

# 基于非光滑观测器的间隙三明治系统状态估计

周祖鹏<sup>1,3</sup>, 谭永红<sup>2</sup>

(1. 西安电子科技大学 电子工程学院, 陕西 西安 710071;

2. 上海师范大学 信息与机电工程学院, 上海 200234; 3. 桂林电子科技大学 机电工程学院, 广西 桂林 541004)

**摘要:** 在工业领域, 机械传动系统、液压系统等往往含有间隙特性, 这类系统可以用带间隙的三明治系统描述. 本文针对带间隙的三明治系统特点, 构建了一种非光滑观测器以对系统状态进行估计. 首先根据带间隙三明治系统的特点, 采用分离原理, 建立了描述系统特性的非光滑状态空间方程. 据此构造了能够随系统工作区间变化而自动切换的非光滑观测器, 给出了相应的收敛定理及其证明. 最后通过伺服液压系统的例子, 分别比较了非光滑观测器和传统的观测器对状态的跟踪效果, 比较结果表明非光滑观测器对于带间隙三明治系统状态变量估计的准确性要优于传统的观测器.

**关键词:** 非光滑观测器; 间隙; 三明治系统; 状态估计

**中图分类号:** TP13      **文献标识码:** A

## Non-smooth observer for sandwich systems with backlash

ZHOU Zu-peng<sup>1,3</sup>, TAN Yong-hong<sup>2</sup>

(1. School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an Shaanxi 710071, China;

2. College of Information, Mechanical and Electrical Engineering, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China;

3. School of Mechanical and Electrical Engineering, Guilin University of Electronic Technology, Guilin Guangxi 541004, China)

**Abstract:** Industrial systems involving backlash, such as mechanical transmission systems and hydraulic systems, can be described by so-called sandwich systems with backlash. A novel non-smooth observer is proposed to handle the state estimation for sandwich systems with backlash. Based on the characteristics of the system, a non-smooth state-space equation is constructed by using the separation principle. A non-smooth observer is developed based on the obtained state-space equation. The observer switches automatically among different operating zones according to the changes of operation conditions. The convergence of the non-smooth observer is discussed. The application of this observer to a practical hydraulic servo system is realized. The comparison of tracking performances of the hydraulic servo system is made between the proposed non-smooth scheme and the conventional method. It is shown that the proposed non-smooth approach is with much better estimated performance.

**Key words:** non-smooth observer; backlash; sandwich system; state estimation

### 1 引言(Introduction)

间隙是一种重要的非光滑非线性特性, 它不仅广泛存在于齿轮机械传动系统、电动阀、数字电路、传感器和液压系统中<sup>[1]</sup>, 此外研究结果表明当受到电信号激励时, 在经络信道中也发现间隙迟滞现象<sup>[2]</sup>. 一般而言, 间隙特性并非孤立存在, 通常是夹在两个线性动态环节之间, 这类系统被称为带间隙的三明治系统<sup>[3-5]</sup>. 对于任何系统来说, 无论是实现系统闭环极点的任意配置, 或是实现最优控制和故障诊断都离不开全状态反馈<sup>[6-7]</sup>. 为此, 针对特定系统构造特定状态观测器估计其状态变量是控制领域的研究课题之一. 文献[8-10]通过求解矩阵不等式的方法获得观测器增益矩阵并对具有不确定性的非线性系统进行状态估计. 文献[11]利用神经网络构造观测器

对复杂非线性系统的状态进行估计. 文献[12-15]对线性切换系统进行状态估计. 由于带间隙的三明治系统不仅是含有非光滑特性, 而且间隙环节的前、后端都连接有动态子系统, 间隙的输入和输出均为不可测量的中间变量. 迄今为止, 尚未发现针对带间隙的三明治系统构造观测器的文献. 因此, 构造非光滑观测器对带间隙三明治系统状态进行准确估计是很有必要的.

### 2 带间隙的三明治离散时间系统模型(The model of the sandwich systems with backlash)

设所研究的带间隙三明治系统结构如图1所示, 其中:  $u$ 和 $y$ 分别为系统的输入和输出,  $L_1$ 为前段线

性子系统,  $L_2$ 则为后端线性子系统,  $x$ 和 $v$ 为不可测的中间变量,  $D_1$ 和 $D_2$ 为间隙宽度( $0 < D_1 < \infty$ 和 $0 < D_2 < \infty$ );  $m_1$ 和 $m_2$ 为线性区斜率( $0 < m_1 < \infty$ 和 $0 < m_2 < \infty$ ). 本节将介绍描述带间隙的三明治系统的模型, 为了便于构造状态观测器, 本文在文献[5]所提出的一种描述带间隙的三明治系统的输入输出参数模型的基础上, 构造相应的关于该系统的状态空间模型.

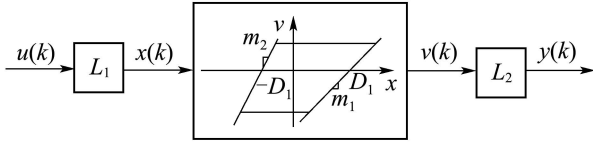


图1 带间隙的三明治系统的结构图

Fig. 1 The structure of the sandwich systems with backlash

## 2.1 三明治系统线性部分的模型(The models of the linear subsystems of the sandwich systems)

设前端线性子系统 $L_1$ 的状态方程表示为:

$$\mathbf{x}_1(k+1) = A_{11}\mathbf{x}_1(k) + B_{11}u(k), \quad (1)$$

$$y_1(k) = C_1\mathbf{x}_1(k). \quad (2)$$

而后端线性子系统 $L_2$ 的状态方程为

$$\mathbf{x}_2(k+1) = A_{22}\mathbf{x}_2(k) + B_{22}v(k), \quad (3)$$

$$y_2(k) = C_2\mathbf{x}_2(k), \quad (4)$$

其中:  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$ ,  $A_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $B_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$ ,  $y_i \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{1 \times n_i}$ ,  $u \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ ,  $v \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ ,  $i = 1, 2$ .  $x_{1i}$ 表示 $L_1$ 环节的第 $i$ 个状态变量,  $x_{2i}$ 表示 $L_2$ 环节的第 $i$ 个状态变量.  $A_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ 为转移矩阵,  $B_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$ 表示输入矩阵,  $y_i \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ 为输出,  $n_i$ 表示第 $i$ 个线性环节的状态变量的维数.  $u \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ 为输入,  $v \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ 为间隙环节的输出变量. 不失一般性, 建模时本文约定, 对于 $L_1$ 来说, 令 $x_{1n_1}(k) = x(k)$ ; 对于 $L_2$ 来说, 本文令 $x_{2n_2}(k) = y(k)$ . 注意到系统只有 $u(k)$ 和 $y(k)$ 可测.

## 2.2 三明治系统间隙部分的模型(The model of the backlash of the sandwich systems)

根据文献[5,16–17]可以得到间隙模型如下.  $x(k)$ 为间隙环节的输入,  $v(k)$ 为间隙环节的输出. 定义强制中间变量 $m(k)$ 和 $v_1(k)$ 如下所示:

$$m(k) = m_1 + (m_2 - m_1)p(k), \quad (5)$$

其中:

$$\Delta x(k) = x(k) - x(k-1),$$

$p(k)$ 为引入的切换函数, 其定义为

$$p(k) = \begin{cases} 0, & \Delta x \geq 0, \\ 1, & \Delta x < 0. \end{cases} \quad (6)$$

定义中间变量 $v_1(k)$ 为

$$v_1(k) = m(k)(x(k) - D_1g_1(k) + D_2g_2(k)), \quad (7)$$

其中:

$$g_1(k) = \begin{cases} 1, & x(k) > \frac{v(k-1)}{m_1} + D_1 \text{ 且 } \Delta x(k) > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$g_2(k) = \begin{cases} 1, & x(k) < \frac{v(k-1)}{m_2} - D_2 \text{ 且 } \Delta x(k) < 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

为切换函数. 根据间隙的输入输出关系可得

$$v(k) = v_1(k) + [v(k-1) - v_1(k)]g_3(k) = (1 - g_3(k))v_1(k) + g_3(k)v(k-1), \quad (8)$$

其中

$$g_3(k) = \begin{cases} 1, & g_1(k) + g_2(k) = 0, \\ 0, & g_1(k) + g_2(k) = 1 \end{cases}$$

为切换函数, 负责间隙线性区和记忆区之间的切换. 若将式(8)代入式(3), 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(k+1) &= A_{22}\mathbf{x}_2(k) + B_{22}v(k) = \\ &A_{22}\mathbf{x}_2(k) + B_{22}[(1 - g_3(k))m(k)x_{1n_1}(k) - \\ &(1 - g_3(k))m(k)D_1g_1(k) + (1 - g_3(k)) \times \\ &m(k)D_2g_2(k)] + B_{22}g_3(k)v(k-1). \end{aligned} \quad (9)$$

## 2.3 带间隙三明治系统的整体状态空间方程(State space model of the sandwich systems with backlash)

由式(1)–(4)和式(9)可得

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) \\ \mathbf{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ A_{21i} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} B_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\theta}_{22i} \end{bmatrix}, \\ y(k) = C\mathbf{x}(k). \end{cases} \quad (10)$$

系统1–3区分区如下:

$$i = \begin{cases} 1, & x_{1n_1}(k) > \frac{v(k-1)}{m_1} + D_1 \text{ 且 } \Delta x_{1n_1}(k) > 0, \\ 2, & \text{其他,} \\ 3, & x_{1n_1}(k) < \frac{v(k-1)}{m_2} - D_2 \text{ 且 } \Delta x_{1n_1}(k) < 0, \end{cases}$$

其中:

$$\begin{aligned} A_{21i} &= [\beta_1 \quad \beta_{2i}], \beta_1 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_2 \times (n_2 - 1)}, \\ \beta_{2i} &= \begin{cases} B_{22}m_1, & i = 1, \\ 0, & i = 2, \\ B_{22}m_2, & i = 3, \end{cases} \\ \theta_{22i} &= \begin{cases} -B_{22}m_1D_1, & i = 1, \\ B_{22}v(k-1), & i = 2, \\ B_{22}m_2D_2, & i = 3, \end{cases} \\ \beta_{2i} &\in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}, \theta_{22i} \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}. \end{aligned}$$

根据第1节中的假设可知,如图1所示的带间隙三明治系统只有其输出可测,所以有

$$C = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] = [C_{11} \quad C_{22}] \in \mathbb{R}^{1 \times (n_1 + n_2)},$$

其中:

$$C_{11} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{1 \times n_1}, C_{22} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \in \mathbb{R}^{1 \times n_2}.$$

若令

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ A_{21i} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \eta_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \theta_{22i} \end{bmatrix},$$

则式(10)可写成分段矩阵形式:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_i \mathbf{x}(k) + Bu(k) + \eta_i, \quad (11)$$

其中:  $A_i$ 表示不同工作区间的转移矩阵,  $B$ 是输入矩阵,  $\eta_i$ 向量是由于间隙存在而产生的切换向量.

### 3 带间隙三明治系统的非光滑观测器(Non-smooth observer of sandwich systems with backlash)

首先,一个需要明确的事实是:如果系统只有输入和输出可测,那么该三明治系统只有在线性工作区是满足完全能观条件的,即只当 $j = 1, 3$ 时,能观性矩阵 $N = [C \quad CA_j \quad \cdots \quad CA_j^{n_1+n_2-1}]^T$ 的秩等于 $n_1 + n_2$ .而在记忆工作区间,能观性矩阵的秩等于 $n_2$ ,即后端的线性子系统 $L_2$ 完全能观,而前端子系统 $L_1$ 不能观.所以,从整个工作区间来看, $\mathbf{x}_1$ 子系统是不能观的, $\mathbf{x}_2$ 子系统是能观的.故整个带间隙的三明治系统不完全能观.因为传统的线性观测器增益反馈矩阵的求法和利用共用Lyapunov方法求解切换系统观测器增益反馈矩阵的方法都要求系统完全能观,因此,这些方法对三明治系统都不再适用.

#### 3.1 三明治系统非光滑观测器(Non-smooth observer for sandwich system)

根据式(11),构造相应的带间隙三明治系统的龙伯格型观测器,即

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= A_j \hat{\mathbf{x}}(k) + Bu(k) + \hat{\eta}_j + \\ &K(y(k) - \hat{y}(k)), j = 1, 2, 3, \quad (12) \end{aligned}$$

$$j = \begin{cases} 1, & \hat{x}_{1n_1}(k) > \frac{\hat{v}(k-1)}{m_1} + D_1 \text{ 且 } \Delta \hat{x}_{1n_1}(k) > 0, \\ 2, & \text{其他}, \\ 3, & \hat{x}_{1n_1}(k) < \frac{\hat{v}(k-1)}{m_2} - D_2 \text{ 且 } \Delta \hat{x}_{1n_1}(k) < 0, \end{cases}$$

$$\hat{y}(k) = C \hat{\mathbf{x}}(k),$$

其中:

$$\hat{\eta}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\theta}_{22j} \end{bmatrix}, \hat{\theta}_{22j} = \begin{cases} -B_{22}m_1D_1, & j = 1, \\ B_{22}\hat{v}(k-1), & j = 2, \\ B_{22}m_2D_2, & j = 3, \end{cases}$$

增益矩阵 $K = [K_1 \quad K_2]^T$ ,  $K_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}$ ,  $K_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$ .值得注意的是:由于系统只有输入 $u(k)$ 和输出 $y(k)$ 可测,决定系统工作区间的状态变量 $x_{1n_1}$ ,  $\Delta x_{1n_1}$ 和 $v$ 是不可测的,因此观测器只能根据估计状态 $\hat{x}_{1n_1}$ ,  $\Delta \hat{x}_{1n_1}$ 和 $\hat{v}$ 进行切换.而在初始阶段由于观测器给定的初始值与实际系统的真实值之间可能存在误差,因此,观测器在初始阶段有可出现估计区间错误的情况,从而引起较大估计误差.所以无论对系数矩阵还是对间隙向量而言都有可能存在估计误差.因此,在求观测器误差动态转移关系时,应该考虑到这个问题.用式(11)减去式(12),并考虑观测器可能存在区间估计误差,可得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(k+1) &= F_g \mathbf{e}(k) + \Delta A_{sg} \mathbf{x}(k) + \Delta \eta_{sg}, \quad (13) \\ F_g &= (A_{g(k)} - KC), \Delta A_{sg} = A_{s(k)} - A_{g(k)}, \\ \Delta \eta_{sg} &= \eta_{s(k)} - \hat{\eta}_{g(k)}, g(k) \in \{1, 2, 3\}, \\ s(k) &\in \{1, 2, 3\}, \end{aligned}$$

其中:  $g(k)$ 表示观测器所在区间序号,  $s(k)$ 表示系统所在区间序号,例如,观测器在1区,而系统在2区,那么 $g(k) = 1, s(k) = 2$ .按子状态 $\mathbf{x}_1$ 和子状态 $\mathbf{x}_2$ 的分块矩阵形式代入式(13),并做分块矩阵运算,可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1(k+1) \\ \mathbf{e}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & -K_1 C_{22} \\ A_{21g(k)} & A_{22} - K_2 C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1(k) \\ \mathbf{e}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Delta A_{21sg} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta \theta_{22sg} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

由式(14)分别给出子状态 $\mathbf{x}_1$ 和子状态 $\mathbf{x}_2$ 的观测器的误差动态转移方程:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1(k+1) &= A_{11} \mathbf{e}_1(k) - K_1 C_{22} \mathbf{e}_2(k), \quad (15) \\ \mathbf{e}_2(k+1) &= A_{21g(k)} \mathbf{e}_1(k) + (A_{22} - K_2 C_{22}) \mathbf{e}_2(k) + \\ &\Delta A_{21sg} \mathbf{x}_1(k) + \Delta \theta_{22sg}, \quad (16) \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}\Delta A_{21sg} &= A_{21s(k)} - A_{21g(k)}, \\ \Delta \theta_{22sg} &= \theta_{22s(k)} - \hat{\theta}_{22g(k)}, \quad e(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k), \\ g(k) &\in \{1, 2, 3\}, \quad s(k) \in \{1, 2, 3\},\end{aligned}$$

其中:  $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 表示观测器对状态的估计值,  $e(k)$ 表示观测器的估计误差.

### 3.2 非光滑观测器收敛性定理(Convergence theorem of non-smooth observer)

**定理** 对于如式(11)所示的带间隙的三明治系统和式(12)所示的非滑观测器, 观测器的反馈增益矩阵可分解为

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}, \quad K_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}, \quad K_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}.$$

设系统子状态 $\mathbf{x}_1$ 有界限, 即 $\forall k, \|\mathbf{x}_1(k)\|_m \leq x_b$ ,  $x_b \geq 0$ 为给定常数; 且观测器 $e_1$ 的初始误差亦有界, 即 $\|e_1(1)\|_m \leq e_b$ ,  $e_b \geq 0$ 为给定的常数. 若子系统 $\mathbf{x}_1$ 的系数矩阵 $A_{11}$ 的特征值均在单位圆内且 $K_1 = \mathbf{0}$ , 而子系统 $\mathbf{x}_2$ 的系数矩阵 $A_{22}$ 与对应的子增益矩阵 $K_2$ 构成的特征矩阵 $(A_{22} - K_2 C_{22})$ 的特征值也均在单位圆内时, 则式(12)所示的观测器的估计误差最终收敛到零. 定理证明见附录.

## 4 应用实例(Application example)

图2给出了伺服液压传动装置的原理结构图. 当伺服电机 $L_1$ 的输入和输出分别为电压 $u(k)$ 和线性位移 $x(k)$ 时, 伺服电机可以看作是一个2阶的动态线性子系统. 当负载 $L_2$ 的输入和输出分别为液压控制阀等效输入 $v(k)$ 和负载线性位移 $y(k)$ 时, 负载子系统也可以认为是一个2阶动态线性子系统. 由于液压控制阀不可避免地存在油隙(阀的油隙是由摩擦力和机械固定部分的间隙等因素造成), 所以 $x(k)$ 实际上需要经过一个间隙环节才变成负载 $L_2$ 的等效输入 $v(k)$ . 因此, 整个系统的构成为: 两端是两个2阶线性子系统, 中间一个间隙环节. 因此整个系统可以看作是一个带有间隙的三明治系统. 采样周期 $T = 0.01$  s.

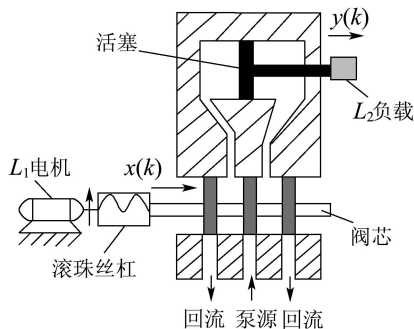


图2 伺服液压传动装置原理简图

Fig. 2 Schematic diagram of the servo-hydraulic system

线性环节 $L_1$ :

$$\begin{bmatrix} x_{11}(k+1) \\ x_{12}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 & 0 \\ 0.01 & 0.99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(k) \\ x_{12}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.004107 \\ 0 \end{bmatrix} u(k).$$

线性环节 $L_2$ :

$$\begin{bmatrix} x_{21}(k+1) \\ x_{22}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.01 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21}(k) \\ x_{22}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0 \end{bmatrix} v(k).$$

间隙环节:

$$BL(x_{12}(k)) = v(k) = \begin{cases} x_{12}(k) - 0.04, & x_{12}(k) > x_{12}(k-1) + 0.04 \\ & \text{且} \Delta x_{12}(k) > 0, \\ x_{12}(k-1), & \text{其他,} \\ x_{12}(k) + 0.04, & x_{12}(k) < x_{12}(k-1) - 0.04 \\ & \text{且} \Delta x_{12}(k) < 0, \end{cases}$$

$$y(k) = C\mathbf{x}(k) =$$

$$[0 \ 0 \ 0 \ 1][x_{11}(k) \ x_{12}(k) \ x_{21}(k) \ x_{22}(k)]^T,$$

其中:  $x_{11}$ 为控制阀的移动速度(m/s),  $x_{12}$ 为控制阀的位移(m)(对应图1中的 $x(k)$ ),  $x_{21}$ 为液压缸的移动速度(m/s),  $x_{22}$ 为液压缸的位移(m)(对应图1中的 $y(k)$ ). 根据第2节给出的定理, 并结合式(12)的观测器,  $\mathbf{x}_1$ 的系数矩阵 $A_{11}$ 的特征值为 $[0.99 \ 0.45]$ 在单位圆内, 当增益矩阵

$$K = [0 \ 0 \ 0.1 \ 0.1]^T$$

时,  $K_1 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}_2$ 子系统的特征矩阵 $(A_{22} - K_2 C_{22})$ 的特征值为 $[0.9000 + 0.0316i, 0.9000 - 0.0316i]^T$ 均在单位圆内, 因此满足定理给出的观测器收敛条件. 由于传统的观测器设计忽略间隙的影响, 因此所构建观测器是光滑的, 那么原来的三明治系统模型蜕变成了由两个线性环节和一个比例环节串联而成的系统. 相应的观测器具有如下形式:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = A\hat{\mathbf{x}}(k) + Bu(k) + K_l(y(k) - \hat{y}(k)).$$

若取 $K_l = [0 \ 0 \ 0.1 \ 0.1]^T$ , 观测器满足收敛条件<sup>[18]</sup>. 设观测器的初始值为 $\hat{\mathbf{x}}(0) = [2 \ 0.3 \ 0.6 \ 0.03]^T$ , 真实初始值:  $\mathbf{x}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , 非光滑观测器和传统观测器的状态估计结果如图3和图4所示. 图3-4中, 实线表示状态的真实值, 虚线表示状态的估计值. 估计误差如图5所示. 比较图3和图4可知, 非光滑观测器能够准确地跟踪各个状态, 而传统观测器对后两个状态的估计误差较大. 从图5中可见, 子状态 $\mathbf{x}_1$ 的收敛速度相同; 对能观子状态 $x_{21}$ 和 $x_{22}$ 来说, 设定

误差带为 $\pm 0.0025$ (误差带在图5中用点线表示的区域),非光滑观测器分别经过581次和440次迭代后其估计误差进入设定的误差带中,而对于传统观测器

来说, $x_{21}$ 和 $x_{22}$ 的估计误差始终无法进入设定的误差带中.由此也得知非光滑观测器无论在估计精度还是收敛速度上都好于传统的观测器.

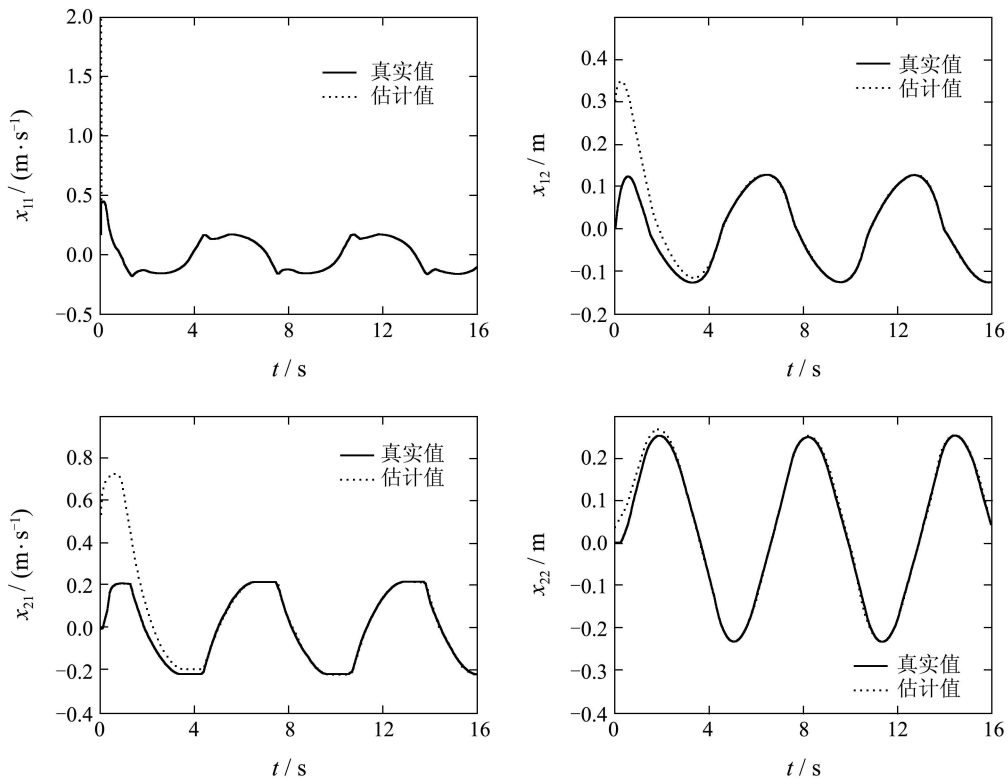


图3 非光滑观测器跟踪效果

Fig. 3 The estimate performance of the non-smooth observer

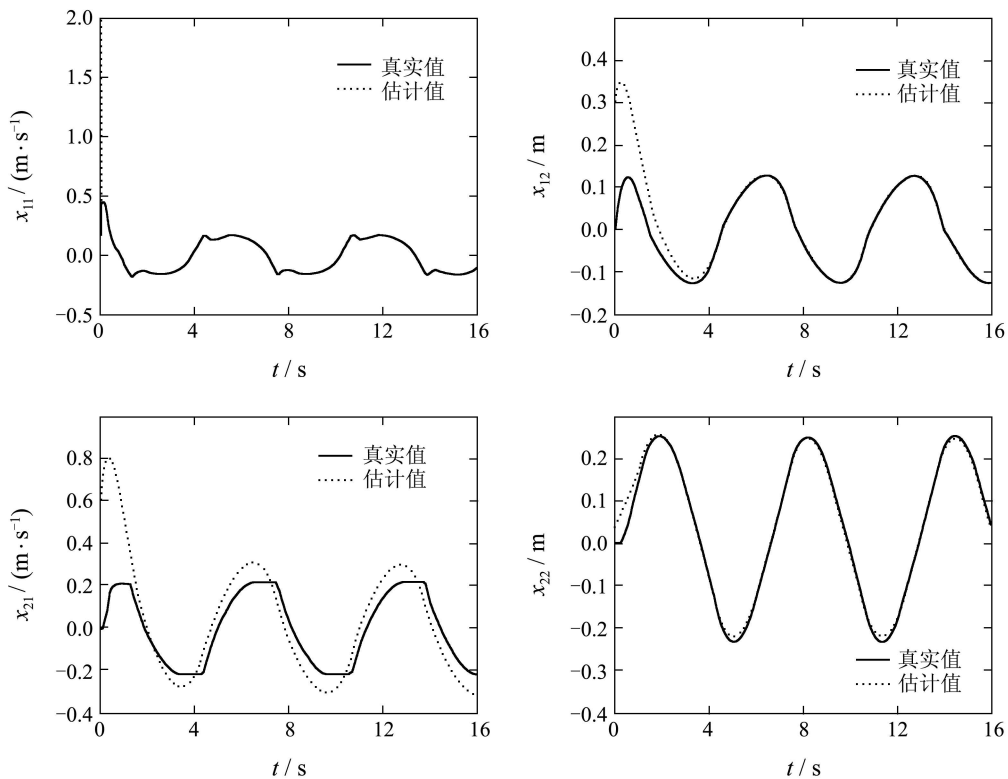


图4 传统观测器跟踪效果

Fig. 4 The estimation performance of conventional observer

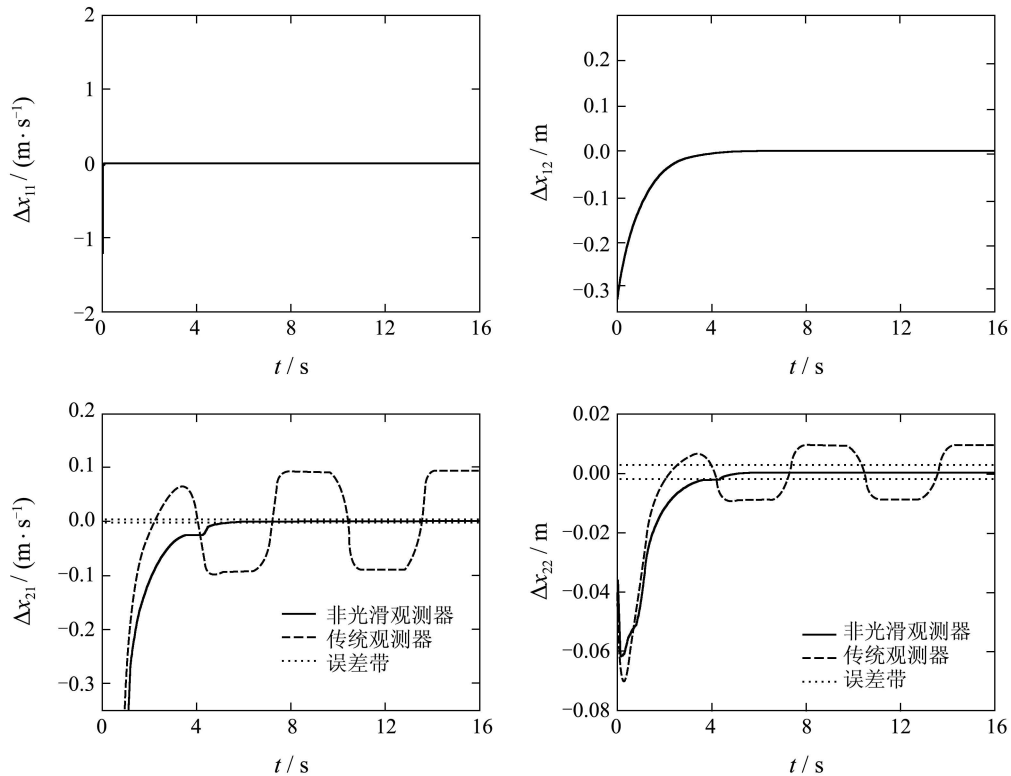


图 5 观测器误差比较

Fig. 5 Estimation error comparison of two kinds of observers

## 5 结论(Conclusion)

工业中常见的机械传动系统、阀门、液压系统等往往存在间隙特性, 可以用带间隙的三明治系统来描述这些含有间隙的工业系统. 由于间隙是一种非光滑、多值映射的非线性, 因此对于带间隙的三明治, 采用系统传统的状态观测器难以获得令人满意的估计效果. 本文提出了一种非光滑观测器以估计这类系统的状态. 通过构造描述这类系统的非光滑状态空间模型, 进而在观测器中引入自动切换项, 从而获得了对这类具有复杂结构和特性系统的观测器. 本文讨论了观测器的结构和设计原则, 分析了非光滑观测器的收敛性. 应用举例表明本文提出的非光滑观测器能够快速、准确跟踪系统的状态, 与传统的观测器相比, 非光滑观测器获得了较快和更准确的状态估计效果.

## 参考文献(References):

- [1] SHIVA S T, KARI S. Backlash identification in transmission unit[C] //The 18th IEEE International Conference on Control Applications Part of 2009 IEEE Multi-conference on Systems and Control. Piscataway: IEEE, 2009: 1325 – 1331.
- [2] DONG R L, TAN Y H, CHEN H. Modeling of hysteresis in human meridian system with recurrent neural networks[M] //Recurrent Neural Networks for Temporal Data Processing. Rijeka: InTech-Open Access Publisher, 2011: 52 – 64.
- [3] VOROS J. Recursive identification of Hammerstein systems with discontinuous nonlinearities containing dead-zones[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(12): 2203 – 2206.
- [4] AVINASH T, GANG T. *Control of sandwich nonlinear system*[D]. Virginia: University of Virginia, 2001: 27 – 37.
- [5] 董瑞丽. 非光滑三明治系统的辨识和控制研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2008: 25 – 37.  
(DONG Ruili. *Identification and control of the nonsmooth sandwich systems*[D]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University, 2008: 25 – 37.)
- [6] CACCAVALE F, CILIBRIZZI P, PIERRI F, et al. Actuator fault diagnosis for robot manipulators with uncertain model[J]. *Control Engineering Practice*, 2009, 17(1): 14 – 157.
- [7] CACCAVALE F, PIERRI F, VILLANI L. Adaptive Observer for fault diagnosis in nonlinear discrete-time systems[J]. *ASME Journal of Dynamic System, Measurement, and Control*, 2008, 130(2): 1 – 9.
- [8] WU H S. Adaptive robust state observers for a class of uncertain nonlinear dynamical systems with delayed state perturbations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(6): 1407 – 1412.
- [9] REMY N, DAMIEN K, EDUARDO M. LMI design of a switched observer with model uncertainty: application to a hysteresis mechanical system[C] //Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control. Piscataway: IEEE, 2007: 6298 – 6303.
- [10] SUMIT O, SULGI H, YAODONG P. Discrete-time sliding mode control electronic throttle valve[C] //Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control. Piscataway: IEEE, 2001: 1819 – 1824.
- [11] SHAIK F A, PURWAR S. A nonlinear state observer design for 2-dof twin rotor system using neural networks[C] //2009 International Conference on Advances in Computing, Control, and Telecommunication Technologies. Piscataway: IEEE, 2009: 15 – 19.
- [12] ALESSANDRI A, COLETTA P. Design of Luenberger observers for a class of hybrid linear systems[C] //Hybrid Systems: Computation and Control. Rome: Springer, 2001: 7 – 18.

- [13] ALESSANDRI A, COLETTA P. Switching observers for continuous-time and discrete-time linear systems[C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Arlington: IEEE, 2001: 2516 – 2521.
- [14] JULOSKI A, HEEMELS W P M H, WEILAND S. Observer design for a class of piecewise affine systems[C] // *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas: IEEE, 2002: 2606 – 2611.
- [15] JULOSKI A, HEEMELS W P M H, BOERS Y, et al. Two approaches to state estimation for a class of piecewise affine systems[C] // *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas: IEEE, 2003: 143 – 148.
- [16] DONG R, TAN Q, TAN Y. Recursive identification algorithm for dynamic systems with output backlash and its convergence[J]. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2009, 19(4): 631 – 638.
- [17] DONG R L, TAN Y H, CHEN H. Recursive identification for dynamic systems with backlash[J]. *Asian Journal of Control*, 2010, 12(1): 26 – 38.
- [18] 刘豹, 唐万生. 现代控制理论[M]. 第3版. 北京: 机械工业出版社, 2006: 210 – 212.  
(LIU Bao, TANG Wansheng. *Modern Control Theory*[M]. 3rd Edition. Beijing: Press of Mechanical Technology, 2006: 210 – 212.)
- [19] 曾祥金, 吴华安. 矩阵分析及其应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2007: 115 – 123.  
(ZENG Xiangjin, WU Hua'an. *Analysis and Application of Matrix*[M]. Wuhan: Press of Wuhan University, 2007: 115 – 123.)

## 附录(Appendix) 定理证明(Proof of the Theorem)

证 根据式(15)和式(16), 可得

$$e_1(k+1) = A_{11}e_1(k) - K_1C_{22}e_2(k), \quad (A1)$$

$$e_2(k+1) = A_{21g(k)}e_1(k) + (A_{22} - K_2C_{22})e_2(k) + \Delta A_{21sg}x_1(k) + \Delta\theta_{22sg}, \quad (A2)$$

根据定理的已知条件:  $K_1 = \mathbf{0}$ , 且  $A_{11}$  和  $A_{22} - K_2C_{22}$  的特征值均在单位圆内, 即它们的特征值的模都小于1 ( $|\lambda_i| < 1$ ), 根据对矩阵谱半径的定义有:  $A_{11}$  的谱半径  $\rho(A_{11}) < 1$ ,  $A_{22} - K_2C_{22}$  的谱半径  $\rho(A_{22} - K_2C_{22}) < 1$ . 因为  $K_1 = \mathbf{0}$ , 由式(A1)可得

$$e_1(k+1) = A_{11}e_1(k), \quad (A3)$$

对式(A3)进行递推, 得到

$$e_1(k+1) = A_{11}^k e_1(1). \quad (A4)$$

由参考文献[16]中的矩阵序列收敛定理可知: 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \mathbf{0}$  的充分必要条件是  $A$  的谱半径  $\rho(A) < 1$ . 因此,

$$\rho(A_{11}) < 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} A_{11}^k = \mathbf{0}, \quad (A5)$$

又由定理可知, 给定观测器的初始误差有界, 即  $\|e_1(1)\|_m \leq e_b$ ,  $e_b \geq 0$ , 则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_1(k+1)\|_m = \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_1(1)A_{11}^k\|_m \leq e_b \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_{11}^k\|_m \rightarrow 0, \quad (A6)$$

即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_1(k)\|_m = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} e_1(k) = \mathbf{0} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (\hat{x}_1(k) - x_1(k)) = \mathbf{0}. \quad (A7)$$

因此,  $\hat{x}_1(k)$  收敛于  $x_1(k)$  得证.

由式(A7)可知, 对于任意小的  $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ , 总存在  $N_1 (N_1$  为大于零的正整数), 当  $k > N_1$  时,  $x_{1n_1}(k) \approx \hat{x}_{1n_1}(k)$ ,  $\Delta x_{1n_1}(k) \approx \Delta \hat{x}_{1n_1}(k)$ . 由于实际间隙环节与观测器构造的间隙环节结构完全相同, 所以观测器间隙输出再经过  $N_2$  次迭代, 必有间隙输出:  $v(k-1) \approx \hat{v}(k-1)$ . 结合式(11)和式(12)中关于  $s(k)$  和  $g(k)$  的计算公式可知:

$$s(k) = g(k), \quad k > N_1 + N_2. \quad (A8)$$

根据式(A8)则有:  $\Delta A_{21sg} = A_{21s(k)} - A_{21g(k)} = \mathbf{0}$ ,  $\Delta\theta_{22sg} = \theta_{22s(k)} - \hat{\theta}_{22g(k)} = \mathbf{0}$ . 由此可以推出, 当  $k \rightarrow \infty$  时, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta A_{21sg} = \mathbf{0}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta\theta_{22sg} = \mathbf{0} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta A_{21sg}\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta\theta_{22sg}\| = 0. \quad (A9)$$

根据参考文献[16]中的定理: 对于给定条件的  $\varepsilon$  总存在某个范数  $\|\cdot\|_m$ , 使得

$$\|A_{22} - K_2C_{22}\|_m \leq \rho(A_{22} - K_2C_{22}) + \varepsilon < 1 \Rightarrow$$

$$\|A_{22} - K_2C_{22}\|_m < 1$$

成立. 对式(A2)两边取  $m$  范数后再取极限, 并根据范数三角不等性, 相容性和等价性, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_2(k+1)\|_m \leq \|A_{21g(k)}\|_m \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_1(k)\|_m + \|(A_{22} - K_2C_{22})\|_m \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_2(k)\|_m + \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta A_{21sg}\|_m \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_1(k)\|_m + \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta\theta_{22sg}\|_m. \quad (A10)$$

根据式(A7)(A9)和式(A10)以及定理中给定  $\|x_1(k)\|_m$  有界条件, 推出:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_2(k+1)\|_m \leq \|(A_{22} - K_2C_{22})\|_m \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_2(k)\|_m, \quad (A11)$$

因此, 由式(A11)可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|e_2(k+1)\|_m}{\|e_2(k)\|_m} \leq \|(A_{22} - K_2C_{22})\|_m < 1, \quad (A12)$$

因为  $\|e_2(k)\|_m$  范数序列是一个正值序列, 且式(A12)成立, 根据正项级数的比值判别定理可知, 该正项级数收敛. 而正项级数收敛的必要条件是其序列的极限为零, 由此可得  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_2(k)\|_m = 0$ . 因此,  $\hat{x}_2(k)$  收敛于  $x_2(k)$ , 定理得证.

作者简介:

周祖鹏 (1977—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为非线性系统状态估计、非线性系统故障诊断等, E-mail: zhouzupeng@guet.edu.cn;

谭永红 (1958—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为智能控制与信号处理、非线性系统建模与控制、机电系统故障诊断等, E-mail: tanyongh@yahoo.com.cn, 通讯作者.