

推广形式传输控制协议流量控制方程的方差稳定性

樊 华, 山秀明, 任 勇, 袁 坚

(清华大学 电子工程系, 北京 100084)

摘要: 给定计算机网络中的传输控制协议(transmission control protocol, TCP)流量控制算法, 如何确定其稳定域, 是网络设计中的一个重要问题. 由于网络上控制算法受大量随机因素影响, 这相当于对一个由随机微分/差分方程描述的控制系统进行稳定性分析. 目前已有研究大多直接对系统方程取期望, 转为讨论期望的稳定性, 而简单忽略受控TCP流的随机震荡. 本文意在指出这种随机震荡给稳定性带来的不可忽视的影响. 本文以TCP/RED(含早期随机检测的TCP流)系统为例, 首先, 从系统的随机微分方程出发, 通过在平衡点处线性化, 将系统化为含加乘混合噪声的多维线性时不变系统. 然后, 给出了分别对应时间连续与离散情况的推广的TCP流量控制方程, 即含多噪声源的一次时不变随机微分/差分方程组. 接着, 对此推广形式, 推导了其协方差矩阵所满足的矩阵方程, 并在此基础上, 得到了协方差矩阵极限渐近稳定的充要条件以及此极限的计算公式. 在工程设计中, 此条件可以作为系统稳定与否的一个替代判据, 方差极限公式可用来估计系统的运动范围. 最后, 将一般公式应用到具体例子上, 展示了考虑方差稳定性后系统稳定域的变化. 进一步, 仿照确定性系统中的处理方法, 本文结论还可推广到非线性系统及变系统.

关键词: TCP流量控制方程; 随机系统; 加乘混合噪声; 协方差矩阵; 稳定性

中图分类号: TP202 **文献标识码:** A

Stability of covariance matrix for generalized transmission control protocol flow control equations

FAN Hua, SHAN Xiu-ming, REN Yong, YUAN Jian

(Department of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Given the Transmission Control Protocol(TCP) flow control algorithm in a computer network, how to calculate its stability range is an important problem in the design of computer network. Because the control algorithm is affected by many random factors in the network, solving this problem means doing stability analysis for the system described by stochastic differential/difference equations. Current studies mostly take the expectations on both sides of the system equation directly, and simplify this problem into the stability analysis for the expectation, which simply neglects the random variations in the controlled TCP flows. This paper aims at revealing the un-negligible influence from such random variations to the system stability. Using TCP/RED(TCP flows with random early detection) as an example, based on the stochastic differential equations of the system, the system is converted into a multi-dimensional linear time-invariant system with mixed additive and multiplicative noises by linearization at the equilibrium point. Then, generalized TCP flow control equations for continuous-time and discrete-time cases respectively are given, which are the first-degree time-invariant stochastic differential or difference equations with multi-noise-inputs. After that, the covariance matrix equation for such generalized system is derived; and based on this matrix equation, the sufficient and necessary condition when the covariance matrix has an asymptotically stable limit is presented, together with the expression of this limit. In engineering design, this condition can be regarded as a substitute criterion for estimating the motion domain. Finally, this general condition is applied to a specific example for demonstrating the change of the stability range when the stability of covariance is considered. Moreover, the results in this paper can be extended to the nonlinear system or time-varying system when treated by similar methods used in deterministic cases.

Key words: TCP flow control equations; stochastic system; mixed additive and multiplicative noises; covariance matrix; stability

1 引言(Introduction)

在计算机网络中, 如何对传输控制协议(transmission control protocol, TCP)流进行适当控制, 从而使节点路由器保持畅通状态, 是网络设计中的一个经

典问题. 这一问题的核心在于如何使路由器上的队列稳定地保持在某一合理范围内. 事实上, 每一个TCP流都在根据加性增加、乘性减少的策略调整自身发送窗口, 也即发送速率的大小: 当一组数据

包顺利抵达目的地后,在下一个时段发送窗口加一;如果出现丢包,则在下一个时段发送窗口减半.而路由器可以通过适当丢弃数据包来间接调整TCP源端的发送速率(比如随机早期检测,即random early detection, RED).因此,这样一个系统可以看成是一个反馈控制系统^[1].此系统的平衡点求解并不复杂,但困难在于如何判断平衡点的稳定性——这对应于实际系统中路由器上队列长度能否被稳定地控制在合理范围内.

对这一问题的研究已经产生了丰富的结果.研究者们从不同角度给出了解决平衡点稳定性的具体协议^[2~5],同时,也提出了各种对网络流量进行预测的数学模型^[6~8].其中,一种广泛使用的模型是网络流量的流体模型^[7~10].流体模型是通过对系统的随机微分方程取期望而得到的一组确定性微分方程,在本质上它描述的是系统期望(均值)的行为.但是,即便系统期望稳定在某一点,系统的真实轨迹仍然是此点附近的一个随机震动.虽然在工程上,可以通过增加控制模块(比如PI控制器^[8], Smith预测控制器^[11])来降低随机震动的影响,但在理论上,此震动是否会影响系统的稳定性仍是一个需要仔细讨论的问题.

描述一个随机系统的最自然的数学工具就是随机微分/差分方程.文献[7]给出了单TCP流满足的随机微分方程.文献[12]在此基础上给出了单瓶颈链路聚合流的随机微分方程,并讨论了线性化保留加性噪声项后系统的稳定性及方差计算.但是注意到:一方面,加性噪声并不影响线性系统的稳定性,其影响的只是系统方差的大小,或者说是系统的稳定裕度;另一方面,TCP使用的乘性减少策略意味着其调整幅度并非一个平稳的随机变量,而应与自身状态线性相关.因此,噪声项中至少还应保留一次部分,也即乘性噪声部分.由此,讨论乘性噪声项对系统稳定性带来的影响就成为本文需要解决的一般问题.进一步,即使是一个仅含乘性噪声的系统,只要其确定性部分平衡点不为零,当把坐标零点平移到平衡点以对确定性部分进行线性化时,自然会在随机部分产生一个非退化的加性噪声项.因此本文需要讨论含加乘混合噪声的多维线性系统(指确定性部分为线性)的稳定性问题.再进一步,为了描述不同噪声源对系统造成的影响,本文还允许系统含有多个彼此间关系已知的噪声源,只要每个噪声的系数都是系统变量的一次多项式.这就构成了推广形式的TCP流量控制方程,即含多噪声源的一次时不变

随机微分/差分方程组(此处以“一次”称呼,是为强调随机部分同时含有一次项和零次项,以区别随机部分仅含一次项的随机线性系统)¹.

这类系统与随机项系数为常数(加性噪声)确定项系数为线性的系统相比,由于含乘性(线性)噪声项,因此其解函数不仅是系数矩阵的函数,且必然涉及矩阵乘法是否可交换.虽然当系数矩阵完全可交换时可以显式写出解公式,但对一般的系数矩阵,则很难凑出解公式^[13,14].而且由于有乘性噪声,使得变换域方法很难使用.因此,这类系统目前并无一般的解公式.其次,与线性随机系统(只含乘性的确定项与随机项,因此系统对解过程线性)相比,由于加性噪声的影响,系统以概率1超出任何有限边界^[15],因此系统并不具有传统意义上的随机稳定性.正是因为这两个原因,使得此类系统长期被理论研究者忽视,至今仍缺乏有效的分析和处理手段.

但是如果考虑到TCP流量控制系统的具体工程背景,就会发现在实际工程设计中“稳定性”的概念可以适当拓展.因为TCP协议本身具有拥塞后强制恢复初始值的自修复能力,所以TCP流量控制并不需要严格意义上的随机稳定性(即,几乎所有轨道都要求稳定),而只需要将系统的轨迹在大部分时间内控制在合理范围,使系统出错的频率不要太高即可.事实上,对于很多具有一定容错和自恢复能力的系统,工程上关心的问题不再是如何使系统轨道严格稳定,而仅仅是如何使系统出错频率不要太高以致超出系统的自修复能力.对于此类系统,本文以系统状态向量的协方差矩阵作为分析对象,考察系统何时具有有限的方差极限(这意味着系统在大部分时间内轨道处于某个由方差极限确定的范围之内),并以此作为判断系统“稳定”与否的依据.为此,本文将针对推广形式的TCP流量控制方程,分别给出离散时间与连续时间下系统方差极限渐进稳定的充要条件,以及此极限的显式计算公式.从定理证明过程中还可以看到以协方差矩阵为对象的另一个好处:由于协方差矩阵满足的方程是确定性方程,因此当系数矩阵随时间变化时,可直接类比确定性系统的处理方法,借助不等式控制获得相应的时变系统方差稳定性判决条件.

最后,本文将一般结论应用于TCP/RED系统的一个具体场景,给出了系统方差稳定性与期望稳定性的稳定域对比图.从图中可以看到二者的明显差异,这对工程设计有重要意义.

¹在确定性系统中,人们往往将“一次”与“线性”混同使用,因为二者只差一个坐标平移.但在随机系统中,由于同时含有确定性部分与随机部分,很难通过平移同时消除两部分中的常数项.因此,本文严格区分此二词.“线性”仅指不含常数项的情况.

2 TCP/RED系统模型(Model of TCP/RED system)

文献[12]中已经给出了单瓶颈链路TCP/RED系统所满足的随机微分方程. 当RED处于线性反馈区(即路由器中队长处于合理范围内)时, 系统方程为:

$$\begin{aligned} dW_t &= \left(\frac{n}{R + \frac{Q_t}{C}} - \frac{\lambda_t}{2n} W_t \right) dt + \frac{\sqrt{a\lambda_t}}{2n} W_t dB_t, \\ \frac{dQ_t}{dt} &= \frac{W_t}{R + \frac{Q_t}{C}} - C, \\ \frac{dA_t}{dt} &= \frac{n \ln(1-h)}{R + \frac{Q_t}{C}} (A_t - Q_t), \\ \lambda_t &= \frac{W_t}{R + \frac{Q_t}{C}} \cdot \frac{A_t - q_{\min}}{q_{\max} - q_{\min}} p_{\max}, \end{aligned}$$

其中: W_t 是聚合流总窗口大小, Q_t 是队列长度, A_t 是队长的滑动平均, 此三者为系统状态变量(λ_t 只是中间变量, 不是状态变量); R 是传输延时, C 是总带宽, n 是链路数, B_t 仍表示标准一维布朗运动; 其他都是系统中事先设定好的参数.

记 $(\hat{W}, \hat{Q}, \hat{A})$ 为系统确定性部分的平衡点. 文献[12]中已经给出了此平衡点的存在条件及计算公式. 本文直接在此平衡点处对确定性部分与随机部分分别线性化, 令

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t &\triangleq (W_t - \hat{W}, Q_t - \hat{Q}, A_t - \hat{A})^T, \\ \mathbf{D} &\triangleq \left(\frac{n}{R + \frac{Q_t}{C}} - \frac{\lambda_t}{2n} W_t, \frac{W_t}{R + \frac{Q_t}{C}} - C, \right. \\ &\quad \left. \frac{n \ln(1-h)}{R + \frac{Q_t}{C}} (A_t - Q_t) \right)^T, \\ \mathbf{S} &\triangleq \left(\frac{\sqrt{a\lambda_t}}{2n} W_t, 0, 0 \right)^T, \\ \Phi &\triangleq \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial (W_t, Q_t, A_t)} \Big|_{(W_t, Q_t, A_t) = (\hat{W}, \hat{Q}, \hat{A})}, \\ \Upsilon &\triangleq \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial (W_t, Q_t, A_t)} \Big|_{(W_t, Q_t, A_t) = (\hat{W}, \hat{Q}, \hat{A})}, \\ \Psi &\triangleq \mathbf{S} \Big|_{(W_t, Q_t, A_t) = (\hat{W}, \hat{Q}, \hat{A})}, \end{aligned}$$

其中: $\mathbf{X}_t \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 为新的状态变量; $\mathbf{D}, \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 分别为(非线性)系统的确定性部分与随机部分; $\Phi, \Upsilon \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 为线性化后各项系数, 它们皆可具体算出, 此处省略计算细节, 仅以符号表示.

线性化后的结果记为

$$d\mathbf{X}_t = \Phi \mathbf{X}_t dt + (\Upsilon \mathbf{X}_t + \Psi) dB_t. \quad (1)$$

这就是含加乘混合噪声的线性随机微分方程组,

也可称为一次随机微分方程组(因为其确定性部分与随机部分的系数皆为系统变量的一次多项式. 但, 其中确定性部分的常数项可以通过坐标平移消掉, 故确定性部分只保留线性项). 进一步, 如果链路上还有其他形式的数据流(比如UDP流)或者影响带宽的随机因素(比如无线链路), 这些随机因素也应被一并处理. 他们的表现形式就是在方程(1)的右端加上更多的由不同随机过程及其一次系数构成的随机项. 因此, TCP流量控制方程可以被推广为含多噪声源的一次随机微分方程组. 再进一步, 对于有些工程系统, 其只在离散时间上进行调整, 故用差分方程描述将是更合适的选择. 而且对于随机差分方程, 其离散的噪声过程可以有更丰富的选择. 为此本文将含多噪声源的一次随机差分方程组一并予以处理. 这两类系统共同构成了推广形式的TCP流量方程. 它们的方差稳定性分析就是下节主题. 本文中 will 只讨论系数时不变的情况.

3 一般结果(General results)

3.1 离散时间系统(Discrete time system)

m 维离散时间多噪声源一次随机系统的一般形式如下:

$$\begin{cases} \mathbf{X}(k+1) = \Phi \mathbf{X}(k) + \\ \quad \sum_{i=1}^r (\Upsilon_i \mathbf{X}(k) + \Psi_i) v_i(k+1), \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 为系统状态变量. $\Phi, \Upsilon_1, \dots, \Upsilon_r \in \mathbb{R}^{m \times m}$; $\Psi_1, \dots, \Psi_r \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 皆为常数矩阵. v_1, \dots, v_r 为 r 个不同来源的1维噪声, 若令 $\mathbf{V} = (v_1, \dots, v_r)^T$, 则 $\{\mathbf{V}(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ 构成 r -维宽平稳过程, 其数学期望不妨设为零(否则仅需将期望归并到确定项中即可), 其协方差矩阵记为 $\Theta = (\theta_{ij})_{i,j=1}^r = (E[v_i v_j])_{i,j=1}^r$. \mathbf{X}_0 为系统初始值(二阶矩存在). 此外, 本文假设 $\mathbf{V}(k)$ 相对于历史独立, 也即: 若以 $\{\mathfrak{F}_k = \sigma(\mathbf{X}_0, \mathbf{V}(1), \dots, \mathbf{V}(k))\}_{k \in \mathbb{N}}$ 表示系统的 σ -域流, 则 $\mathbf{V}(k+1)$ 关于 \mathfrak{F}_k 独立.

本文有如下结论:

引理 1 系统(2)的数学期望存在渐近稳定极限的充要条件是: 矩阵 Φ 的所有特征值的模皆小于1. 此时, 极限即为0.

证 式(2)两端同时取数学期望, 由 $\mathbf{V}(k)$ 相对于历史的独立性, 有

$$E[\mathbf{X}(k+1)] = \Phi E[\mathbf{X}(k)]. \quad (3)$$

故得结论. 证毕.

注 1 对于任意给定时刻, 式(2)两端皆存在数学期望, 这一点是由 \mathbf{X}_0 及 $\{\mathbf{V}(k)\}$ 都存在二阶矩递推保证的.

注2 如果结论变为“数学期望存在极限”,则充要条件变为“矩阵 Φ 的所有特征值或者等于1,或者模小于1,且当1是特征值时其只能是 Φ 的极小多项式的单根”.但特征值恰好等于1并非一个稳定的物理可实现状态,故在今后讨论中本文不再关注此一特例,而要求系统不仅存在极限,此极限点还必需渐近稳定.

定理1 系统(2)在满足引理1的条件下,其协方差矩阵存在渐近稳定极限的充要条件是:矩阵 $\Phi \otimes \Phi + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \theta_{ij} \Upsilon_j \otimes \Upsilon_i$ 的所有特征值的模皆小于1.此时,极限为

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \text{vec}(\text{Cov}[\mathbf{X}(k)]) = (\mathbf{I}_{m^2} - \Phi \otimes \Phi - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \theta_{ij} \Upsilon_j \otimes \Upsilon_i)^{-1} \cdot (\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \theta_{ij} \Psi_j \otimes \Psi_i), \quad (4)$$

其中: \otimes 为Kronecker积,vec为按列向量化, \mathbf{I}_{m^2} 为 $m^2 \times m^2$ 的单位矩阵.

证 令 $\mathbf{Y}(k) = \mathbf{X}(k) - \mathbf{E}[\mathbf{X}(k)]$, $\mathbf{Y}(k)$ 零期望且保持协方差阵不变,即

$$\mathbf{E}[\mathbf{Y}(k) \mathbf{Y}^T(k)] = \text{Cov}[\mathbf{X}(k)]. \quad (5)$$

将 \mathbf{Y} 代入式(2)并结合式(3)有

$$\mathbf{Y}(k+1) = \Phi \mathbf{Y}(k) + \sum_{i=1}^r (\Upsilon_i \mathbf{Y}(k) + \Upsilon_i \mathbf{E}[\mathbf{X}(k)] + \Psi_i) v_i(k+1).$$

因此,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(k+1) \mathbf{Y}^T(k+1) &= \Phi \mathbf{Y}(k) \mathbf{Y}^T(k) \Phi^T + (I) + (II) + (III), \quad (6) \\ (I) &= (\sum_{i=1}^r (\Upsilon_i \mathbf{Y}(k) + \Upsilon_i \mathbf{E}[\mathbf{X}(k)] + \Psi_i) v_i(k+1)) \cdot \mathbf{Y}^T(k) \Phi^T, \\ (II) &= \Phi \mathbf{Y}(k) (\sum_{i=1}^r (\Upsilon_i \mathbf{Y}(k) + \Upsilon_i \mathbf{E}[\mathbf{X}(k)] + \Psi_i) \cdot v_i(k+1))^T, \\ (III) &= (\sum_{i=1}^r (\Upsilon_i \mathbf{Y}(k) + \Upsilon_i \mathbf{E}[\mathbf{X}(k)] + \Psi_i) v_i(k+1)) \cdot (\sum_{j=1}^r (\Upsilon_j \mathbf{Y}(k) + \Upsilon_j \mathbf{E}[\mathbf{X}(k)] + \Psi_j) v_j(k+1))^T. \end{aligned}$$

注意到 $\mathbf{Y}(k)$ 是 \mathfrak{F}_k 可测的, $v_i(k+1)$ 关于 \mathfrak{F}_k 独立,故:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(I)] &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[(I)|\mathfrak{F}_k]] = \mathbf{E}[(\sum_{i=1}^r (\Upsilon_i \mathbf{Y}(k) + \Upsilon_i \mathbf{E}[\mathbf{X}(k)] + \Psi_i) \cdot \mathbf{E}[v_i(k+1)|\mathfrak{F}_k]) \cdot \mathbf{Y}^T(k) \Phi^T] = 0. \end{aligned}$$

同理, $\mathbf{E}[(II)] = 0$.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(III)] &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[(III)|\mathfrak{F}_k]] = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mathbf{E}[(\Upsilon_i \mathbf{Y}(k) + \Upsilon_i \mathbf{E}[\mathbf{X}(k)] + \Psi_i) \cdot \mathbf{E}[v_i(k+1)v_j(k+1)|\mathfrak{F}_k] \cdot (\Upsilon_j \mathbf{Y}(k) + \Upsilon_j \mathbf{E}[\mathbf{X}(k)] + \Psi_j)^T] = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mathbf{E}[(\Upsilon_i \mathbf{Y}(k) + \Upsilon_i \mathbf{E}[\mathbf{X}(k)] + \Psi_i) \cdot \theta_{ij} (\Upsilon_j \mathbf{Y}(k) + \Upsilon_j \mathbf{E}[\mathbf{X}(k)] + \Psi_j)^T] = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r (\theta_{ij} \Upsilon_i \mathbf{E}[\mathbf{Y}(k) \mathbf{Y}^T(k)] \Upsilon_j^T + \theta_{ij} (\Upsilon_i \mathbf{E}[\mathbf{X}(k)] + \Psi_i) (\Upsilon_j \mathbf{E}[\mathbf{X}(k)] + \Psi_j)^T). \end{aligned}$$

式(6)两端取期望,并注意到式(5)及以上计算,有

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\mathbf{X}(k+1)] &= \Phi \text{Cov}[\mathbf{X}(k)] \Phi^T + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r (\theta_{ij} \Upsilon_i \text{Cov}[\mathbf{X}(k)] \Upsilon_j^T + \theta_{ij} (\Upsilon_i \mathbf{E}[\mathbf{X}(k)] + \Psi_i) (\Upsilon_j \mathbf{E}[\mathbf{X}(k)] + \Psi_j)^T). \quad (7) \end{aligned}$$

向量化后,有

$$\begin{aligned} \text{vec}(\text{Cov}[\mathbf{X}(k+1)]) &= (\Phi \otimes \Phi + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \theta_{ij} \Upsilon_j \otimes \Upsilon_i) \text{vec}(\text{Cov}[\mathbf{X}(k)]) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \theta_{ij} (\Upsilon_j \mathbf{E}[\mathbf{X}(k)] + \Psi_j) \otimes (\Upsilon_i \mathbf{E}[\mathbf{X}(k)] + \Psi_i). \quad (8) \end{aligned}$$

将此式看成关于 $\text{vec}(\text{Cov}[\mathbf{X}(k)])$ 的差分方程,即可得定理中所述之协方差矩阵存在渐近稳定极限的充要条件.

再令 $k \rightarrow +\infty$,并注意到定理中已包含引理1的条件,故 $\mathbf{E}[\mathbf{X}(k)] \rightarrow 0$.因此

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \text{vec}(\text{Cov}[\mathbf{X}(k)]) &= (\Phi \otimes \Phi + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \theta_{ij} \Upsilon_j \otimes \Upsilon_i) \cdot \lim_{k \rightarrow +\infty} \text{vec}(\text{Cov}[\mathbf{X}(k)]) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \theta_{ij} \Psi_j \otimes \Psi_i. \end{aligned}$$

将右端第一项移至左端,再同时左乘左端系数的逆,即得定理1中的极限点. 证毕.

注3 对比定理1与引理1可以看出,虽然乘性噪声系数对期望的收敛没有影响,但其对协方差的收敛性影响很大.因此,当随机系统需要考虑稳定性时,乘性噪声系数是不宜被忽略的.

注4 至少对于复矩阵来说,条件“ $\Phi \otimes \Phi + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \theta_{ij} \Upsilon_j \otimes \Upsilon_i$ 所有特征值的模皆小于1”与条件“ Φ 所有特征值的模皆小于1”互不包含对方.反例在一维复矩阵时可轻易构造.

推论 1 系统(2)中的加性噪声项对系统期望和协方差的稳定性判决皆无影响.

证 由引理1和定理1的稳定性判决条件中皆不含有 Ψ . 证毕.

3.2 连续时间系统(Continuous time system)

类似地, 连续时间 m 维多噪声源一次随机系统的一般形式如下:

$$\begin{cases} d\mathbf{X}(t) = \Phi\mathbf{X}(t)dt + \sum_{i=1}^r (\Upsilon_i\mathbf{X}(t) + \Psi_i)dB_i(t), \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, t \in \bar{\mathbb{R}}^+, \end{cases} \quad (9)$$

其中: $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 为系统状态变量. $\Phi, \Upsilon_1, \dots, \Upsilon_r \in \mathbb{R}^{m \times m}; \Psi_1, \dots, \Psi_r \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 皆为常数矩阵. B_1, \dots, B_r 为 r 个彼此独立的标准一维布朗运动, 它们代表着 r 个彼此独立的不同噪声源(由鞅表示定理知这是连续噪声的一般表达形式). 随机微分按伊藤(Itô)微分定义. \mathbf{X}_0 为系统初始值(二阶矩存在). 此外, 仍以

$$\{\mathfrak{F}_t = \sigma(\mathbf{X}_0, B_1(s), \dots, B_r(s) : 0 \leq s \leq t)\}_{t=0}^{+\infty}$$

表示系统的 σ -域流.

本文有如下结论:

引理 2 系统(9)的数学期望存在渐近稳定极限的充要条件是: 矩阵 Φ 的所有特征值的实部皆小于0. 此时, 极限即为0.

证 式(9)两端同时取数学期望, 由布朗运动的独立增量性, 有

$$d\mathbb{E}[\mathbf{X}(t)] = \Phi\mathbb{E}[\mathbf{X}(t)]dt. \quad (10)$$

故得结论. 证毕.

注 5 类似地, 如果结论变为“数学期望存在极限”, 则充要条件变为“矩阵 Φ 的所有特征值或者等于0, 或者其实部小于0, 且当0是特征值时其只能是 Φ 的极小多项式的单根”.

定理 2 系统(9)在满足引理2的条件下, 其协方差矩阵存在渐近稳定极限的充要条件是: 矩阵 $\Phi \otimes \mathbf{I}_m + \mathbf{I}_m \otimes \Phi + \sum_{i=1}^r \Upsilon_i \otimes \Upsilon_i$ 的所有特征值的实部皆小于0. 此时, 极限为

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{vec}(\text{Cov}[\mathbf{X}(t)]) = & -(\Phi \otimes \mathbf{I}_m + \mathbf{I}_m \otimes \Phi + \sum_{i=1}^r \Upsilon_i \otimes \Upsilon_i)^{-1} \cdot \\ & (\sum_{i=1}^r \Psi_i \otimes \Psi_i). \end{aligned} \quad (11)$$

证 仍令 $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbb{E}[\mathbf{X}(t)]$, $\mathbf{Y}(t)$ 零期望且保持协方差阵不变, 即

$$\mathbb{E}[\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^T(t)] = \text{Cov}[\mathbf{X}(t)]. \quad (12)$$

将 \mathbf{Y} 代入式(9)并结合式(10)有

$$d\mathbf{Y}(t) = \Phi\mathbf{Y}(t)dt + \sum_{i=1}^r (\Upsilon_i\mathbf{Y}(t) + \Upsilon_i\mathbb{E}[\mathbf{X}(t)] + \Psi_i)dB_i(t).$$

故利用伊藤公式, 并注意到布朗运动彼此独立, 有

$$\begin{aligned} d(\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^T(t)) = & d\mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{Y}^T(t) + \mathbf{Y}(t)d\mathbf{Y}^T(t) + d[\mathbf{Y}(t), \mathbf{Y}^T(t)] = \\ & \Phi\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^T(t)dt + \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^T(t)\Phi^Tdt + \\ & \sum_{i=1}^r (\Upsilon_i\mathbf{Y}(t) + \Upsilon_i\mathbb{E}[\mathbf{X}(t)] + \Psi_i)\mathbf{Y}^T(t)dB_i(t) + \\ & \sum_{i=1}^r \mathbf{Y}(t)(\Upsilon_i\mathbf{Y}(t) + \Upsilon_i\mathbb{E}[\mathbf{X}(t)] + \Psi_i)^TdB_i(t) + \\ & \sum_{i=1}^r (\Upsilon_i\mathbf{Y}(t) + \Upsilon_i\mathbb{E}[\mathbf{X}(t)] + \Psi_i)(\Upsilon_i\mathbf{Y}(t) + \\ & \Upsilon_i\mathbb{E}[\mathbf{X}(t)] + \Psi_i)^Tdt = \\ & \Phi\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^T(t)dt + \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^T(t)\Phi^Tdt + \\ & (I) + (II) + (III), \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $[\cdot, \cdot]$ 表示两个过程的二次变差过程, 详见文献[16].

由伊藤积分的定义及布朗运动的增量独立性, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(I)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(I)|\mathfrak{F}_{t-}]] = & \mathbb{E}[\sum_{i=1}^r (\Upsilon_i\mathbf{Y}(t-) + \Upsilon_i\mathbb{E}[\mathbf{X}(t-)] + \Psi_i) \cdot \\ & \mathbf{Y}^T(t-)\mathbb{E}[dB_i(t)|\mathfrak{F}_{t-}]] = 0. \end{aligned}$$

同理, 还有 $\mathbb{E}[(II)] = 0$.

(III)直接展开并注意到 $\mathbf{Y}(t)$ 期望为零, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(III)] = \sum_{i=1}^r (\Upsilon_i\mathbb{E}[\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^T(t)]\Upsilon_i^T + \\ (\Upsilon_i\mathbb{E}[\mathbf{X}(t)] + \Psi_i)(\Upsilon_i\mathbb{E}[\mathbf{X}(t)] + \Psi_i)^T)dt. \end{aligned}$$

因此, 对式(13)两端同时取期望, 利用(12)式及以上计算, 有

$$\begin{aligned} \frac{d\text{Cov}[\mathbf{X}(t)]}{dt} = & \Phi\text{Cov}[\mathbf{X}(t)] + \text{Cov}[\mathbf{X}(t)]\Phi^T + \\ & \sum_{i=1}^r \Upsilon_i\text{Cov}[\mathbf{X}(t)]\Upsilon_i^T + \\ & \sum_{i=1}^r (\Upsilon_i\mathbb{E}[\mathbf{X}(t)] + \Psi_i)(\Upsilon_i\mathbb{E}[\mathbf{X}(t)] + \Psi_i)^T. \end{aligned} \quad (14)$$

向量化后有

$$\begin{aligned} \frac{d\text{vec}(\text{Cov}[\mathbf{X}(t)])}{dt} = & (\Phi \otimes \mathbf{I}_m + \mathbf{I}_m \otimes \Phi + \sum_{i=1}^r \Upsilon_i \otimes \Upsilon_i) \cdot \\ & \text{vec}(\text{Cov}[\mathbf{X}(t)]) + \sum_{i=1}^r (\Upsilon_i\mathbb{E}[\mathbf{X}(t)] + \Psi_i) \otimes \\ & (\Upsilon_i\mathbb{E}[\mathbf{X}(t)] + \Psi_i). \end{aligned} \quad (15)$$

由此可以得到定理中所述协方差矩阵有渐近稳定极限的充要条件.

在此极限存在时, 令 $t \rightarrow +\infty$. 注意到当满足引理2条件时, $\lim_{t \rightarrow +\infty} E[\mathbf{X}(t)] = 0$, 故有

$$0 = (\Phi \otimes \mathbf{I}_m + \mathbf{I}_m \otimes \Phi + \sum_{i=1}^r \Upsilon_i \otimes \Upsilon_i) \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{vec}(\text{Cov}[\mathbf{X}(t)]) + \sum_{i=1}^r \Psi_i \otimes \Psi_i. \quad (16)$$

移项并矩阵求逆后, 即得定理中的极限点. 证毕.

注6 比较定理2与引理2, 同样可以看出乘性噪声系数对系统协方差的影响.

注7 定理2与离散情况的定理1在形式上相似但并不相同, 这主要是因为两点: 一是因为连续随机系统的微积分在伊藤意义下需要增加二次变差项, 而离散系统的差分方程并无此考虑. 这正是连续随机系统的特点和不易处理之处. 二是因为对于高斯型随机变量可以通过线性变换实现正交化, 因此在连续情形下本文没再考虑噪声之间的相关性. 这也使得其结果形式比离散时间略显简单.

注8 至少对于复矩阵来说, 条件“ $\Phi \otimes \mathbf{I}_m + \mathbf{I}_m \otimes \Phi + \sum_{i=1}^r \Upsilon_i \otimes \Upsilon_i$ 的所有特征值的实部皆小于0”与条件“ Φ 的所有特征值的实部皆小于0”互不包含对方. 反例在一维复矩阵时可轻易构造.

推论2 系统(9)中的加性噪声项对系统期望和协方差的稳定性判决皆无影响.

证 由引理2和定理2的稳定性判决条件中皆不含有 $\Psi_i (i = 1, 2, \dots, r)$, 得此推论. 证毕.

4 在TCP上的应用(An application for TCP)

回到TCP/RED系统. 研究者关注的问题是: 为了使系统稳定在RED的线性反馈控制区, 各参数间应该满足什么样的关系? 人们已经发现, 当链路数 n 过小时, 系统会失去稳定而产生震荡, 这种震荡对通信网络是不利的. 因此, 如何估计 n 的稳定下界从而避免结构性震荡, 就成为网络设计中的一个关键问题. 显然, 不同的模型与不同的稳定性定义将导致不同的结果. 在已有研究中, 文献[8, 9]直接使用了流体模型, 因此得到的仅仅是系统数学期望的稳定条件. 文献[12]虽然保留了加性噪声项, 但是由推论2知: 其稳定性分析仍然等价于系统期望的稳定性. 只有当将乘性噪声项一并加以考虑时, 随机震动部分对系统稳定性带来的影响才会展现, 且这种影响会表现在方差稳定性上. 为此本文在一组给定参数条件下 ($R = 0.1 \text{ s}$, $q_{\min} = 100 \text{ 包}$, $q_{\max} = 300 \text{ 包}$, $h = 0.002$, $p_{\max} = 0.1$, $a = 1.1$, C 从 1000 包/s 增加到 5000 包/s), 用前述方法分别计算了使期望和方差稳定的最小链路数, 见图1.

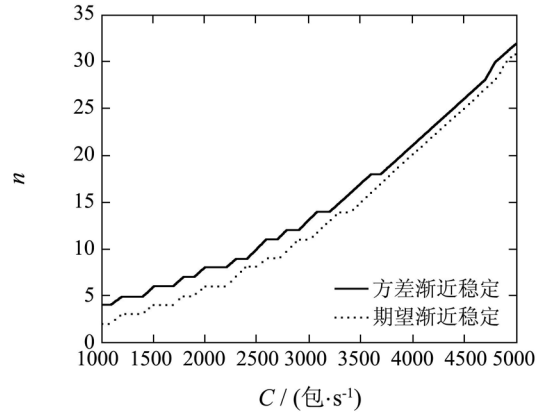


图1 不同稳定性对应链路数下界

Fig. 1 The lower bound of connection number for different stabilities

从图1中可以看出, 仅仅使期望稳定并不能保证有有限方差, 方差稳定需要更强的条件(本例中如此. 但一般情况下, 两种稳定性之间没有蕴含关系, 见注8). 这两者间的差异是不能忽略的. 因此, 在通过确定项系数保证系统期望稳定的前提下, 本文还需要通过保留系统方程中的乘性噪声项而对系统方差进行更细致地分析. 这种分析可以使本文获得系统稳定的更严格的条件. 在实际系统中, 增加考虑方差稳定性可以使本文避免设计出虽然均值稳定, 但样本轨道间差异过大, 即方差过大的系统.

5 小结(Conclusion)

本文从TCP/RED系统的稳定性问题出发, 通过对其随机微分方程直接线性化, 将问题化为对含加乘混合噪声的线性时不变系统的稳定性分析. 然后, 将此问题推广为含多噪声源的一次时不变随机微分/差分方程组的方差稳定性问题. 对于这两个分别对应时间离散和连续条件的一般形式, 本文分别给出了其存在渐近稳定协方差极限的充要条件, 以及此极限的显式计算公式. 最后, 将此一般结果代回具体的TCP/RED系统, 本文展示了考察协方差稳定性对系统稳定域的影响, 也即进行协方差分析的重要性.

本文所给的定理虽然基于线性时不变系统, 但是向非线性或者时变系统的推广并没有本质困难. 对于非线性系统, 进行线性化即可. 文中例子事实上就已使用了这一方法. 对于时变系统, 注意到式(7)与式(14)都已是确定性方程, 因此模仿一般时变系统对系数设置上界的方法即可. 而且, 只要时变系统的系数仍然是确定性函数, 它就与随机性无关, 因此也就不会影响到证明过程中与取数学期望相关的各步骤, 故而这种变化就可以在式(7)与式(14)的基础上完全照搬确定性时变系统的处理方法. 本文限于篇幅, 对此不再赘述.

更进一步的问题是: 对于时滞系统, 是否也可做类似推广? 回答是部分可以. 一方面, 本文所用方法并不依赖于延时, 因此, 对于时滞系统仍可类似处理, 得到系统协方差矩阵满足的确定性方程. 但另一方面, 此确定性方程将变为时滞泛函微分/差分方程. 对此类方程的稳定性分析仍是一个没有被完全解决的问题. 因此, 对于网络流量的时滞随机微分方程模型来说, 本文方法可以解决随机性带来的问题, 但对于延时带来的问题, 还需要更进一步工作. 详细讨论参见文献[17].

关于TCP/RED系统的稳定性, 其实还有更精细地讨论. 比如: 对实际系统来说, 仅仅有限方差仍是不够的. 因为系统的运动范围往往有其物理限制, 当方差过大时, 仍然会频繁跑出边界. 因此, 真实系统设计时还需要期望与方差的相互配合, 使系统以较大概率居于运动允许范围之内. 这也是本文给出的方差极限计算公式的应用场景之一. 关于这一例子的更细致讨论, 由于涉及过多技术细节, 作者将另文阐述^[17]. 本文所陈述的部分至少已经足以说明: 对随机系统而言, 仅仅考虑均值是不够的. 只有当方差也成为本文的关注指标之时, 本文才开始真正考虑系统因为随机性而带来的影响.

参考文献(References):

- [1] FIROIU V, BORDEN M. A study of active queue management for congestion control[C] // *Nineteenth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies*. Tel Aviv: IEEE, 2000: 1435 – 1444.
- [2] ROSBERG Z, MATTHEWS J, ZUKERMAN M. A network rate management protocol with TCP congestion control and fairness for all[J]. *Computer Networks*, 2010, 54(9): 1358 – 1374.
- [3] TSAI H S, LAI W K. Improving fairness among TCP flows by stateless buffer control with early drop maximum[J]. *Information Sciences*, 2008, 178(19): 3697 – 3715.
- [4] GARDNER M K, THULASIDASAN S, FENG W C. User-space auto-tuning for TCP flow control in computational grids[J]. *Computer Communications*, 2004, 27(14): 1364 – 1374.
- [5] SUN Y S, TSOU F M, CHEN M C. Predictive flow control for TCP-friendly end-to-end real-time video on the Internet[J]. *Computer Communications*, 2002, 25(13): 1230 – 1242.
- [6] BACCELLI F, MCDONALD D R. A stochastic model for the throughput of non-persistent TCP flows[J]. *Performance Evaluation*, 2008, 65(6/7): 512 – 530.
- [7] MISRA V, GONG W B, TOWSLEY D. Fluid-based analysis of a network of AQM routers supporting TCP flows with an application to RED[C] // *Proceedings of the Special Interest Group on Data Communication(SIGCOMM)*. Stockholm: ACM, 2000: 151 – 160.
- [8] HOLLOT C V, MISRA V, TOWSLEY D, et al. Analysis and design of controllers for AQM routers supporting TCP flows[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(6): 945 – 959.
- [9] LOW S H, PAGANINI F, WANG J, et al. Dynamics of TCP/RED and a scalable control[C] // *Twenty-First Annual Conference of the IEEE Computer and Communications Societies*. New York: IEEE, 2002: 239 – 248.
- [10] TAN L S, ZHANG W, PENG G, et al. Stability of TCP/RED systems in AQM routers[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(8): 1393 – 1398.
- [11] BABURAJ P, MAJHI S, REDDY C. Modified Smith predictor controller for network congestion control[C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Advanced Computer Control*. Madurai: IEEE, 2007: 144 – 149.
- [12] FAN H, SHAN X M. Using SDE to achieve the stable and statistical analyses for TCP/RED flows[C] // *Proceedings of the 8th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Jinan: IEEE, 2010: 3565 – 3571.
- [13] SKOROKHOD A V. *Asymptotic Methods in the Theory of Stochastic Differential Equations*[M]. Providence, American: American Mathematical Society, 1989.
- [14] GARDINER C W. *Handbook of Stochastic Methods*[M]. 3rd ed. New York, American: Springer, 2004.
- [15] SCHUSS Z. *Theory and Applications of Stochastic Differential Equations*[M]. New York, American: John Wiley & Sons, 1980.
- [16] 何生武, 汪嘉冈, 严家安. 半鞅与随机分析[M]. 北京: 科学出版社, 1995.
(HE Shengwu, WANG Jiagang, YAN Jiaan. *Semi-martingale and Stochastic Analysis*[M]. Beijing: Science Press, 1995.)
- [17] 樊华. TCP/RED的随机微分方程模型与拥塞控制[D]. 北京: 清华大学, 2011.
(FAN Hua. *Stochastic differential equations of TCP/RED and congestion control*[D]. Beijing: Tsinghua University, 2011.)

作者简介:

樊 华 (1979—), 男, 博士, 讲师, 研究方向为随机动力系统及随机微分方程在互联网中的应用、复杂系统、视频工程, E-mail: fanhua00@gmail.com;

山秀明 (1944—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为雷达信号处理、信息网络和复杂系统, E-mail: shanxm@tsinghua.edu.cn;

任 勇 (1963—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为信息网络、复杂系统, E-mail: reny@tsinghua.edu.cn;

袁 坚 (1965—), 男, 副教授, 研究方向为信息网络、复杂系统, E-mail: jyuan@tsinghua.edu.cn.