$$\langle A_s \cup \{a_j\}, \varepsilon \cap ((A_s \cup \{a_j\}) \times (A_s \cup \{a_j\})) \rangle$$

非强连通, 称 $G_s$ 是 $G$ 的强分量(极大强连通子图), 称 $A_s$ 是 $A$ 的一个基本集.

$\bar{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ 是 $G$ 上所有基本集的集合. 由定义易知 $\bar{A}$ 是 $A$ 的分割.

**定义 4**  $A_s, A_r$ 是 $A$ 的不同基本集.

1) 如果对 $a_i \in A_r$ ,  $a_j \in A_s$ , 存在 $W(a_i, a_j) \subset \varepsilon$ , 称 $A_s$ 是 $A_r$ 前驱.  $A_r$ 存在前驱称其为非独立基本集, 否则称为独立基本集.  $A_r$ 所有前驱的并称为 $A_r$ 的前驱闭包, 记为 $P(A_r)$ .

2)  $a_i \in A_r$ ,  $a_i$ 的前驱闭包定义为

$$P(a_i) = \{a_j \in A - A_r \mid W(a_i, a_j) \subset \varepsilon\}.$$

3)  $a_i \in A_r$ ,  $S(a_i) = (A_r - \{a_i\}) \cup P(a_i)$ 为 $a_i$ 的影响集.  $N(a_i) \subset S(a_i)$ 是 $a_i$ 的直接影响集.

**命题 1** 1)  $a_i \in A_r$ ,  $P(a_i) = P(A_r)$ ;

2)  $A_r$ 是非独立基本集, 必存在 $A$ 的独立基本集 $A_s$ ,  $A_s \subset P(A_r) \subset S(A_r)$ .

多个体系统可以按基本集区分不同的子系统.

**定义 5** 1)  $A_s$  是  $A$  的独立基本集, 则

$$\dot{x}_i = \sum_{a_j \in N(a_i) \subset A_s} f_{ij}(x_i, x_j), \quad a_i \in A_s$$

称为系统(1)的独立基本子系统.

2)  $A_r$  是  $A$  的非独立基本集, 则

$$\dot{x}_i = \sum_{a_j \in A_r \cap N(a_i)} f_{ij}(x_i, x_j) + \sum_{a_j \in P(A_r) \cap N(a_i)} f_{ij}(x_i, x_j), \quad a_i \in A_r$$

称为系统(1)的非独立基本子系统.

显然独立基本子系统是自治的, 非独立基本子系统是非自治的.

#### 4 一维系统(One-dimensional system)

先研究  $x_i \in \mathbb{R}^1$  时多个体协同动力学系统(5)的初值问题, 也即  $x_1(0), \dots, x_n(0)$  给定.

$x_1(t), \dots, x_n(t)$  是个体在  $t$  时的状态.  $n$  有限,

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}(t) &= \min\{x_1(t), \dots, x_n(t)\} > -\infty, \\ \bar{\Delta}(t) &= \max\{x_1(t), \dots, x_n(t)\} < \infty, \\ \Delta(t) &= [\underline{\Delta}(t), \bar{\Delta}(t)] \end{aligned}$$

为  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  的最小闭覆盖.

$$\begin{aligned} \underline{A}(t) &= \{a_i \in A | x_i(t) = \underline{\Delta}(t)\}, \\ \bar{A}(t) &= \{a_i \in A | x_i(t) = \bar{\Delta}(t)\} \end{aligned}$$

分别为  $t$  时下边缘个体和上边缘个体集.

一维的多个体协同动力学系统(5)状态的最小闭覆盖具有以下递缩的闭区间套性质.

**引理 1** 协同动力学系统(5)的个体状态是一维的. 如果  $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ , 则  $\Delta(t_2) \subseteq \Delta(t_1)$ .

**证** 对任意  $a_i \in \underline{A}(t)$  及  $a_j \neq a_i$ , 有  $x_i(t) - x_j(t) \leq 0$ . 由式(6),  $f_{ij}(x_i - x_j) \geq 0$ , 因此

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{a_j \in N(a_i)} f_{ij}(x_i - x_j) \geq 0, \\ \frac{d}{dt} \underline{\Delta}(t) &= \min\{\dot{x}_i(t) | a_i \in \underline{A}(t)\} \geq 0. \end{aligned}$$

同理可证  $\frac{d}{dt} \bar{\Delta}(t) \leq 0$ . 证毕.

由 Weierstrass 定理, 单调递缩的闭区间套的极限存在, 因此可记

$$\Delta(\infty) = [\underline{\Delta}(\infty), \bar{\Delta}(\infty)] = \lim_{t \rightarrow \infty} [\underline{\Delta}(t), \bar{\Delta}(t)].$$

下面讨论  $\Delta(t)$  的极限. 先证明一个引理.

**引理 2** 个体状态为一维的光滑的多个体协同动力学系统(5)有以下性质:

1) 如果  $a_i \in \underline{A}(t)$ , 且  $N(a_i) \cap (A - \underline{A}(t)) \neq \emptyset$ , 则存在  $\delta t > 0$ , 当  $t' \in (t, t + \delta t)$  时,  $\dot{x}_i(t') > 0$ .

2) 如果  $a_i \in \bar{A}(t)$ , 且  $N(a_i) \cap (A - \bar{A}(t)) \neq \emptyset$ , 则存在  $\delta t > 0$ , 当  $t' \in (t, t + \delta t)$  时,  $\dot{x}_i(t') < 0$ .

**证** 1)和2)同理, 只证1). 假设  $a_i \in \underline{A}(t)$ , 令

$$N_L = N(a_i) \cap \underline{A}(t), \quad N_R = N(a_i) \cap (A - \underline{A}(t)),$$

对任意  $a_j \in N_R$  有  $x_i - x_j < 0$ . 系统(5)是协同动力学系统, 由式(6)有  $f_{ij}(x_i - x_j) > 0$ .  $N_R \neq \emptyset$  则

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{a_k \in N_L} f_{ik}(x_i - x_k) + \sum_{a_j \in N_R} f_{ij}(x_i - x_j) = \\ &0 + \sum_{a_j \in N_R} f_{ij}(x_i - x_j) > 0. \end{aligned}$$

系统(5)是光滑动力学系统,  $\dot{x}_i$  连续. 因而存在  $\delta t > 0, t' \in (t, t + \delta t)$  时,  $\dot{x}_i(t') > 0$ . 证毕.

引理2的条件可以放宽为

$$\begin{aligned} S(a_i) \cap (A - \underline{A}(t)) &\neq \emptyset, \\ S(a_i) \cap (A - \bar{A}(t)) &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

**引理 3** 个体状态为一维的光滑的多个体协同动力学系统(5)有以下性质:

1) 如果  $a_i \in \underline{A}(t)$ , 且  $S(a_i) \cap (A - \underline{A}(t)) \neq \emptyset$ , 则存在  $\delta t > 0$ , 当  $t' \in (t, t + \delta t)$  时,  $\dot{x}_i(t') > 0$ .

2) 如果  $a_i \in \bar{A}(t)$ , 且  $S(a_i) \cap (A - \bar{A}(t)) \neq \emptyset$ , 则存在  $\delta t > 0$ , 当  $t' \in (t, t + \delta t)$  时,  $\dot{x}_i(t') < 0$ .

**证** 令  $a_i \in \underline{A}(t)$ .

$$\begin{aligned} B &:= (S(a_i) \cup \{a_i\}) \cap \underline{A}(t), \\ N(B) &:= \bigcup_{a_j \in B} N(a_j). \end{aligned}$$

由  $S(a_i) \cap (A - \underline{A}(t)) \neq \emptyset$ , 有

$$B_0 = N(B) \cap (A - \underline{A}(t)) \neq \emptyset.$$

定义  $B$  上子集之间的影响关系链:

$$\begin{cases} B_1 := \{a_i \in B | N(a_i) \cap B_0 \neq \emptyset\}, \\ B_{p+1} := \{a_i \in B - \bigcup_{r=1}^p B_r | N(a_i) \cap B_p \neq \emptyset\}. \end{cases}$$

归纳证明: 对任意  $a_i \in B_p$ , 存在  $\delta t > 0$ , 当  $t' \in (t, t + \delta t)$  时,  $\dot{x}_i(t') > 0$ .

由引理2,  $a_i \in B_1$  时命题成立.

假设  $a_j \in B_p$  命题成立, 若  $a_i \in B_{p+1}$  命题不成立, 根据引理1,  $t' \in (t, t + \delta t)$  时  $x_i(t')$  不动. 因此

$$x_i(t') = \underline{\Delta}(t') = \underline{\Delta}(t), \quad a_i \in \underline{A}(t').$$

而由假设, 对  $a_j \in B_p, x_j(t') > \underline{\Delta}(t) = \underline{\Delta}(t')$ . 所以对任意  $t' \in (t, t + \delta t)$ , 可令  $B_p$  为  $B_0, B_{p+1}$  为  $B_1$ . 根据引理2,  $\dot{x}_i(t') > 0$ , 与“ $x_i(t')$ 不动”相矛盾.

证毕.

**定理 2** 如果  $G$  强连通, 个体状态为一维的光滑的多个体协同动力学系统(5)所有个体状态将趋于一致, 也即存在  $\eta \in [\underline{\Delta}(0), \bar{\Delta}(0)]$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i = \eta, \quad i = 1, \dots, n.$$

证 设结论不成立, 则  $\underline{\Delta}(\infty) \neq \bar{\Delta}(\infty)$ . 存在  $a_i \in \underline{A}$ ,  $a_j \in \bar{A}$ ,  $\tilde{x}_i = \underline{\Delta}(\infty)$ ,  $\tilde{x}_j = \bar{\Delta}(\infty)$  为不动点.  $G$  强连通, 则以下两式均成立:

$$\begin{aligned} S(a_i) \cap (A - \underline{A}) &\supset \{a_j\} \neq \emptyset; \\ S(a_j) \cap (A - \bar{A}) &\supset \{a_i\} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

由引理3,  $\frac{d}{dt}\tilde{x}_i > 0$  且  $\frac{d}{dt}\tilde{x}_j < 0$ , 这与它们是系统的不动点矛盾. 证毕.

由定理2, 系统每个独立基本子系统存在自身的一致极限状态, 令系统共有  $p$  个独立基本子系统, 其一致状态极限分别记为  $\eta_1, \dots, \eta_p$ . 显然

$$\Lambda = \{\eta_1, \dots, \eta_p\} \subset \Delta(\infty).$$

**定理3**  $\Delta(\infty) = [\underline{\Delta}(\infty), \bar{\Delta}(\infty)]$  为个体状态为一维的光滑的多个体协同动力学系统(5)个体状态最小闭覆盖  $\Delta(t)$  在  $t \rightarrow \infty$  时的极限, 则

$$\underline{\Delta}(\infty) = \min \Lambda, \bar{\Delta}(\infty) = \max \Lambda.$$

证 由引理1,  $\Delta(\infty) = [\underline{\Delta}(\infty), \bar{\Delta}(\infty)]$  存在.  $A_r$  是非独立基本集, 令  $a_i \in A_r$ , 假设

$$\tilde{x}_i = \underline{\Delta}(\infty) < \min \Lambda$$

是不动点. 由命题1, 存在独立基本集  $A_s$ ,  $A_s \subset S(a_i)$ . 令  $A_s$  中个体状态的极限是  $\eta_s$ ,

$$\tilde{x}_i < \min\{\eta_i | i = 1, \dots, p\} \leq \eta_s,$$

$$S(a_i) \cap (A - \underline{A}) \supset A_s \neq \emptyset.$$

由引理3,  $\frac{d}{dt}\tilde{x}_i(0) > 0$ , 与  $\tilde{x}_i$  为不动点矛盾. 同理  $\tilde{x}_i > \max \Lambda$  也不成立. 证毕.

**推论1** 一维的光滑的多个体协同动力学系统(5)所有个体状态趋于一致充要条件是系统存在唯一的独立基本子系统.

证 充分性. 独立基本子系统唯一, 则根据定理3,  $\underline{\Delta}(\infty) = \bar{\Delta}(\infty)$ .

必要性. 系统存在两个以上独立基本子系统, 可令  $A_1, A_2$  为两个独立基本集,  $\Delta_1(t), \Delta_2(t)$  分别为  $A_1, A_2$  中个体状态  $t$  时最小闭覆盖. 适当选取系统的状态初值, 使  $\Delta_1(0) \cap \Delta_2(0) = \emptyset$ , 则由引理1,  $\Delta_1(\infty) \cap \Delta_2(\infty) = \emptyset$ . 证毕.

## 5 高维系统(Higher dimensional system)

下面讨论  $x_i \in \mathbb{R}^m$  时的情况.

$x \in \mathbb{R}^m$ , 令  $\pi_k(x)$  是取  $x$  第  $k$  分量的分量函数.

**定义6** 1)  $\Delta_k(t) = [\underline{\Delta}_k(t), \bar{\Delta}_k(t)]$  称为  $t$  时个体状态  $k$  分量  $\pi_k(x_1(t)), \dots, \pi_k(x_n(t))$  的最小闭覆盖,

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_k(t) &= \min\{\pi_k(x_1(t)), \dots, \pi_k(x_n(t))\}, \\ \bar{\Delta}_k(t) &= \max\{\pi_k(x_1(t)), \dots, \pi_k(x_n(t))\}. \end{aligned}$$

2)  $\Delta(t) = \Delta_1(t) \times \dots \times \Delta_m(t)$  称为  $t$  时个体状态  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^m$  最小闭立方覆盖.

系统(5)在  $k$  分量轴上的投影系统为

$$\pi_k(\dot{x}_i) = \sum_{a_j \in N(a_i)} -g_{ij}(\|x_i - x_j\|) \frac{\pi_k(x_i - x_j)}{\|x_i - x_j\|}. \quad (7)$$

由于  $g_{ij}(\|x_i - x_j\|)$  是  $x_i - x_j$  方向上的强度, 因此其在投影  $\pi_k(x_i - x_j)$  方向上的强度就为

$$\begin{aligned} \pi_k(g_{ij}(\|x_i - x_j\|)) &= \\ g_{ij}(\|x_i - x_j\|) \|\cos \theta_k\|, \\ \|\cos \theta_k\| &= \|\pi_k(x_i - x_j)\| / \|x_i - x_j\|. \end{aligned}$$

此外  $\pi_k(x_i - x_j)$  的单位矢量为

$$\bar{r}_{ij}^{(k)} = \pi_k(x_i - x_j) / \|\pi_k(x_i - x_j)\|,$$

因此投影系统(7)亦可写为以下等价形式:

$$\pi_k(\dot{x}_i) = \sum_{a_j \in N(a_i)} -\pi_k(g_{ij}(\|x_i - x_j\|)) \bar{r}_{ij}^{(k)}. \quad (8)$$

投影系统(8)具有以下特点:

1) 系统(5)是光滑动力学系统, 则其投影系统(8)也是光滑动力学系统.

2) 系统(5)是协同系统, 根据式(6),

$$\pi_k(g_{ij}(\|x_i - x_j\|)) \begin{cases} = 0, & \pi_k(x_i - x_j) = 0, \\ > 0, & \pi_k(x_i - x_j) \neq 0. \end{cases} \quad (9)$$

由此可见, 如果系统(5)是光滑的协同系统, 则其投影系统(8)是一维光滑协同系统. 根据引理1、定理2和定理3:

1)  $0 < t_1 < t_2 < \infty$ , 则  $\Delta_k(t_2) \subset \Delta_k(t_1)$ ;

2) 独立基本子系统的投影系统趋于自身的一致极限状态. 若令  $A_s$  是独立基本集, 则存在  $\eta_{sk} \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_k(x_i) = \eta_{sk}; a_i \in A_s.$$

3)  $\pi_k(x_1), \dots, \pi_k(x_n)$  的最小闭覆盖  $\Delta_k(t)$  的极限  $\Delta_k(\infty) = [\underline{\Delta}_k(\infty), \bar{\Delta}_k(\infty)]$  存在.

令  $\Lambda_k = \{\eta_{1k}, \dots, \eta_{pk}\}$  是系统独立基本系统  $k$  分量轴投影系统的一致极限状态, 则

$$\underline{\Delta}_k(\infty) = \min \Lambda_k, \bar{\Delta}_k(\infty) = \max \Lambda_k.$$

根据投影系统的性质, 易于将一维系统的结论引申到  $m$  维系统. 总结为以下的定理.

**定理4** 协同动力学系统(5)是光滑动力学系统, 则其具有以下性质:

1)  $0 < t_1 < t_2 < \infty$ , 则  $\Delta(t_2) \subset \Delta(t_1)$ ;

2) 独立基本集  $A_s (s = 1, \dots, p)$  中个体分别趋于各自的一致极限状态, 也即存在常向量  $\eta_s \in \mathbb{R}^m$ , 对任意  $a_i \in A_s$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i = \eta_s$ ;

3) 个体状态  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^m$  最小闭立方覆盖

$\Delta(t)$  的极限存在:

$$\begin{aligned} \Delta(\infty) &= \Delta_1(\infty) \times \cdots \times \Delta_m(\infty), \\ \Delta_k(\infty) &= [\underline{\Delta}_k(\infty), \bar{\Delta}_k(\infty)], \\ \underline{\Delta}_k(\infty) &= \min\{\pi_k(\eta_1), \cdots, \pi_k(\eta_p)\}, \\ \bar{\Delta}_k(\infty) &= \max\{\pi_k(\eta_1), \cdots, \pi_k(\eta_p)\}. \end{aligned}$$

其中  $\Lambda = \{\eta_1, \cdots, \eta_p\}$  是系统所有独立基本子系统一致极限状态的集合.

4) 所有个体状态趋于一致的充要条件是系统存在唯一的独立基本子系统.

定理4的3)可以改进为定理5.

**定理 5**  $\Lambda = \{\eta_1, \cdots, \eta_p\}$  是多个体协同动力学系统所有独立基本子系统一致极限状态的集合,  $\Xi \subset \mathbb{R}^m$  是包含  $\Lambda$  的最小凸集, 则  $t \rightarrow \infty$ ,

$$x_i(t) \in \Xi, \quad i = 1, \cdots, n.$$

**证** 令  $P$  是  $\Xi$  的外侧面或外侧棱. 存在  $\mathbb{R}^m$  上的等距变换  $\mathcal{T}$  使得  $\mathcal{T}P$  的某一分量均为  $a$ .

用  $\mathcal{T}$  对协同动力学系统状态方程(5)变换, 这样就得到系统在  $\mathcal{T}^{-1}(\mathbb{R}^m)$  中的形式( $\mathcal{T}^{-1}$  为  $\mathcal{T}$  的逆变换). 令  $\Delta_T(\infty)$  为  $\mathcal{T}x_1, \cdots, \mathcal{T}x_n$  在  $\mathcal{T}^{-1}(\mathbb{R}^m)$  中的闭立方覆盖的极限, 由协同动力学系统的仿射性和定理4的3),  $t \rightarrow \infty$  时,  $\mathcal{T}x_1, \cdots, \mathcal{T}x_n \in \Delta_T(\infty)$ , 并且  $P$  在  $\Delta_T(\infty)$  的一个外侧面上. 这样,  $\mathcal{T}x_1, \cdots, \mathcal{T}x_n$  必定在  $P$  的一侧, 也即  $x_1, \cdots, x_n$  在  $P$  的一侧. 而  $x_1, \cdots, x_n$  在凸集  $\Xi$  所有外侧面或外侧棱的一侧, 则  $x_1, \cdots, x_n$  必属于  $\Xi$ . 证毕.

**评论 2** 如果对任意的  $i, j$ , 存在常数  $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$ ,

$$\gamma_{ij} = g_{ij}(\|x_i - x_j\|) / \|x_i - x_j\|,$$

则方程(5)是线性系统. 线性系统是仿射系统的特例. 文献[8]基于矩阵代数对一阶线性系统证明了与本文相一致的结论, 并给出了确定线性系统个体极限位置方法. 文献[9] 则对二阶线性系统证明了类似的结果.

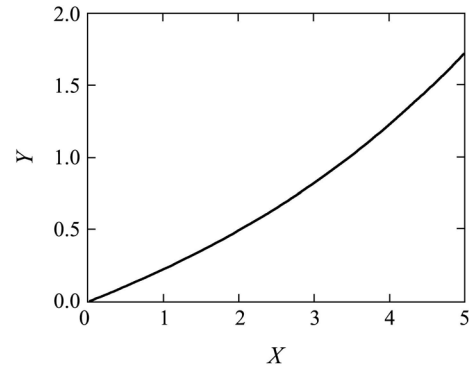
**评论 3** 本文尽量一般地研究了一阶协同动力学系统的渐近性质. 包括高维仿射非线性, 任意有向作用关系网络, 不同个体间的影响强度函数可以不同. 结果显然蕴含相应的特殊情况, 如作用关系网络对称, 不同个体间影响强度函数相同.

### 6 模拟(Simulation)

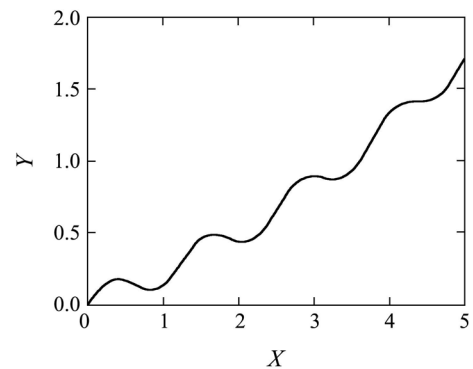
本节针对  $x_i \in \mathbb{R}^2$  的情况, 通过例子的计算来说明前面证明的结果. 例子假定个体间影响强度函数  $g_{ij}$  相同, 也即  $g_{ij}(y) = g(y)$ .

**例 1** 通讯结构强连通与不同影响函数例.

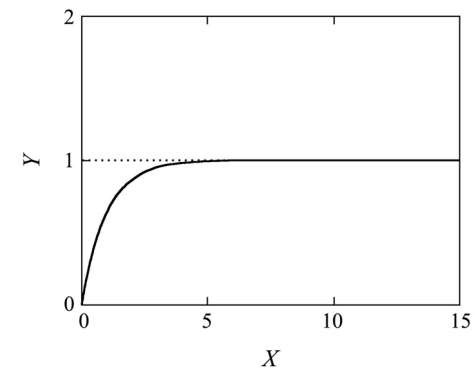
图1给出了4个函数, 包括无界单调, 无界非单调, 有界单调和有界非单调. 这些函数均过坐标原点且在域  $[0, \infty)$  上连续可微. 当它们为系统(5)的影响强度函数时, 系统(5)是光滑动力学系统.



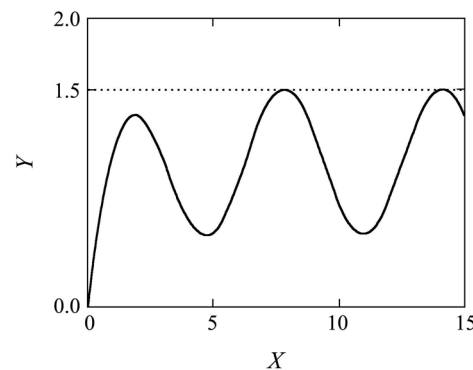
(a)  $g(y) = e^{y/5} - 1$



(b)  $g(y) = e^{y/5} + 0.1 \sin(5y) - 1$



(c)  $g(y) = 1 - e^{-y}$



(d)  $g(y) = 1 - e^{-y} + 0.5 \sin y$

图 1 例1的影响强度函数

Fig. 1 Functions of affecting strength in Example 1

图2给出了一个强连通系统的通讯结构,包括3个个体.图3则是该系统的轨迹图.它们分别对应图1的4种影响强度函数.模拟计算显示影响强度函数取任何一个,系统所有个体均趋于状态一致,但影响强度函数不同,系统的一致极限状态不同.

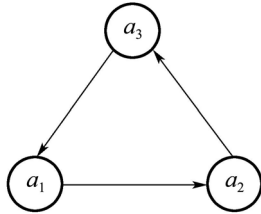
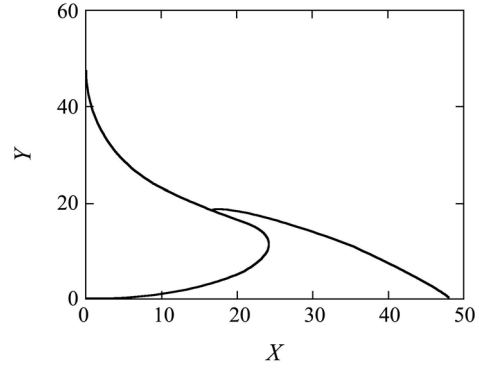


图2 例1系统结构

Fig. 2 Structure of system in Example 1



(d)

图3 例1轨迹图

Fig. 3 Trajectories in Example 1

**例2** 独立基本子系统唯一且存在非独立基本子系统例.

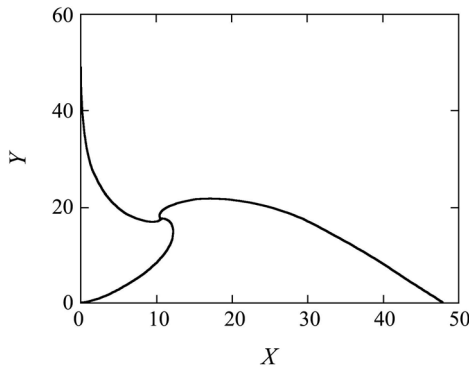
系统结构如图4所示,包括3个基本集:

$$A_1 = \{a_1, a_2, a_3\},$$

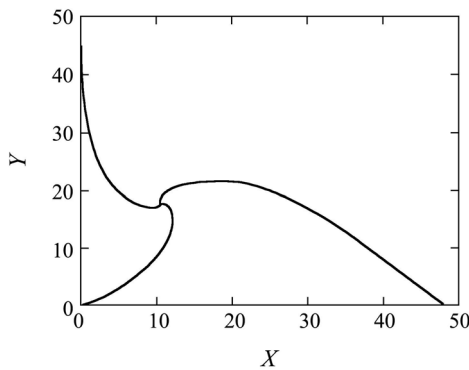
$$A_2 = \{a_4, a_5, a_6\},$$

$$A_3 = \{a_7, a_8, a_9\}.$$

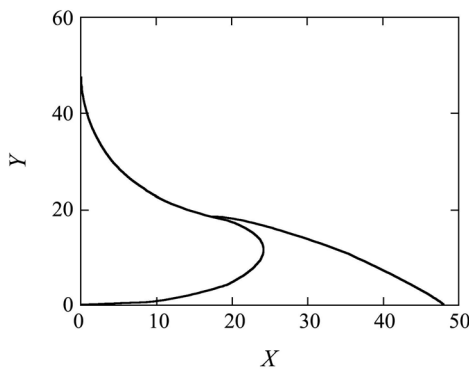
$\xi_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $\xi_2 = \{x_4, x_5, x_6\}$ ,  $\xi_3 = \{x_7, x_8, x_9\}$  分别是它们的状态集.唯一的独立基本集是  $A_1$ ,  $A_2$  和  $A_3$  是非独立基本集.图5是其取影响强度函数  $g(x) = -10(e^{-x} - 1)x$  时的轨迹.显示了系统所有个体趋于状态一致的过程.系统所有个体一致状态就是独立基本集  $A_1$  所对应独立基本子系统个体的一致状态.



(a)



(b)



(c)

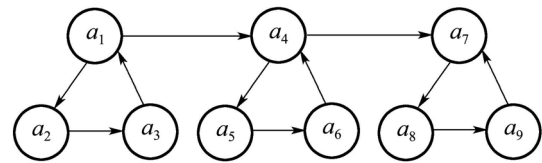


图4 例2系统结构

Fig. 4 Structure of system in Example 2

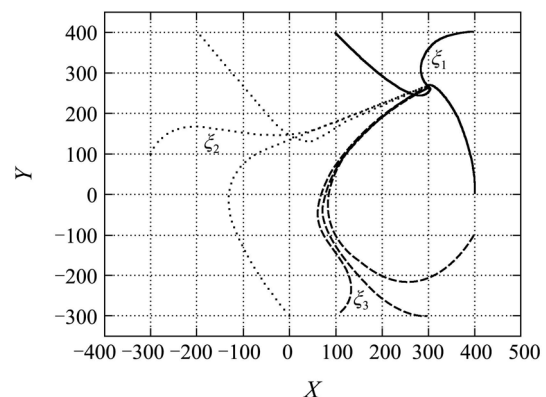


图5 例2轨迹图

Fig. 5 Trajectories in Example 2

**例 3** 存在多个独立基本子系统且存在非独立子系统例.

系统结构如图6所示, 包括4个基本集:

$$A_1 = \{a_1, a_2, a_3\}, A_2 = \{a_4, a_5, a_6\},$$

$$A_3 = \{a_7, a_8, a_9\}, A_4 = \{a_{10}, a_{11}, a_{12}\}.$$

$\xi_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $\xi_2 = \{x_4, x_5, x_6\}$ ,  $\xi_3 = \{x_7, x_8, x_9\}$ ,  $\xi_4 = \{x_{10}, x_{11}, x_{12}\}$ 是基本集的状态集. 其中 $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ 对应系统3个独立基本子系统的状态集,  $\xi_4$ 为系统非独立基本子系统的状态集. 图7是其取影响强度函数 $g(x) = -10(e^{-x} - 1)x$ 时的轨迹. 显示了独立基本子系统个体趋于各自一致极限状态, 非独立基本子系统个体状态趋于独立基本子系统一致极限状态凸集的过程.

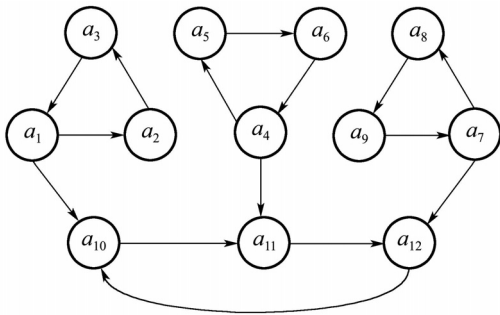


图 6 例3系统结构

Fig. 6 Structure of system in Example 3

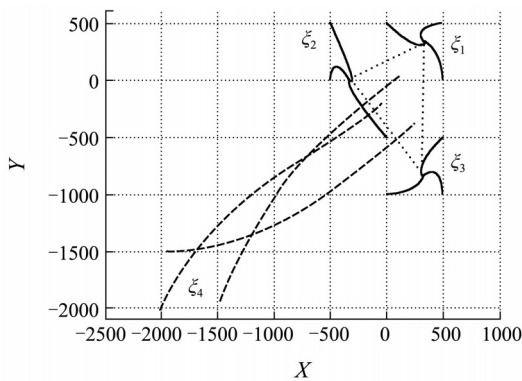


图 7 例3轨迹图

Fig. 7 Trajectories in Example 3

**参考文献(References):**

- [1] HEPPNER F, GREANDER U. A stochastic nonlinear model for coordinated bird flocks[M] //KRASNER S. *The Ubiquity of Chaos*. Washington, DC: AAAs Publications, 1990: 233 – 238.
- [2] BAUSOB D, GIARREA L, PESENTIB R. Non-linear protocols for optimal distributed consensus in networks of dynamic agents[J]. *Systems & Control Letters*, 2006, 55(1): 918 – 928.
- [3] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [4] OLFATI-SABER R, FAX J A, MURRAY R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(3): 215 – 233.
- [5] LIN Z Y, FRANCIS B, MAGGIORE M. Necessary and sufficient conditions for formation control of unicycles[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(1): 121 – 127.
- [6] REN W, BEARD R W, ATKINS E M. Information consensus in multivehicle cooperative control[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2007, 27(2): 71 – 82.
- [7] JIN J D, ZHENG Y F, SHAO H B, et al. Consensus problem of second-order multi-agent system in directed network: a matrix analysis approach[C] // *Chinese Control and Decision Conference*. Singapore: IEEE Industrial Electronics Chapter, 2010: 3970 – 3975.
- [8] JIN J D, ZHENG Y F. The Consensus of multi-agent system under directed network-a matrix analysis approach[C] // *Proceedings of the 7th IEEE International Conference on Control and Automation*. Piscataway, NJ: IEEE Computer Society, 2010: 280 – 284.
- [9] JIN J D, ZHENG Y F. Collective behavior of second-order multi-agent system in directed network[C] // *Proceedings of the 8th IEEE International Conference on Control and Automation*. Piscataway, NJ: IEEE Computer Society, 2010: 376 – 381.
- [10] ARNOLD V I. *Ordinary Differential Equation*[M]. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1978.

**作者简介:**

**金继东** (1962—), 男, 副教授, 博士, 目前研究方向为多个体系统的基础理论与应用, E-mail: jjd@cueb.edu.cn;

**郑毓蕃** (1941—), 男, 教授, 上海大学系统科学研究所所长, 澳大利亚国家信息通讯技术中心(NICTA)教授, 墨尔本大学荣誉教授, 近年研究方向是非线性复杂性、复杂网络系统及在生命科学的应用, E-mail: yfzheng@shu.edu.cn.