

II型模糊集合与系统研究进展

潘永平, 孙宗海, 黄道平

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: II型模糊集合是传统I型模糊集合的扩展, 其本质是模糊集合中隶属度值的再次模糊化表示. II型模糊集合可以直接处理模糊规则的不确定性, 是解决现实环境高不确定性问题的有效手段. 本文首先简要给出了II型模糊集合与系统的基本概念, 然后分别回顾了广义和区间II型模糊理论的发展历史. 接着分别讨论了广义和区间II型模糊系统的计算复杂性研究进展, 并进一步介绍了基于区间II型模糊集合的词计算理论发展状况. 最后给出了本文的结论和进一步研究问题的展望.

关键词: II型模糊集合; II型模糊系统; 计算复杂性; 词计算

中图分类号: N941 **文献标识码:** A

A survey of type-2 fuzzy sets and systems

PAN Yong-ping, SUN Zong-hai, HUANG Dao-ping

(School of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: A type-2 fuzzy set(T2-FS), which essentially is the refuzzification presentation of membership values in the fuzzy set, is the extension of the traditional type-1 fuzzy set(T1-FS). The T2-FS can directly deal with the uncertainty of fuzzy rules; thus, it is an effective approach to solving the problems with high uncertainties in realistic environment. In this paper, the basic terminologies of the T2-FS and the type-2 fuzzy logic system(T2-FLS) are briefly introduced. The developments of the generalized fuzzy theory and the interval type-2 fuzzy theory are reviewed, respectively. The progress in tackling the computational complexity in the interval and generalized T2-FLS is also discussed. The theory of computing with words based on the interval T2-FS is introduced in further. Finally, conclusion remarks and further research prospects of the type-2 fuzzy theory are given.

Key words: type-2 fuzzy sets; type-2 fuzzy logic systems; computational complexity; computing with words

1 引言(Introduction)

1965年, Zadeh^[1]提出I型模糊集合(type-1 fuzzy sets, T1-FS)理论. 随后, 基于T1-FS的I型模糊系统(T1 fuzzy logic systems, T1-FLS)成为处理不确定性、模糊性和不精确性建模问题的成功方法, 并在众多领域得到了广泛应用^[2]. 然而, 现实世界的T1-FLS面临着诸多不确定性的来源, 主要包括^[3~5]: 1) 模糊规则前件和后件的描述存在语言不确定性; 2) 相同规则前件通过专家问卷调查得到的规则后件存在差异性; 3) 激活模糊系统的输入信号存在测量噪声; 4) 模糊系统由于使用带噪声的训练数据进行调节或优化而导致其存在参数不确定性. 所有这些语言和数据的不确定性都可导致模糊规则前件和/或后件的不确定性, 并最终体现为相应隶属度函数的不确定性^[6]. 由于T1-FLS采用了由精确隶属度函数表示的T1-FS, 其直接处理这些模糊规则不确定性的能力

非常有限^[7].

作为对T1-FS的扩展, Zadeh^[8]提出II型模糊集合(type-2 FS, T2-FS)的概念. T2-FS的特征是对模糊集合中的隶属度值再次进行模糊化表示, 即其隶属度值本身为T1-FS. T2-FS增强了集合的模糊性, 因此可以提高其处理不确定的能力^[9,10]. 理想情况下, 需要 T_{∞} -FS去完全表征真实世界的不确定性, 而T2-FS只是它的二阶逼近. 但是, 就如随机系统中的方差可以为概率密度函数的均值分布提供测度, T2-FS的降阶(type-reduction, TR)集合同样可以为模糊集合的语言不确定性分布提供测度, 因此T2-FS可以直接处理语言不确定性^[5~7]. 不仅如此, 由于语言和数据不确定性都体现为隶属度函数的不确定性, 因此基于模糊隶属度函数表示的T2-FS事实上可以同时语言和/或数据不确定性进行建模, 从而直接处理模糊规则的不确定性^[4].

目前, T2-FS已经发展成为处理现实环境高不确定性的理论, 并且在建模与预测^[11~17]、反馈控制^[18~24]、模式识别^[25~29]等领域获得了成功应用。

本文首先对II型模糊集合与系统中的基本概念进行了简要概述, 然后在第3节分别回顾了广义和区间II型模糊理论的发展历史. 接着在第4节把解决区间II型模糊系统(interval type-2 FLS, IT2-FLS)复杂性的方法归类为3种, 即减少TR迭代次数、回避迭代TR和构建简约型IT2-FLS, 并分别进行了详细论述. 在第5节则针对广义II型模糊系统(generalized type-2 FLS, GT2-FLS)的复杂性问题讨论了两种主要解决方案, 即采用近似计算方法和建立简化表示理论. 基于IT2-FS的词计算(computing with words, CWW)理论综述被安排在第5节. 最后给出了本文的结论和进一步研究问题的展望。

2 II型模糊集合与系统基本概念(Basic concepts of the T2-FS and T2-FLS)

记 \tilde{A} 为某一T2-FS, $x \in X$ 为主变量, $u \in J_x$ 为次变量, 其中 $J_x \subseteq [0, 1]$ 为主隶属度. T2-FS需要使用三维的隶属度函数表示, 而图1为其二维简化表示示意图^[7]. 图中对于任意 $x' \in X$, 有 $J_{x'} = [MF_1(x'), MF_N(x')]$, 其中 N 为 $J_{x'}$ 的离散点个数. 如此, \tilde{A} 可表示为

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \left(\int_{u \in J_x} \mu_{\tilde{A}(x,u)} / u \right) / x, \quad (1)$$

其中 \int 表示逻辑并. 图1右上角为 \tilde{A} 在点 x' 处的垂直切片(vertical slice), 即次隶属度函数, 可表示为

$$\mu_{\tilde{A}}(x') = \int_{u \in J_{x'}} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x', u)}{u}. \quad (2)$$

相应次隶属度值为

$$f_{x'}(u_i) = \mu_{\tilde{A}}(x', u_i) = W_{x'_i}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3)$$

式(1)中次隶属度都取为1的T2-FS称为区间II型模糊集合(interval T2-FS, IT2-FS), 其本质为一阶不确定模糊集合模型; 次隶属度取得不同值的T2-FS称为广义II型模糊集合(generalized T2-FS, GT2-FS), 其本质为二阶不确定模糊集合模型^[30]. 如图1中灰色区域所示, \tilde{A} 的三维隶属度映射到二维平面时的覆盖区域称为 \tilde{A} 的不确定域(footprint of uncertain, FOU), 其上界记为UMF(\tilde{A}), 下界记为LMF(\tilde{A}). 如图1右下角所示, 在FOU内的任意一个T1-FS定义为内嵌I型模糊集合(embedded T1-FS, ET1-FS), 记为 A_e ; 带有次隶属度值的ET1-FS则定义为内嵌II型模糊集合(embedded T2-FS, ET2-FS), 记为 \tilde{A}_e . 如图1的FOU中虚线所示, 首隶属度函数即为所有次隶属度均取值为1的ET1-FS.

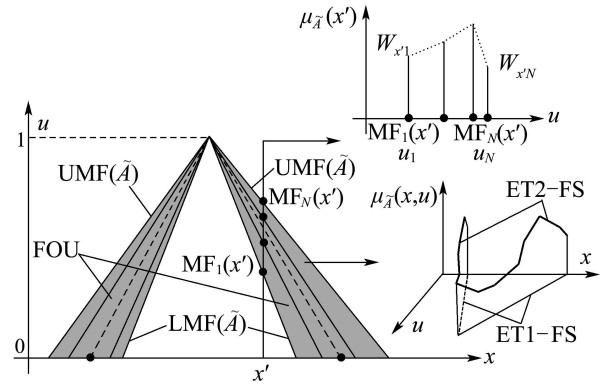


图1 II型模糊集合示意图

Fig. 1 Schematic diagram of T2-FS in 2-dimension plane

只要在模糊规则前件或后件隶属度函数中包含T2-FS, 相应的模糊系统即称为II型模糊系统(T2-FLS). 考虑 p 输入单输出的T2-FLS, 其中输入 $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}$, 输出 $y \in Y \subset \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$. 假设T2-FLS中包含如下 M 条模糊规则^[4]:

$$R^l: \text{If } x_1 \text{ is } \tilde{F}_1^l \text{ and } \dots \text{ and } x_p \text{ is } \tilde{F}_p^l \text{ then } y \text{ is } \tilde{G}^l, \quad (4)$$

其中 \tilde{F}_i^l 和 \tilde{G}^l 分别表示 x_i 和 y 的语言变量, $i = 1, \dots, p$, $l = 1, \dots, M$. 记 μ_F 为语言变量 F 相应的隶属度. 基于单值模糊化和扩展sup-*合成的模糊推理输出 \tilde{B} 的隶属度函数可表示为

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \bigcup_{l=1}^M \mu_{\tilde{G}^l}(y) \cap E_l(\mathbf{x}), \quad (5)$$

其中激活集合 $E_l(\mathbf{x})$ 定义为

$$E_l(\mathbf{x}) \triangleq \prod_{i=1}^p \mu_{\tilde{F}_i^l}(x_i). \quad (6)$$

与T1-FLS区别在于, T2-FLS中的模糊推理输出为T2-FS, 因此需降阶为I型TR集合, 然后才能进行常规解模糊得到清晰量输出. TR是T1-FLS中解模糊在II型系统中的扩展, 其基本思想是用具有代表性的T1-FS表示 \tilde{B} , TR方法主要包括质心(centroid)、集合中心(center-of-set, COS)和顶点(height)等类型^[4]. 关于T2-FS与T2-FLS相关概念更为详细的讲述可参考文献^[7, 31~33].

3 II型模糊理论历史回顾(Historical review of the type-2 fuzzy theory)

3.1 广义II型模糊理论历史回顾(Historical review of the GT2 fuzzy theory)

1975年, Zadeh^[8]首次提出T2-FS的概念, 并根据扩展原理给出其适合于计算的垂直切片表示, 即将T2-FS表示为所有 $x' \in X$ 上垂直切片的合成:

$$\tilde{A} = \bigcup_{\forall x' \in X} \mu_{\tilde{A}}(x'). \quad (7)$$

随后, Mizumoto和Tanaka等^[34,35]研究了T2-FS的集论运算和隶属度值性质, 并考察了其代数和、代数

积运算. Nieminen^[36]则对T2-FS代数结构作了更为详尽的表述. 接着Dubois和Prade等^[37~39]讨论了模糊取值逻辑, 并给出基于最小 t -范数的II型模糊关系扩展合成公式. 然而, 直到1990年代中期, T2-FS的研究都未曾体现出活力. 期间只出现了少量相关的研究论文, 主要原因是此阶段研究者的精力主要还是集中在T1-FS上.

1990年代末期, Mendel等燃起了T2-FS的研究热情. 1998年, Karnik和Mendel^[40]扩展了文献[34, 35]的理论, 提出T2-FS实用的并、交、补3种集论运算和代数运算公式, 并给出II型模糊关系扩展合成公式的一般形式. 随后, 文献[4, 41]在理论上提出了质心型、COS型和顶点型3种TR方法. TR方法一般需要用到模糊集合质心的求取, 文献[42]给出了求取T2-FS质心的精确算法以及逼近算法. 接着, T2-FS的集论运算和代数运算理论以及模糊关系扩展合成的研究得到进一步的完善^[43]. 文献[43]同时给出了分别在最小 t -范数和乘积 t -范数下的实用型join, meet和negation运算公式. 2001年, 关于T2-FS首部专著^[44]的出版标志着T2-FS理论体系的初步确立. 基于扩展原理的T2-FS垂直切片表示易于计算, 但会增加理论推导的复杂性. 波浪切片(wave slice)表示是一种避免这种复杂性的T2-FS定义方法^[5], 其把T2-FS定义为所有 N_e 个ET2-FS的合成:

$$\tilde{A} = \bigcup_{j=1}^{N_e} \tilde{A}_e(j). \quad (8)$$

文献[5]同时给出了基于波浪切片表示的集论运算公式. 至此, 文献[4, 5, 40~44]较为完整地建立了T2-FS的数学理论.

2005年, Zadeh^[45]指出不确定性是信息的一个重要属性, 这使得不确定测度成为近年T2-FS理论研究的热点之一. Zhai和Mendel^[46]基于 α -平面表示理论^[47]给出了T2-FS的质心、基数(cardinality)、模糊度(fuzziness)、方差(variance)和偏度(skewness)5种不确定测度的定义及其低复杂度的计算策略. 最近, 子集度(Subsethood)的概念也被扩展到T2-FS中^[48].

3.2 区间II型模糊理论历史回顾(Historical review of the IT2 fuzzy theory)

虽然T2-FS可以处理高不确定性, 但计算效率是它的瓶颈, 而IT2-FS的提出促进了T2-FS的实际应用. IT2-FLS能在许多具有挑战性的应用领域获得比相应T1-FLS更好的性能表现, 原因在于IT2-FS的FOU同样可为系统设计提供额外的自由度, 从而增强其对不确定性的处理能力^[49]. 1985年, Schwarz^[50]首次提出语言真值概念的区间方法, 即区间取值模糊集合(interval-valued FS, IV-FS), 并指出其在数学简化和计算量方面的潜在优势. 实际上, IV-FS和

IT2-FS只是同一概念在不同研究角度和出发点下形成的不同称谓. Gorzalczany被认为是IV-FS研究的代表性人物, 他首次提出类似于IT2-FS中FOU的概念^[51], 并研究了有关TR的问题^[52, 53]. Türksen^[54]则在从T1-FS到IV-FS的逻辑连接符汇总方面做了主要的工作. 然而类似于GT2-FS, IV-FS在出现最初十多年期间的研究成果也非常有限.

1999年, Karnik等^[4]首次提出IT2-FS的概念, 并给出了IT2-FLS基于Karnik-Mendel(KM)算法的TR方法计算流程. Liang和Mendel^[55]则首次对IT2-FLS进行了系统的概述, 给出IT2-FLS分别在单值、I型和II型3种模糊化方法下的模糊推理输出表达式. 随后, Karnik和Mendel^[42, 43]又系统地总结了IT2-FS的集论运算理论, 并给出基于KM算法的质心型TR实用方法及其逼近算法. 文献[55]基于扩展原理的IT2-FS理论是复杂T2-FS理论的特殊化形式, 这给IT2-FS理论的理解造成负担, 而波浪切片表示定理的引入使这个问题得到了解决. 文献[56]基于波浪切片表示重新构建了基于T1-FS数学基础的IT2-FS简化理论, 并给出相应的简化集论运算公式以及IT2-FLS在单值、I型和II型3种模糊化方法下的模糊推理输出表达式.

对于IT2-FS不确定测度的研究, 最早是Jang和Ralescu^[57]在2001年提出的IT2-FS基数概念. 其后, Wu和Mendel^[58]给出计算IT2-FS TR集合最小-最大不确定边界的Wu-Mendel(WM)方法. 接着, 文献[59]又研究了对称型IT2-FS模糊统计学(Fuzzi-stics)方法的前向问题, 即从参数化IT2-FS推导不确定边界的取值, 并得出FOU的几何特性与不确定性之间的关系表达式. 最近, 文献[60~62]基于波浪切片表示定理给出了IT2-FS全部5种不确定测度的结构化表示方法, 但目前为止还未得出其实用计算的解决方案. Liu和Mendel^[63]则提出基于KM算法的IT2-FS模糊加权平均值聚合方法, 为求取IT2-FS广义质心提供了另一解决方案.

4 IT2-FLS复杂性研究进展(Progress of the IT2-FLS complexity problem)

IT2-FS是一种简化的T2-FS, 但是由于T2-FS内在的复杂性和冗余性, IT2-FLS的TR一直还存在问题. KM算法的提出使TR效率得到了实质性的提高, 以致基于IT2-FS的方法成为II型模糊理论领域研究的主流^[2]. 然而, 即使已经证明KM算法具有单调超指数收敛特性^[64], KM算法用于求取IT2-FS质心时仍需多次迭代, 且不能得到闭公式(closed-form formula)表示, 因此在实际应用中仍过于复杂. 例如, 在文献[55]基于IT2-FLS的在线自适应参数辨识问题中, KM算法的使用导致计算TR集合所需的参数

在每个循环周期都发生变化,这直接增加了整个计算过程的复杂性.目前,解决IT2-FLS复杂性问题的主要方法可归纳为:减少TR迭代次数^[65~69]、回避迭代TR^[33,53,58,70~76]和精简模糊规则^[77,78].

4.1 减少TR迭代次数(Reduce the times of TR iteration)

Mendel^[65]指出,当IT2-FS的FOU对称时,质心也具有对称特性,因此此时使用KM算法计算IT2-FS的质心可节省50%的计算量.接着,Wu和Mendel^[66,67]提出可以进一步减少TR迭代次数的加强型KM算法,仿真结果表明其相对于常规KM算法一般可以减少两次迭代和39%以上的计算时间.针对IT2-FS广义质心的求取问题,Melgarejo^[68]先是定义了广义质心上界、下界的重新表示公式,然后通过穷举和递归混合算法对公式进行求解,在不损失计算精度的情况下获得了比KM算法更快的求解速度.Duran等^[69]则针对IT2-FS广义质心的求取提出了改进的迭代算法,指出根据离散质心函数的性质,允许使用停止条件来提高算法的运算速度,并用仿真表明其具有比文献^[66]中的加强型KM算法更高的运算效率.

4.2 回避迭代TR(Bypass the iterative TR)

上述IT2-FLS的TR方法虽然可以减少TR迭代次数,但是并不能得到清晰量输出的闭公式表示.TR方法设计必须遵循的原则是,如果全部不确定消失,那么T2-FS必须降阶为T1-FS^[42].满足此原则的TR方法并不止于基于KM算法的迭代TR^[33].早期Gorzalczany^[53]基于IV-FS提出的解模糊方法实质上就是一种可以回避迭代TR的有效方法.文中首先定义了一个中间函数:

$$f(y) = ((\bar{\mu}_{\tilde{B}} + \underline{\mu}_{\tilde{B}})/2)(1 - (\bar{\mu}_{\tilde{B}} - \underline{\mu}_{\tilde{B}})), \quad (9)$$

其中 $\bar{\mu}_{\tilde{B}}$ 和 $\underline{\mu}_{\tilde{B}}$ 分别为UMF(\tilde{B})和LMF(\tilde{B})的隶属度函数,然后求取其最大值或中值得到清晰量输出:

$$y(x) = \begin{cases} \arg \max_{y \in Y} f(y), \\ \text{or median}(f(y)). \end{cases} \quad (10)$$

Niewiadomski等^[70]则定义了4种其他类型的TR,即乐观型(采用 $\bar{\mu}_{\tilde{B}}$)、悲观型(采用 $\underline{\mu}_{\tilde{B}}$)、现实型(采用 $\bar{\mu}_{\tilde{B}}$ 与 $\underline{\mu}_{\tilde{B}}$ 的平均值)和如下现实-加权型TR:

$$\text{TR}_{\text{rew}}(\tilde{B}) = w\underline{\mu}_{\tilde{B}} + (1-w)\bar{\mu}_{\tilde{B}}, \quad (11)$$

其中 $w \in [0, 1]$ 为权值.但可以看出,式(11)并没有完全回避迭代TR,其还须进行一次求质心运算,即

$$y(x) = \text{COG}(\text{TR}_{\text{rew}}(\tilde{B})), \quad (12)$$

其中COG表示求质心函数.Mendel^[33]给出了如下可以完全回避迭代TR的清晰量输出计算公式:

$$y(x) = w\text{COG}(\underline{\mu}_{\tilde{B}}) + (1-w)\text{COG}(\bar{\mu}_{\tilde{B}}). \quad (13)$$

Wu和Tian^[71]提出了一种不同思路的回避迭代TR方法,其先是定义了用于代替FOU的等价T1-FS,然后TR被简化为寻找特定输入所对应的等价T1-FS,即TR在推理之前已被应用.此方法的执行速度快,但一个重要缺陷是不允许不确定通过模糊推理机.另外一种回避迭代TR的方法为基于垂直切片表示的Nie-Tan(N-T)解模糊方法^[73].算例显示其可以比迭代TR节省大约50%的计算量.最近,文献^[74]提出一种IT2-FLS解模糊的退缩方法,其通过把IT2-FS转变为解模糊值与之非常相似的I型典型内嵌集合(representative embedded set, RES),从而实现回避TR直接进行解模糊.文中定义了两种与此方法紧密联系的RES近似值,即简单型和区间型RES近似值.仿真结果表明基于简单型RES近似值的退缩方法在速度和精度方面都具有比迭代TR更优越的表现^[74],且其逼近迭代TR的精度也比N-T解模糊方法要好得多^[75].

上述方法都实现了IT2-FLS的TR闭公式表示,但存在两个主要问题:一是没有在理论上给出逼近迭代TR精度的分析,二是不能获得类似TR集合的不确定性测度.针对第二个问题,Wu和Mendel^[58]通过最小-最大不确定边界近似TR方法,导出能够同时逼近输出TR集合和清晰量的WM算法,实现了回避迭代的快速计算.随后,WM算法在嵌入式实时控制中得到了应用^[79].但WM算法有一个缺陷,即为了使相对于迭代TR的风险函数 R_{TR} 足够小,在设计阶段仍需用KM算法进行TR计算.Lynch等^[72]通过使相对于逼近集的风险函数 R_{APP} 最小化设计T2-FLS,实现完全摒弃迭代TR的改进型WM算法,并在实时控制中验证了其同样可以得到非常小的跟踪误差.

4.3 构建简约型IT2-FLS(Construct parsimonious IT2-FLS)

简化IT2-FLS的另一思路是采用精简模糊规则的简约型IT2-FLS.构建简约型模糊系统的核心问题是如何在保证系统逼近性能的情况下,使模糊规则数目达到最小化.目前构建简约型T1-FLS已经发展出很多方法,但关于简约型T2-FLS的研究结果却还非常有限.Liang和Mendel^[78]基于奇异值QR分解(SVD-QR)方法首次研究了简约型IT2-FLS的设计问题.文中首先从IT2-FLS中抽取两个模糊基函数表达式,然后使用基于柱状旋转的SVD-QR方法进行规则精简.时间序列预测实验的结果表明,此方法在系统性能只有小幅下降的情况下,可以大幅减少IT2-FLS的规则数量.但是,SVD-QR方法对排序方法的选择非常敏感,如何估计有效排序仍是个问题.为了回避这个问题,最近Zhou等^[77]提出旋转QR分解算法.文中首先给出4种新的模糊规则相对贡献度

排序指标,接着描述了如何利用这些指标对规则进行前向选择和后向选择,从而构建出由最具影响力的规则组成的简约型IT2-FLS.基于实际数据的实验表明,此方法在保证逼近精度情况下能够比文献[78]中的方法更有效地精简规则.但如何针对具体问题从4种排序指标中选出最有效的指标,还是个值得进一步研究的开放性问题.

5 GT2-FLS复杂性问题研究进展(Progress of the GT2-FLS complexity problem)

GT2-FS提供了比IT2-FS更多的设计自由度,进一步扩展了其对高不确定性的处理能力,因此必定具有更好的应用潜能和更广的影响力^[2].但目前GT2-FLS并未像IT2-FLS那样得到广泛应用,其主要原因在于:一是GT2-FS集论运算的复杂性致使GT2-FLS模糊推理输出的计算变得异常复杂^[33];二是GT2-FLS的各种TR方法都涉及质心计算,而巨大的计算量导致其只具有理论意义^[4,5].把GT2-FS推向实用的简化方法已成为近几年II型模糊理论研究的焦点,并已形成两种主要解决方案,即采用近似计算方法^[80~84]和建立简化表示理论(representation theory, RT)^[46,47,85~97].

5.1 近似计算方法(Approximate calculation methods)

Greenfield等^[81]基于网格离散化方法给出了优化的GT2-FS集论运算公式,指出在良好离散化情况下通过这种近似集论运算可以获得快速的模糊推理速度.次隶属度采用三角函数的T2-FS(triangular T2-FS, TT2-FS)又称为准T2-FS^[92],其被认为是IT2-FS和GT2-FS的良好折衷,近年来引起了学者们的关注^[82~84,87,90].Starzewski^[82,83]给出了TT2-FS的近似扩展 t -范数高效算法,其计算只涉及首隶属度函数、LMF和UMF,计算过程只需存储3个参数,并可推广到多变量的情形.文中同时给出了基于KM算法的近似TR高效算法,并可以获得相应的显式求导公式.其后Starzewski^[84]又给出各种扩展三角 t -范数的解析公式,并用算例显示其在构建II型模糊神经网络系统学习律中的作用.文献[82~84]中的研究结果为T2-FLS参数优化和自适应律设计的实现提供了有效途径.

5.2 计算几何学表示理论(Computational geometry RT)

计算几何学方法的引入让研究者们看到了GT2-FLS实现实时执行的希望^[85~91].GT2-FS的几何表示方法实质为一种基于部分离散化的近似计算方法^[87],只是其已经形成一种更为系统的T2-FS表示理论.如图2所示,GT2-FS的部分离散化即只对主变

量论域 X 进行离散化,而次隶属度采用连续的几何函数表示.文献[87,88]基于部分离散化得出了GT2-FS优化的集论运算公式,并指出几何学表示的GT2-FLS执行代价与模糊规则数成近似线性关系.几何GT2-FS建立方法和几何解模糊方法的提出使几何GT2-FLS理论得以完善^[89,90],并促成了第一个GT2-FLS硬件系统的出现^[91].事实上,几何GT2-FS集论运算的效率比相应传统离散化集论运算的效率要低,所以一般在解模糊时才有必要把GT2-FS部分离散化为几何表示^[90].

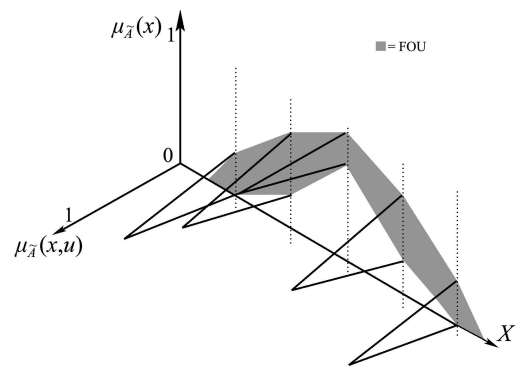


图 2 GT2-FS部分离散化示意图

Fig. 2 Schematic diagram of the T2-FS in 2-D plane

在几何GT2-FS中如果采用TT2-FS,则可以将其复杂度降低到最小^[90].如此,几何GT2-FS可以用 n 个三维空间三角形组成的多面体表示:

$$\tilde{A} = \bigcup_{i=1}^n t^i, t^i = \begin{bmatrix} x_1^i & y_1^i & z_1^i \\ x_2^i & y_2^i & z_2^i \\ x_3^i & y_3^i & z_3^i \end{bmatrix}, \quad (14)$$

其中: $x_1^i, x_2^i, x_3^i \in X, y_1^i, y_2^i$ 和 y_3^i 为主隶属度值, z_1^i, z_2^i 和 z_3^i 为次隶属度值.几何解模糊器可表示为

$$C_{\tilde{A}} = \sum_{i=1}^n C^i A^i / \sum_{i=1}^n A^i, \quad (15)$$

其中:

$$C^i = (x_1^i + x_2^i + x_3^i)/3, \quad (16)$$

$$A^i = 0.5\sqrt{Q}, \quad (17)$$

$$Q = (y_2^i - y_1^i)(z_3^i - z_1^i) - (y_3^i - y_1^i)(z_2^i - z_1^i)^2 + (x_2^i - x_1^i)(z_3^i - z_1^i) - (x_3^i - x_1^i)(z_2^i - z_1^i)^2 + (x_2^i - x_1^i)(y_3^i - y_1^i) - (x_3^i - x_1^i)(y_2^i - y_1^i)^2.$$

仿真实验结果表明,几何解模糊器可以获得比迭代TR快200000倍的执行速度,从而达到实时控制的要求.虽然几何解模糊的质心跟迭代TR的质心是两种不同含义的质心,但只有在模糊集合为轴对称时两者才具有明显差别^[90].因此通过离线设计特定的模糊集合,可以使几何解模糊器的输出结果更加接近迭代TR的结果.

5.3 α -平面表示理论(α -plane RT)

T1-FS的 α -截集概念在GT2-FS中的应用,发展了一种在理论和实践中都具有重要意义的GT2-FS水平切片(horizontal slice)表示理论,即 α -平面表示理论^[46,47,92~94]. GT2-FS \tilde{A} 的 α -平面定义为

$$\tilde{A}_\alpha = \int_{\forall x \in X} \int_{\forall u \in J_x} \{(x, u) | f_x(u) \geq \alpha\}, \quad (18)$$

其中 $\alpha \in [0, 1]$. 记次隶属度函数 $f_x(u)$ 的 α -截集为

$$S_{\tilde{A}_\alpha}(x, \alpha) = [s_L(x, \alpha), s_R(x, \alpha)]. \quad (19)$$

定义 \tilde{A}_α 的三维指示函数如下:

$$I_{\tilde{A}_\alpha}(x, u | \alpha) = \begin{cases} 1, & \forall x \in X \text{ 且 } u \in S_{\tilde{A}_\alpha}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (20)$$

定义 \tilde{A}_α 的 α -级T2-FS为

$$\tilde{A}(\alpha) = \alpha I_{\tilde{A}_\alpha}(x, u | \alpha), \quad (21)$$

则GT2-FS的 α -平面表示可表达为

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} \tilde{A}(\alpha). \quad (22)$$

图3为 \tilde{A} 的 α -平面示意图,其中浅灰色和深灰色组成的区域为FOU,深灰色区域为式(18)的 α -平面 \tilde{A}_α ,垂直黑线表示式(19)的 $S_{\tilde{A}_\alpha}$.可见, s_L 和 s_R 即分别为UMF(\tilde{A}_α)和LMF(\tilde{A}_α).式(22)中,每个 $\tilde{A}(\alpha)$ 可以视为次隶属度均取值为 α 的IT2-FS,因此通过 α -平面表示方法,GT2-FS可以直接利用现有的IT2-FS

理论,这极大地降低了GT-FLS的设计难度和计算复杂性. Liu^[47]给出了GT2-FS基于 α -平面表示的质心型TR,指出只需少量的 α 取值即可使解模糊的清晰量输出收敛到真实值.接着,基于 α -平面表示的GT2-FS集论运算、质心性^[93]以及准T2-FLS的简化运算问题^[92]也得到了研究,进一步完善了 α -平面表示理论.

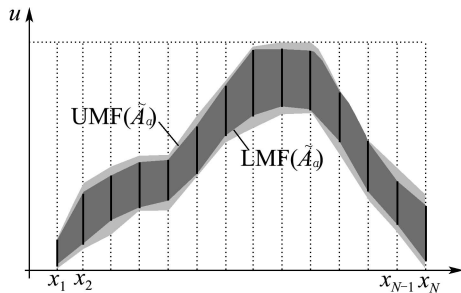


图3 GT2-FS的 α -平面示意图

Fig. 3 Schematic diagram of the GT2-FS α -plane

5.4 Z切片表示理论(zSlice RT)

最近, Wagner和Hagras^[95~97]提出了在复杂度和计算量方面都可得到大幅简化的GT2-FS Z切片表示理论.在图4(a)中任意 $x' \in X$, GT2-FS的Z切片产

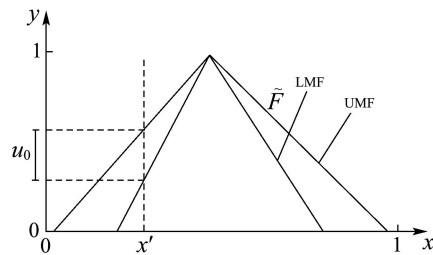
生了一个如图4(b)所示带有高度值 $z_i \in [0, 1]$ 和域 $J_{i_x} = [l_i, r_i]$ 的区间集合. Z切片为在隶属度函数的第3维z轴上具有高度 z_i 取值的IT2-FS,等价于式(21)表示的 α -级T2-FS^[94],可表示为

$$\tilde{Z}_i = \int_{x \in X} \int_{u_i \in J_{i_x}} z_i / (x, u_i). \quad (23)$$

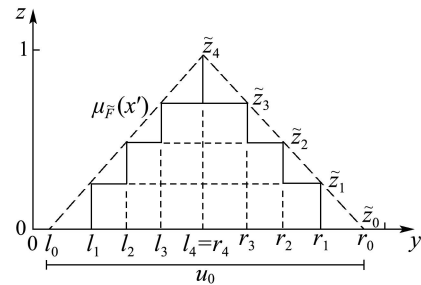
如此, GT2-FS的Z切片表示可表达为

$$\tilde{A} = \bigcup_{i=1}^N \tilde{Z}_i, \quad N \rightarrow \infty, \quad (24)$$

其中 N 为Z切片数量. Z切片表示理论把GT2-FS看作是无穷多个实质为IT2-FS的Z切片的组合,因此同样可以直接利用现有的IT2-FS理论.



(a) GT2-FS的正面视图



(b) x' 处的Z切片

图4 GT2-FS的Z切片示意图

Fig. 4 Schematic diagram of the GT2-FS zSlice

文献[96]给出了Z切片表示GT2-FS的集论运算公式,并在与传统集论运算的比较中显示出其计算量方面的极大优势.随后,文献[97]研究了基于Z切片的GT2-FLS,给出其模糊推理、TR和解模糊的公式表示.针对两轮自主移动机器人控制问题,文献[95, 97]构建了基于Z切片的广义II型模糊控制器,并在现实环境的实时控制中获得了比相应I型和相应区间II型控制器均要好的控制性能. Z切片表示理论进一步研究的问题在于,如何使用非单值模糊化方法构建Z切片表示的GT2-FLS,以及GT2-FS的第3维表示如何影响其对不确定的建模能力.

6 基于IT2-FS的词计算研究进展(Progress of CWW based on the IT2-FS)

词计算是指计算的对象为从自然语言中抽取的词和命题的一种方法论^[98],其与模糊集合理论有着非常紧密的联系.词计算的过程如下:首先采用

“词”激活计算机并转化为相应的模糊集合表示, 然后这些模糊集合通过词计算引擎映射到其他模糊集合, 最后还原为“词”的形式. Zadeh^[99]在1996年首次提出词计算的概念, 指出模糊逻辑至少是近似等于词计算, 并举例使用I型模糊颗粒建立词模型. 基于“词对于不同人的含义具有差异性”的观点^[3], Mendel^[100]认为词计算需要采用IT2-FS. Türksen^[101]也指出IT2-FS的模糊性能能够为词计算提供更为丰富的知识表示和逼近推理. 随后, Mendel^[102]基于Popper伪证主义证明了利用T1-FS建立词模型是不恰当的, 因为T1-FS是确定的而“词”是不确定的. 他认为使用IT2-FS才能建立科学的一阶不确定词模型, 因为其隶属度区间能够为词模型提供不确定性表示^[103]. Mendel的观点从另一个角度说明了在实际应用中选择T2-FS的理由.

6.1 词计算理论研究进展(Progress of the CWW theory)

为了用IT2-FS建立词模型, 必须从一组对象中收集关于“词”的数据, 目前存在两种完全不同的途径: 一是基于人的隶属度函数(person membership function, PMF)的方法, 二是基于区间端点(interval end-points, IEP)的方法^[104]. 两种途径都可以通过模糊统计学方法把收集的数据映射为相应FOU的简约参数化模型. 使用PMF方法的不足在于其只能在人们具有关于模糊系统非常丰富的知识时才能得到词模型. 而IEP方法则没有这个限制, 并且可以使用对称或非对称IT2-FS的模糊统计学方法^[105,106]进行从数据到预定参数化FOU模型的映射操作.

在基于规则的模糊系统中, IT2-FS进行建模的对象不仅包括规则前件和后件的语言不确定, 而且包括and/or连接词的不确定. Mendel^[33]对早期关于用IT2-FS进行连接词不确定建模的研究进行了详细综述. 最近, Türksen^[107]指出信任测度、似然测度和可能性测度都可以用 α -截集表示的IT2-FS明确表达. 然后, 他又提出作为词计算基础理论的元语言(meta-linguistic)公理, 并基于IT2-FS考察了从元语言公理到模糊分离和连接规范形式的映射产生的集论公理^[108]. 接着, IT2-FS的排序(ranking)^[109]、相似性(similarity)^[110]和语言加权平均值(linguistic weighted average, LWA)^[111~113]的概念也相继被提出. Wu和Mendel^[114]则对各种排序方法、相似性测度和不确定性测度用实际数据进行了比较实验, 为各种方法在词计算应用中的选择提供了建议.

6.2 感知计算机研究进展(Progress of the perceptual computer)

感知计算机(perceptual computer, Per-C)是用词计算理论实现主观判决的一种特定结构形式, 由Mendel在2001年提出^[100]. 如图5所示, Per-C包括编

码器、词计算引擎和解码器3部分. 类似于一般的词计算处理方式, Per-C首先把“词”编码成IT2-FS, 然后用词计算引擎得到推理输出IT2-FS, 最后由解码器把IT2-FS还原为“词”的形式.

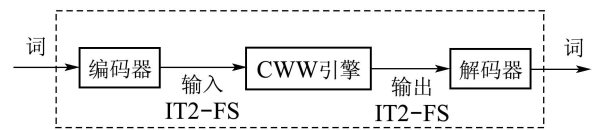


图 5 感知计算机结构简图

Fig. 5 Schematic diagram of the Per-C

为了实现Per-C的编码器, Wu和Mendel^[115]通过区间方法从一组对象的数据中合成FOU, 从而把“词”编码成IT2-FS. 词计算引擎设计的一个重要假设是, 激活规则合成得到的FOU必需与词计算编码簿里预先定义好的内部FOU、左肩FOU和右肩FOU这三种类型的FOU具有相似性^[116]. 这样基于规则的词计算引擎输出就会与编码簿里的FOU相符合, 因此解码器就可以很容易地建立与词计算输出FOU最相似的“词”. 传统的Mamdani型或TSK型词计算引擎都不满足上述假设. 针对这个问题, Mendel和Wu^[116,117]提出基于LWA合并模糊IF-THEN规则的词计算引擎, 又称为基于激活区间的感知推理机(firing-interval-based perceptual reasoning, FI-PR), 并建立起整个Per-C理论方法. 其后, Wu和Mendel^[118]详细研究了PR的特性, 指出输出为编码簿中相应FOU类型的具体条件. 接着, Wu和Mendel^[119]又提出基于相似性的感知推理机(similarity-based PR, S-PR), 并且用仿真比较实验表明S-PR得到的FOU比FI-PR得到的更接近编码簿里的FOU类型, 因此在词计算引擎中S-PR是更好的选择. 最近, Mendel^[120]对Per-C作了全面的回顾, 并对词计算中遇到的具体问题提出了些可行的解决思路.

7 结论与展望(Conclusions and prospects)

综上所述, II型模糊集合及系统的理论体系在数学上已经建立, 其复杂性研究取得了一定的进展, 基于IT2-FS的词计算理论也取得了不少成果. 同时, T2-FLS在众多高不确定性场合获得了成功应用, 体现出明显超过相应I型系统的性能表现. 但同样可见, T2-FLS的复杂性问题仍然没有得到彻底解决, 这在一定程度上限制了其在实时系统中的应用. 总结起来, II型模糊理论还有诸多问题有待进一步研究, 主要体现在以下几个方面:

1) 关于IT2-FLS的实时性和自适应律设计的问题. 虽然目前针对IT2-FLS已经提出不少简化方法, 但在实际应用中, TR方法基本上还是停留在使用KM算法和WM算法的阶段. 目前流行的基

于KM算法的自适应T2-FLS有两个缺陷:一是KM算法不能得到闭公式表示,因此给求导运算带来很大困难,并且将直接增加计算过程的复杂性^[55];二是KM算法迭代计算需要用到当前结论模糊集合的升序排列,但结论模糊集合一般就是需要自适应调整的对象,因此造成设计矛盾.而目前关于IT2-FLS的TR闭公式表示的研究结果还非常有限^[33,76].因此,把现有IT2-FLS简化方法应用到实时系统中,并通过闭公式表示的TR设计自适应IT2-FLS,必定具有很大的研究前景.

2) 关于GT2-FLS的复杂性问题. GT2-FLS可以对更复杂的不确定进行建模,因此必定具有比IT2-FLS更好的处理不确定能力^[2].针对GT2-FLS的复杂性问题,目前已经相继提出了一些近似计算方法和新的简化表示理论.但是真正在实际系统中得到验证的,目前只有几何学表示理论^[90]和 z -平面表示理论^[97],并且这些理论也仍然存在一些问题.因此,对GT2-FLS的复杂性问题进行进一步研究,并将其应用于实时系统中,将是今后研究工作的重点.

3) 关于建立优化设计T2-FLS结构的系统化方法.目前,设计T2-FLS的结构还带有很大的随意性,并没有形成一种优化设计的系统化方法.特别T2-FLS次隶属度函数确定问题,目前的研究还处于空白^[6].因此,类似于T1-FLS理论,如何针对实际问题选择集论运算方法、降阶和解模糊算法,如何构建FOU、次隶属度函数和模糊规则,以得到优化的T2-FLS,都是亟待解决的重要问题.

4) 关于在数学理论上得出T2-FLS性能超过相应T1-FLS的可测试条件.目前大量的实践结果表明,在高不确定性场合T2-FLS比相应T1-FLS具有明显的优越性,并且不确定程度越高,这种优势就越明显.但这些都还是定性分析,而没有形成相应的数学理论^[33].因此,在数学理论上建立T2-FLS性能超过相应T1-FLS的可测试条件,将是一个很具有意义和挑战性的课题.

参考文献(References):

- [1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. *Information and Control*, 1965, 8(13): 338 – 353.
- [2] JOHN R I, COUPLAND S. Type-2 fuzzy logic: a historical view[J]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2007, 2(1): 57 – 62.
- [3] MENDEL J M. Computing with words, when words can mean different things to different people[C] // *Proceedings of the International ICSC Symposium on Fuzzy Logic and Applications*. Rochester, USA: IEEE, 1999: 158 – 164.
- [4] KARNIK N N, MENDEL J M, LIANG Q. Type-2 fuzzy logic systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1999, 7(6): 643 – 658.
- [5] MENDEL J M, JOHN R I. Type-2 fuzzy sets made simple[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2002, 10(2): 117 – 127.
- [6] MENDEL J M. Type-2 fuzzy sets: some questions and answers[J]. *IEEE Neural Networks Society Newsletter*, 2003: 10 – 13.
- [7] MENDEL J M. Type-2 fuzzy sets and systems: an overview[J]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2007, 2(1): 20 – 29.
- [8] ZADEH L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I[J]. *Information Sciences*, 1975, 8(1): 199 – 249.
- [9] HISDAL E. The IF THEN ELSE statement and interval-valued fuzzy sets of higher type[J]. *International Journal of Man-Machine Studies*, 1981, 15(44): 385 – 455.
- [10] COUPLAND S, JOHN R I. Type-2 fuzzy logic and the modelling of uncertainty[M] // *Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models*. Berlin: Springer-Verlag, 2008: 3 – 22.
- [11] KARNIK N N, MENDEL J M. Applications of type-2 fuzzy logic systems to forecasting of time-series[J]. *Information Sciences*, 1999, 120(1): 89 – 111.
- [12] DU G, ZHU Z. Modelling spatial vagueness based on type-2 fuzzy set[J]. *Journal of Zhejiang University(Science A)*, 2006, 7(2): 250 – 256.
- [13] HERNANDEZ MEDINA M A, MENDEZ C M. Modelling and prediction of the MXNUSD exchange rate using interval singleton type-2 fuzzy logic systems[J]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2007, 2(1): 5 – 8.
- [14] ZARANDI M H F, TÜKSEN I B, KASBI O T. Type-2 fuzzy modeling for desulphurization of steel process[J]. *Expert Systems with Applications*, 2007, 32(1): 157 – 171.
- [15] LI Y, SUN X, HUA J, et al. Modelling redundant structure in ecosystem by type-2 fuzzy logic system[J]. *Ecological Modelling*, 2008, 211(1): 113 – 120.
- [16] LI Y, HUA J. Type-2 fuzzy mathematical modeling and analysis of the dynamical behaviors of complex ecosystems[J]. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 2008, 16(9): 1379 – 1391.
- [17] SINGH M, SRIVASTAVA S, HANMANDLU M, et al. Type-2 fuzzy wavelet networks(T2FWN) for system identification using fuzzy differential and Lyapunov stability algorithm[J]. *Applied Soft Computing*, 2009, 9(3): 977 – 989.
- [18] HAGRAS H. Type-2 FLCs: a new generation of fuzzy controllers[J]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2007, 2(1): 30 – 43.
- [19] HAGRAS H. Type-2 fuzzy logic controllers: a way forward for fuzzy systems in real world environments[M] // *Computational Intelligence: Research Frontiers*. Berlin: Springer-Verlag, 2008: 181 – 200.
- [20] HSIAO M Y, CHEN C Y, LI T H S. Interval type-2 adaptive fuzzy sliding-mode dynamic control design for wheeled mobile robots[J]. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2008, 10(4): 268 – 275.
- [21] LIN F J, CHOU P H, SHIEH P H, et al. Robust control of an LUSM-based X-Y- θ motion control stage using an adaptive interval type-2 fuzzy neural network[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2009, 17(1): 24 – 38.
- [22] LIN F J, CHOU P H. Adaptive control of two-axis motion control system using interval type-2 fuzzy neural network[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, 56(1): 178 – 193.
- [23] JUANG C, HSU C. Reinforcement ant optimized fuzzy controller for mobile-robot wall-following control[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, 56(10): 3931 – 3940.
- [24] BIGLARBEGLIAN M, MELEK W, MENDEL M. Design of novel interval type-2 fuzzy controllers for modular and reconfigurable robots: Theory and experiments[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronic*, 2011, 58(4): 1371 – 1384.
- [25] MITCHEL H B. Pattern recognition using type-II fuzzy sets[J]. *Information Sciences*, 2005, 170(2): 409 – 418.

- [26] HWANG C, RHEE F C. Uncertain fuzzy clustering: Interval type-2 fuzzy approach to C-means[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, 15(1): 107 – 120.
- [27] FISHER P. What is where: type-2 fuzzy sets for geographical information[J]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2007, 2(1): 9 – 14.
- [28] RHEE F C. Uncertain fuzzy clustering: insights and recommendations[J]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2007, 2(1): 44 – 56.
- [29] MELIN P, MENDOZA O, CASTILLO O. An improved method for edge detection based on interval type-2 fuzzy logic[J]. *Expert Systems with Applications*, 2010, 37(12): 8537 – 8535.
- [30] WIKIPEDIA. Type-2 fuzzy sets and systems[EB/OL]. USA: Wikimedia Foundation, Inc., 2010-10-22 [2011-02-14]. http://en.wikipedia.org/wiki/Type-2_Fuzzy_Sets_and_Systems.
- [31] 潘永平, 黄道平, 孙宗海. II型模糊控制综述[J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(1): 13 – 23.
(PAN Yongping, HUANG Daoping, SUN Zonghai. Overview of type-2 fuzzy logic control[J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(1): 13 – 23.)
- [32] 陈薇, 孙增圻. 二型模糊系统研究与应用[J]. *模糊系统与数学*, 2005, 19(1): 126 – 134.
(CHEN Wei, SUN Zengqi. Research on of type-2 fuzzy logic system and its application[J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 2005, 19(1): 126 – 134.)
- [33] MENDEL J M. Advances in type-2 fuzzy sets and systems[J]. *Information Sciences*, 2007, 177(1): 84 – 110.
- [34] MIZUMOTO M, TANAKA K. Some properties of fuzzy set of type-2[J]. *Information and Control*, 1976, 31(4): 312 – 340.
- [35] TANAKA M, MIZUMOTO K. Fuzzy sets of type 2 under algebraic product and algebraic sum[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1981, 5(1): 277 – 290.
- [36] NIEMINEN J. On the algebraic structure of fuzzy sets of type-2[J]. *Kybernetika*, 1977, 13(4): 261 – 273.
- [37] DUBOIS D, PRADE H. Operations on fuzzy numbers[J]. *International Journal of Systems Science*, 1978, 9(1): 613 – 626.
- [38] DUBOIS D, PRADE H. Operations in a fuzzy-valued logic[J]. *Information and Control*, 1979, 43(1): 224 – 240.
- [39] DUBOIS D, PRADE H. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*[M]. New York: Academic Press, 1982.
- [40] KARNIK N N, MENDEL J M. Introduction to type-2 fuzzy logic systems[C] // *Proceeding of the IEEE World Congress on Computational Intelligence*, Anchorage, USA: IEEE, 1998: 915 – 920
- [41] KARNIK N N, MENDEL J M. Type-2 fuzzy logic systems: type-reduction[C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*. San Diego, USA: IEEE, 1998, 2: 2046 – 2051.
- [42] KARNIK N N, MENDEL J M. Centroid of a type-2 fuzzy set[J]. *Information Sciences*, 2001, 132(1): 195 – 220.
- [43] KARNIK N N, MENDEL J M. Operations on type-2 fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 122(2): 327 – 348.
- [44] MENDEL J M. *Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions*[M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2001.
- [45] ZADEH L A. Toward a generalized theory of uncertainty (GTU)—an outline[J]. *Information Sciences*, 2005, 172(1): 1 – 40.
- [46] ZHAI D, MENDEL J M. Uncertainty measures for general type-2 fuzzy sets[C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*. San Antonio, USA: IEEE, 2009: 281 – 286.
- [47] LIU F. An efficient centroid type-reduction strategy for general type-2 fuzzy logic system[J]. *Information Sciences*, 2008, 178(9): 2224 – 2236.
- [48] RICKARD J T, AISBETT J, GIBBON G, et al. Fuzzy subhood for type-n fuzzy sets[C] // *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society*. New York: IEEE, 2008: 1 – 6.
- [49] HAGRAS H. A hierarchical type-2 fuzzy logic control architecture for autonomous mobile robots[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2004, 12(4): 524 – 539.
- [50] SCHWARZ D G. The case for an interval-based representation of linguistic truth[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1985, 17(2): 153 – 165.
- [51] GORZALCZANY M B. A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1987, 21(1): 1 – 17.
- [52] DZIECH A, GORZALCZANY M B. Decision making in signal transmission problems with interval-valued fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1987, 23(2): 191 – 203.
- [53] GORZALCZANY M B. Interval-valued fuzzy controller based on verbal model of object[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1988, 28(1): 45 – 53.
- [54] TÜKSEN I B. Fuzzy normal forms[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1995, 69(33): 319 – 346.
- [55] LIANG Q, MENDEL J M. Interval type-2 fuzzy logic systems: theory and design[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, 8(5): 535 – 549.
- [56] MENDEL J M, JOHN R I, LIU F. Interval type-2 fuzzy logic systems made simple[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2006, 14(6): 808 – 821.
- [57] JANG L, RALESCU D. Cardinality concepts for type-two fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 118(3): 479 – 487.
- [58] WU H, MENDEL J M. Uncertainty bounds and their use in the design of interval type-2 fuzzy logic systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2002, 10(5): 622 – 639.
- [59] MENDEL J M, WU H. Type-2 fuzzistics for symmetric interval type-2 fuzzy sets: Part 1, forward problems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2006, 14(6): 781 – 792.
- [60] WU D, MENDEL J M. Uncertainty measures for interval type-2 fuzzy sets[J]. *Information Sciences*, 2007, 177(23): 5378 – 5393.
- [61] MENDEL J M. On answering the question “where do I start in order to solve involving interval type-2 fuzzy sets?” [J]. *Information Sciences*, 2009, 179(19): 3418 – 3431.
- [62] MENDEL J M. Tutorial on the uses of the interval type-2 fuzzy set’s wavy slice representation theorem[C] // *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society*. New York: IEEE, 2008: 1 – 6.
- [63] LIU F, MENDEL J M. Aggregation using the fuzzy weighted average as computed by the Karnik-Mendel algorithms[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2008, 16(1): 1 – 12.
- [64] MENDEL J M, LIU F. Super-exponential convergence of the Karnik-Mendel algorithms for computing the centroid of an interval type-2 fuzzy set[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, 15(2): 309 – 320.
- [65] MENDEL J M. On a 50% savings in the computation of the centroid of a symmetrical interval type-2 fuzzy set[J]. *Information Sciences*, 2005, 172(3): 417 – 430.
- [66] WU D, MENDEL J M. Enhanced Karnik-Mendel algorithms for interval type-2 fuzzy sets and systems[C] // *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society*. New York: IEEE, 2007: 184 – 189.
- [67] WU D, MENDEL J M. Enhanced Karnik-Mendel algorithms[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2009, 17(4): 923 – 934.

- [68] MELGAREJO M. A fast recursive method to compute the generalized centroid of an interval type-2 fuzzy set[C] // *Proceedings of the 2007 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society*. New York: IEEE, 2007: 190 – 194.
- [69] DURAN K, BERNAL H, MELGAREJO M. Improved iterative algorithm for computing the generalized centroid of an interval type-2 fuzzy set[C] // *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society*. New York: IEEE, 2008: 1 – 6.
- [70] NIEWIADOMSKI A, OCHELSKA J, SZCZEPANIAK P S. Interval-valued linguistic summaries of databases[J]. *Control and Cybernetics*, 2006, 35(2): 415 – 443.
- [71] WU D, TAN W W. Computationally efficient type-reduction strategies for a type-2 fuzzy logic controller[C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Reno, USA: IEEE, 2005: 353 – 358.
- [72] LYNCH C, HAGRAS H, CALLAGHAN V. Embedded type-2 FLC for real-time speed control of marine and traction diesel engines[C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Reno, USA: IEEE, 2005: 347 – 352.
- [73] NIE M, TAN W W. Towards an efficient type-reduction method for interval type-2 fuzzy logic systems [C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. New York: IEEE, 2008: 1425 – 1432.
- [74] GREENFIELD S, CHICLANA F, COUPLAND S, et al. The collapsing method of defuzzification for discretised interval type-2 fuzzy sets[J]. *Information Sciences*, 2009, 179(13): 2055 – 2069.
- [75] GREENFIELD S, CHICLANA F, JOHN R I. Type-reduction of the discretised interval type-2 fuzzy set[C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Jeju Island, Korea: IEEE, 2009: 738 – 743.
- [76] MENDEL J M, WU H. New results about the centroid of an interval type-2 fuzzy set, including the centroid of a fuzzy granule[J]. *Information Sciences*, 2006, 177(2): 360 – 377.
- [77] ZHOU S, GARIBALDI J M, JOHN R I, et al. On constructing parsimonious type-2 fuzzy logic systems via influential rule selection[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2009, 17(3): 654 – 667.
- [78] LIANG Q, MENDEL J M. Designing interval type-2 fuzzy logic systems using an SVD-QR method: rule reduction[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2000, 15(10): 939 – 957.
- [79] LYNCH C, HAGRAS H, CALLAGHAN V. Using uncertainty bounds in the design of an embedded real-time type-2 neuro-fuzzy speed Controller for marine diesel engines[C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Vancouver, Canada: IEEE, 2006: 1446 – 1453.
- [80] GREENFIELD S, JOHN R I, COUPLAND S. A novel sampling method for type-2 defuzzification[C] // *Proceedings of the UK Workshop on Computational Intelligence*. London: UKCI, 2005: 120 – 127.
- [81] GREENELD S, JOHN R I. Optimized generalized type-2 join and meet operations[C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. London, UK: IEEE, 2007: 1 – 6.
- [82] STARCZEWSKI J T. A triangular type-2 fuzzy logic system[C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Vancouver, Canada: IEEE, 2006: 7231 – 7238.
- [83] STARCZEWSKI J T. Efficient triangular type-2 fuzzy logic systems[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2009, 50(5): 799 – 811.
- [84] STARCZEWSKI J T. Extended triangular norms[J]. *Information Sciences*, 2009, 179(6): 742 – 757.
- [85] GREENELD S, JOHN R I. Fuzzy logic and computational geometry[C] // *Proceedings of the International Conference on Recent Advances in Soft Computing*. Nottingham, UK: RASC, 2004: 3 – 8.
- [86] COUPLAND S, JOHN R I. A new and efficient method for the Type-2 meet operation[C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Budapest, Hungary: IEEE, 2004: 959 – 964.
- [87] COUPLAND S, JOHN R I. Towards more efficient type-2 fuzzy logic systems[C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Reno, USA: IEEE, 2005: 236 – 241.
- [88] COUPLAND S, JOHN R I. Geometric type-1 and type-2 fuzzy logic systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, 15(1): 3 – 15.
- [89] COUPLAND S. Type-2 fuzzy sets: geometric defuzzification and type-reduction[C] // *Proceedings of the IEEE Symposium on Foundations of Computational Intelligence*. Honolulu, USA: IEEE, 2007: 622 – 629.
- [90] COUPLAND S, JOHN R I. A fast geometric method for defuzzification of type-2 fuzzy sets[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2008, 16(4): 929 – 941.
- [91] COUPLAND S, WHEELER J, GONGORA M. A generalised type-2 fuzzy logic system embedded board and integrated development environment[C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Hong Kong, China: IEEE, 2008: 681 – 687.
- [92] MENDEL J M, LIU F. On new quasi-type-2 fuzzy logic systems[C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Hong Kong, China: IEEE, 2008: 354 – 360.
- [93] MENDEL J M, LIU F, ZHAI D. α -plane representation for type-2 fuzzy sets: theory and applications[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2009, 17(5): 1189 – 1207.
- [94] MENDEL J M. Comments on “ α -plane representation for type-2 fuzzy sets: theory and applications” [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, 18(1): 229 – 230.
- [95] WAGNER C, HAGRAS H. zSlices based general type-2 FLC for the control of autonomous mobile robots in real world environments[C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Jeju Island, Korea: IEEE, 2009: 718 – 725.
- [96] WAGNER C, HAGRAS H. zSlices—towards bridging the gap between interval and general type-2 fuzzy logic[C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Hong Kong, China: IEEE, 2008: 489 – 497.
- [97] WAGNER C, HAGRAS H. Towards general type-2 fuzzy logic systems based on zSlices[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, 18(4): 637 – 660.
- [98] ZADEH L A. From computing with numbers to computing with words - From manipulation of measurements to manipulation of perceptions[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 1999, 46(1): 105 – 119.
- [99] ZADEH L A. Fuzzy logic = computing with words[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1996, 4(2): 103 – 111.
- [100] MENDEL J M. The perceptual computer: An architecture for computing with words[C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Melbourne, Australia: IEEE, 2001: 35 – 38.
- [101] TÜKSEN I B. Type 2 representation and reasoning for CWW[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2002, 127(1): 17 – 36.
- [102] MENDEL J M. Fuzzy sets for words: a new beginning[C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. St. Louis, USA: IEEE, 2003: 37 – 42.
- [103] MENDEL J M. Computing with words: zadeh, turing, popper and occam[J]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2007, 2(4): 10 – 17.
- [104] MENDEL J M. Computing with words and its relationships with fuzzistics[J]. *Information Sciences*, 2007, 177(4): 988 – 1006.
- [105] MENDEL J M, WU H. Type-2 fuzzistics for symmetric interval type-2 fuzzy sets: part 2, inverse problems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, 15(2): 301 – 308.

- [106] MENDEL J M, WU H. Type-2 fuzzistics for nonsymmetric interval type-2 fuzzy sets: forward problems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, 15(5): 916 – 930.
- [107] TüKSEN I B. Belief, plausibility, and probability measures on interval-valued type 2 fuzzy sets[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2004, 19(7): 681 – 699.
- [108] TüKSEN I B. Meta-linguistic axioms as a foundation for computing with words[J]. *Information Sciences*, 2007, 177(2): 332 – 359.
- [109] MITCHELL H B. Ranking type-2 fuzzy numbers[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2006, 14(2): 287 – 294.
- [110] WU D, MENDEL J M. A vector similarity measure for linguistic approximation: interval type-2 and type-1 fuzzy sets[J]. *Information Sciences*, 2008, 178(2): 381 – 402.
- [111] WU D, MENDEL J M. The linguistic weighted average[C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Vancouver, Canada: IEEE, 2006: 566 – 573.
- [112] WU D, MENDEL J M. Aggregation using the linguistic weighted average and interval type-2 fuzzy sets[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, 15(6): 1145 – 1161.
- [113] WU D, MENDEL J M. Corrections to “aggregation using the linguistic weighted average and interval type-2 fuzzy sets” [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2008, 16(6): 1664 – 1666.
- [114] WU D, MENDEL J M. A comparative study of ranking methods, similarity measures and uncertainty measures for interval type-2 fuzzy sets[J]. *Information Sciences*, 2009, 179(8): 1169 – 1192.
- [115] LIU F, MENDEL J M. Encoding words into interval type-2 fuzzy sets using an interval approach[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2008, 16(6): 1503 – 1521.
- [116] MENDEL J M, WU D. Perceptual reasoning for perceptual computing[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2008, 16(6): 1550 – 1564.
- [117] MENDEL J M, WU D. Perceptual reasoning: a new computing with words engine[C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Granular Computing*. Fremont, CA: IEEE, 2007: 446 – 451.
- [118] WU D, MENDEL J M. Perceptual reasoning using interval type-2 fuzzy sets: properties[C] // *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Hong Kong, China: IEEE, 2008: 1219 – 1226.
- [119] WU D, MENDEL J M. Perceptual reasoning for perceptual computing: a similarity-based approach[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2009, 17(6): 1397 – 1411.
- [120] MENDEL J M. Historical reflections and new positions on perceptual computing[J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2009, 8(4): 325 – 335.

作者简介:

潘永平 (1982—), 男, 博士研究生, 研究方向为模糊系统及模糊控制、非线性自适应控制, E-mail: pan.yip@email.scut.edu.cn;

孙宗海 (1974—), 男, 副研究员, 研究方向为复杂系统建模与控制, E-mail: sunzh@scut.edu.cn;

黄道平 (1961—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为智能检测与智能控制, E-mail: audhuang@scut.edu.cn.