

异构多无人机网络化协同控制系统的可控性

陈际玮, 周 锐, 吴 江

(北京航空航天大学 自动化科学和电气工程学院, 北京 100191)

摘要: 研究具有Leader-Follower结构和分布式通信拓扑的异构多无人机网络化分布式协同控制系统的可控性问题. 基于同构网络的受控一致性思想建立了异构多飞行器网络控制系统的动态模型; 并针对该动态模型的不同形式, 基于代数图论和传统的控制理论, 分别得到了异构多无人机网络化协同控制系统的可控性条件, 尤其是可控性与该网络化系统中通信拓扑之间的关系; 然后分析且提出了改善系统可控性的可行性方法. 最后仿真结果验证了本文相关结论的正确性.

关键词: 异构多无人机网络; 可控性; 网络化系统; 代数图论

中图分类号: TP13; V279 **文献标识码:** A

Controllability of heterogeneous networked systems for multiple unmanned aerial vehicles

CHEN Ji-wei, ZHOU Rui, WU Jiang

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: We investigate the controllability of heterogeneous networked systems for multiple unmanned aerial vehicles (UAV) which are distributed-cooperatively controlled in the leader-follower configuration and with the local distributed communication topology. On the basis of the homogeneous networked control consistency, the dynamic models of the multi-UAV networked systems are obtained. The algebraic graph theory and the traditional control theory are respectively applied to each form of dynamic models for obtaining the controllability condition, and the relations between the controllability and the communication topology in the networked systems. Feasible methods for improving the system controllability are also analyzed and presented. Finally, numerical examples are provided to illustrate the correctness of the proposed methods.

Key words: heterogeneous multiple UAVs network; controllability; networked system; algebraic graph

1 引言(Introduction)

无人机(UAV)的出现将改变未来作战方式. 通过网络将UAV构成作战网络, 由一架或多架有人机(Leader)带领一群UAV(Follower)协同作战, 如图1所示. 有人机可在敌防区外对UAV机群进行控制, 而UAV则在战场前沿实施侦察和打击任务. 有人机与UAV之间以及UAV与UAV之间都采用视距内分布式通信, 以达到电子静默和战术隐身的效果. 其好处是等效于UAV延伸了有人机的探测、作战及安全距离. 据悉, 美国正在考虑将B-2隐身轰炸机、F-22或KC-10加油机作为“长机(Leader)”控制一群无人攻击机对目标进行“狼群攻击”^[1-2]. 这种异构的分布式多UAV网络隐含的一个科学问题是: 网络中的Leader在仅能将控制信息直接作用于网络中相邻而不是全部Follower情况下, Leader是否能够以及如何实现对网络中所有Follower的协同控制? 即Leader是否能够并如何实现对全体Follower的状态转移控制.

显然, 必须首先解决什么样的通信拓扑可以确保异构网络的可控性^[3-4].



图1 具有Leader-Follower结构的异构多UAV网络
Fig. 1 The heterogeneous multiple UAVs network with the Leader-Follower structure

网络化系统广泛存在于科学和工程领域, 如生理系统和基因网络^[5]、大规模能源系统、多种多样的交通工具^[6-7]等. 对网络化系统的研究也一直在进行, 如对系统的一致性问题的研究^[8-11]、对编队控制的研究^[6, 12]等. 同时对网络化系统可控性的研究也有了一定的成果^[3-4, 13-16].

收稿日期: 2010-10-26; 收修改稿日期: 2011-04-19.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60975073, 61175109); 教育部博士点基金资助项目(20091102110006); 总装重点实验室基金资助项目(9140C4602041003); 航空科学基金资助项目(2011ZC13001).

本文主要分析具有 Leader-Follower (长机-僚机) 结构的异构多UAV网络化分布式协同控制系统的可控性问题, 主要思想是将Leaders看成系统的控制输入, 再依据受控一致性协调思想得出系统的动态模型表示, 进而对系统的可控性进行分析. 本文首先对其简化模型进行了可控性分析, 在此基础上继而针对系统动态表示中Followers自身状态的不同动态变化模型分别进行可控性分析. 可控性分析的主要内容是将可控性与系统的图论性质联系起来, 从而得到了一系列异构多UAV网络系统可控的充分或必要条件. 基于这些条件从而提出了一些改善系统可控性的方法.

2 图论基础(Graph theory preliminaries)

在分析异构网络可控性以前, 简要介绍代数图论的一些基本概念与理论^[17].

在图论中, 无向图定义为顶点的集合 $v_G = \{1, \dots, n\}$ 和边的集合 $E_G \subset v_G \times v_G$ 组成的集体, 记为 $G = (V, E)$. 如果两个顶点间存在一条边, 则这两个顶点相邻, 可表示为 $i \sim j$; 若起点跟终点相同, 则称为环; 若一对顶点间有两条以上的边相连, 则称为平行边. 无自环又无平行边的图称为简单图, 本文讨论的多UAV网络为简单图. $P(i) = \{j \in v_G : j \sim i\}$ 用来表示顶点 i 的所有相邻顶点. 如果 i 是边 e_k 的一个端点, 则顶点 i 与边 e_k 相关联. 图中与顶点 i 相关联的边的条数称为该顶点的度, 记为 $d(i)$. G' 是 G 的子图, 当 $v' \subset v, E' \subset E$. 途径指的是图 G 中顶点的有限序列 $i_0, i_1, \dots, i_l$ 且 $i_{k-1} \sim i_k (k = 1, \dots, l)$, 顶点可以重复, 而路是顶点各不相同的途径; 当图 G 中任意两个不同顶点间都存在一条路时, 则称该图 G 是连通的. 途径的长是指途径中边的条数; 圈是指长大于0, 起点和终点相同, 且内部顶点各不相同的途径. 称图 G 为完全图, 如果 G 的任二顶点都相邻. 若一个顶点与图中其他任一顶点都不相邻, 则称该顶点为孤立点.

无向图 G 的邻接矩阵 $A(G) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 定义为

$$[A(G)]_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } (i, j) \in E_G, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

如果无环图 G 有 m 条边, 给所有边一个任意的方向, 则 G 的关联矩阵 $B(G) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 定义为

$$[B(G)]_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{当顶点 } k \text{ 是边 } l \text{ 的始点} \\ -1, & \text{当顶点 } k \text{ 是边 } l \text{ 的终点} \\ 0, & \text{当 } k \text{ 与 } l \text{ 不关联.} \end{cases}$$

拉普拉斯矩阵定义为 $L(G) := B(G)B(G)^T$; $L(G)$

是一个半正定对称矩阵, 其至少有1个零特征根, 且零特征根对应特征向量为 $(1, 1, \dots, 1)$. 显然 $L(G) := D(G) - A(G)$, 其中 $D(G) := \text{diag}\{[d_i]_{i=1}^n\}$, d_i 表示顶点 i 的度.

$$\text{令 } B(G) = \begin{bmatrix} B_f(G) \\ B_l(G) \end{bmatrix}, \text{ 则 } L(G) \text{ 可定义为}$$

$$L(G) = \begin{bmatrix} L_f(G) & l_{fl}(G) \\ l_{fl}(G)^T & L_l(G) \end{bmatrix},$$

其中: $L_f(G) = B_f B_f^T$, $L_l(G) = B_l B_l^T$, $l_{fl}(G) = B_f B_l^T$.

图 G 的自同构指的是其顶点的置换 ψ 满足 $(\psi(i), \psi(j)) \in E_G \Leftrightarrow (i, j) \in E_G$.

3 多无人机网络的动态描述(Dynamic models of the multiple UAVs network)

根据网络中Leader和Follower的支配和被支配角色特点, 将网络中Leader看成是不受约束且可以自由运动的, 而网络中Follower的分布式协调控制过程则受到Leader的状态约束. 因此, 采用同构网络的受控一致性分散化协调原理来研究具有Leader-Follower结构的多UAV网络化分布式协同控制系统的可控性问题.

参见图1, 假设Leader的数量为 m , Follower的数量为 N , 且 $m \ll N$, Leader的状态为 x_l^k , $k = 1, 2, \dots, m$; Follower状态为 x_f^i , $i = 1, 2, \dots, N$. 假设Leader飞行器的状态不受Follower飞行器的约束, 即 $\dot{x}_l^k = f(x_l^k, u_l^k)$, $k = 1, 2, \dots, m$; 而每个Follower状态则受控于Leader的状态约束, 而这种约束依赖于Follower之间的通信拓扑 G_f 以及Leader与Follower之间的通信拓扑 G_l . 借鉴同构网络的受控一致性分散化协调思想, 可以给出每个Follower的受控状态协调动态变化的一般模型

$$\dot{x}_f^i = \underbrace{f_i(x_f^i, t)}_{\text{Follower}} + \underbrace{\sum_{j \in N_i} \mu_{ji} \alpha_{ji} (x_f^j - x_f^i)}_{\text{Follower-Follower}} + \underbrace{\sum_{k \in m_i} \lambda_{ki} \beta_{ki} (x_l^k - x_f^i)}_{\text{Leader-Follower}}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

其中: $f_i(x_f^i, t)$ 为Follower i 自身的状态变化模型, N_i 表示与第 i 个Follower具有通信连接的邻域Follower集合, m_i 表示与第 i 个Follower具有通信连接的邻域Leader集合, μ_{ji} 和 λ_{ki} 为加权系数. α_{ji} 和 β_{ki} 分别表示Follower-Follower之间以及Leader-Follower之间的通信连接关系, 即

$$\alpha_{ji} \in G_f, \quad \alpha_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{当 Follower-}i \text{ 和 Follower-}j \text{ 之间有通信连接,} \\ 0, & \text{当 Follower-}i \text{ 和 Follower-}j \text{ 之间无通信连接,} \end{cases}$$

$$\beta_{ki} \in G_l, \quad \beta_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{当 Leader-}k \text{ 和 Follower-}i \text{ 之间有通信连接,} \\ 0, & \text{当 Leader-}k \text{ 和 Follower-}i \text{ 之间无通信连接.} \end{cases}$$

由式(1)可以看出, Follower状态受限于Follower之间的通信拓扑 G_f 以及Leader与Follower之间的通信拓扑 G_l , 另外还受限于Leader的状态. 由于假设Leader可以自由运动, 因此可以将Leader的状态 $x_l^k(k = 1, 2, \dots, m)$ 看作Follower状态方程的输入或控制量. 将所有Follower的状态和所有Leader的状态写成向量形式, 并定义

$$x_f = [x_f^1 \ x_f^2 \ \dots \ x_f^N]^T, \quad u_f = [x_l^1 \ x_l^2 \ \dots \ x_l^m]^T.$$

4 简化模型的系统可控性(Controllability of the simplified model)

4.1 传统控制理论的角度分析可控性(Controlability analysis by the traditional control theory)

由于模型(1)的复杂性, 很难直接分析其可控性, 所以从简单着手, 先对其简化模型进行可控性分析. 首先假设 $f_i(x_f^i, t) = 0$, 即Follower仅起信息传递作用且其本身无状态变化模型, 同时不失一般性, 可以令其加权系数 $\mu_{ji} = \lambda_{ki} = 1$, 则根据图论基础模型可以简化为

$$\dot{x}_f(t) = -L_f x_f(t) - l_{\text{fl}} u_f(t). \quad (2)$$

为了表述方便, 将状态 X 的维数设为1, 许多研究表明状态维数的大小除了表达式中加入克罗内克积外, 没有其他的影响^[16]. 在当前存在的大多数关于分析网络化系统编队、一致性问题以及可控可观性的文献[3-4, 9-11, 13]中都是采用这种简化模型.

引理1^[3] 对单Leader系统, 系统(2)可控, 当且仅当 L_f 无相同特征根, 且 L_f 的任一特征向量都不会与 l_{fl} 正交.

$$[U^T l_{\text{fl}} \quad AU^T l_{\text{fl}} \quad \dots \quad A^{N-1} U^T l_{\text{fl}}] = \begin{bmatrix} v_1^T \cdot l_{\text{fl}} & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & v_N^T \cdot l_{\text{fl}} \end{bmatrix}_{N \times Nm} \left(\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{N-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_N & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{bmatrix}_{N \times N} \otimes I_m \right).$$

当 $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ 互异时,

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{N-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_N & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{bmatrix}_{N \times N}$$

是非奇异的矩阵, 则有

$$\text{rank} [U^T l_{\text{fl}} \quad AU^T l_{\text{fl}} \quad \dots \quad A^{N-1} U^T l_{\text{fl}}] = N,$$

该时可证得系统(2)可控.

当 $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ 中存在相等的根时, 不失一般性,

引理2 若 L_f 有0特征根, 则 L_f 存在特征向量与 l_{fl} 的所有列向量都正交.

证 由于 L_f 有0特征根, 则存在向量 v_f 满足 $v_f^T \cdot L_f = 0$. 又由图论知识可知

$$L_f = P_f^T L P_f, \quad P_f = \begin{bmatrix} I_N \\ \mathbf{0}_{m \times N} \end{bmatrix},$$

则有 $(P_f v_f)^T L = v_f^T P_f^T \cdot P_f L_f P_f^T = 0$. 故存在 $v = P_f v_f = [v_f \ 0]^T$, 满足 $v^T L = 0$. 由 $v^T L = [v_f^T \ 0] \cdot \begin{bmatrix} L_f & l_{\text{fl}} \\ l_{\text{fl}}^T & L_l \end{bmatrix} = 0$ 可得 $v_f^T l_{\text{fl}} = 0$. 证毕.

定理1 对于任意Leader数量, 系统(2)完全可控的充分必要条件是: L_f 的任一特征向量都不会同时与 l_{fl} 的所有列向量都正交.

证 由图论基础可知 L_f 是对称半正定矩阵, 故 L_f 可分解为 $L_f = U \Lambda U^T$, 其中: Λ 为 L_f 的特征根所构成的对角矩阵; U 为对应的单位正交特征向量构成的酉阵. 故 U 都是非奇异的.

根据秩方法, 可控性判别矩阵可表示为

$$C = \begin{bmatrix} -l_{\text{fl}} & U \Lambda U^T l_{\text{fl}} & \dots & (-1)^N U \Lambda^{N-1} U^T l_{\text{fl}} \\ U[-U^T l_{\text{fl}} & A U^T l_{\text{fl}} & \dots & (-1)^N A^{N-1} U^T l_{\text{fl}}] \end{bmatrix}.$$

由于 U 为非奇异的, 故影响 C 的秩的因素只有 $U^T l_{\text{fl}}$ 和 Λ .

充分性. 由条件可知 $U^T l_{\text{fl}}$ 的每一行中至少存在一个非零元素. 又根据引理2可知: L_f 不含0特征根. 故 Λ 是非奇异的.

令 $U = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N]$, $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$, 其中 λ_i, v_i 是 L_f 相对应的特征根和特征向量, 则有

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{N-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_N & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{bmatrix}_{N \times N} \otimes I_m.$$

假设 $\lambda_i = \lambda_j (i \neq j)$ 且其余特征根都互不相等, 若其对应正交特征向量满足 $v_i^T \cdot l_{\text{fl}}$ 与 $v_j^T \cdot l_{\text{fl}}$ 线性相关, 则存在常数 $c = -\frac{v_i \cdot l_{\text{fl}}}{v_j \cdot l_{\text{fl}}}$ 使得 $v_1 + cv_2$ 与 l_{fl} 的所有列向量都正交, 而 $v_1 + cv_2$ 也是 L_f 的特征向量, 这与条件矛盾. 故其对应正交特征向量满足 $v_i^T \cdot l_{\text{fl}}$ 与 $v_j^T \cdot l_{\text{fl}}$ 线性必不相关. 令

$$[U^T l_{\text{fl}} \quad AU^T l_{\text{fl}} \quad \dots \quad A^{N-1} U^T l_{\text{fl}}] = [C_1^T \ C_2^T \ \dots \ C_N^T]^T,$$

则有

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_{i-1} \\ C_{i+1} \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^T \cdot l_{\text{fl}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & v_{i-1}^T \cdot l_{\text{fl}} & \\ & & v_{i+1}^T \cdot l_{\text{fl}} & 0 \\ & 0 & & \ddots \\ & & 0 & & v_N^T \cdot l_{\text{fl}} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_{i-1} & \dots & \lambda_{i-1}^{N-1} \\ 1 & \lambda_{i+1} & \dots & \lambda_{i+1}^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_N & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{bmatrix} \otimes I_m \right)_{(N-1) \times N}$$

又由于

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_{i-1} & \dots & \lambda_{i-1}^{N-2} \\ 1 & \lambda_{i+1} & \dots & \lambda_{i+1}^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_N & \dots & \lambda_N^{N-2} \end{bmatrix}$$

是非奇异的, 故

可得 $\text{rank}[C_1^T \dots C_{i-1}^T C_{i+1}^T \dots C_N^T]^T = N - 1$.

同理可得, $\text{rank}[C_1^T \dots C_{j-1}^T C_{j+1}^T \dots C_N^T]^T = N - 1$. 又有 $v_i^T \cdot l_{\text{fl}}$ 与 $v_j^T \cdot l_{\text{fl}}$ 线性必不相关, 则 C_i 与 C_j 也不线性相关. 故可得 $\text{rank}[C_1^T C_2^T \dots C_N^T]^T = N$, 即系统可控.

由上证得: 若 L_f 的任一特征向量都不会同时与 l_{fl} 的所有列向量都正交, 则系统(2)完全可控.

必要性(反证法). 假设存在 L_f 的某一特征向量 V 同时与 l_{fl} 的所有列向量都正交.

若该特征向量对应的特征根为单根, 则 $U^T l_{\text{fl}}$ 中存在一行完全为0元素, 即

$$[-U^T l_{\text{fl}} \quad AU^T l_{\text{fl}} \quad \dots \quad (-1)^N A^{N-1} U^T l_{\text{fl}}]$$

存在一行为0行, 则

$$\text{rank}[-U^T l_{\text{fl}} \quad AU^T l_{\text{fl}} \quad \dots \quad (-1)^N A^{N-1} U^T l_{\text{fl}}] < N.$$

若该特征向量对应的特征根为重根, 则 V 必然可用该特征向量对应的几个正交特征向量来表示, 又 $V^T \cdot l_{\text{fl}} = 0$. 则可知该特征向量对应的正交特征向量与 l_{fl} 相乘得到的向量之间存在线性关系, 即可得到

$$\text{rank}[-U^T l_{\text{fl}} \quad AU^T l_{\text{fl}} \quad \dots \quad (-1)^N A^{N-1} U^T l_{\text{fl}}] < N.$$

故系统不可控, 与已知条件矛盾. 即必要性得证. 证毕.

推论 1 对多Leader系统, 若系统可控, L_f 也可能会有相同特征根.

举例证明, 如图2所示, 有

$$L_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad l_{\text{fl}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

易得 $\text{rank}(C) = 3$, 即系统可控. 而 L_f 有相同特征

根-1, 且任一特征向量都不同时与 l_{fl} 的所有列向量正交.

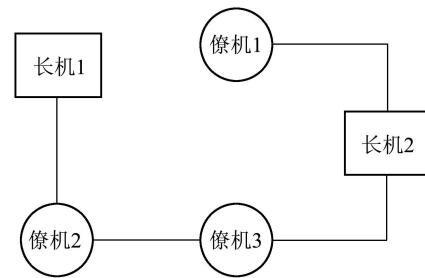


图2 可控的多Leader系统

Fig. 2 A controllable multiple-Leader system

引理 3^[4] $L(G)$ 与 $L_f(G)$ 有相同特征根 $\Leftrightarrow$ 系统(2)不可控.

推论 2 $L_f(G)$ 有0特征根 $\Rightarrow$ 系统不可控.

推论 3 若 $L(G)$ 的所有特征向量中都不含0成分, 则系统(2)是可控的.

证 由引理3可知, 若 $L(G)$ 与 $L_f(G)$ 无相同特征根, 则系统可控. 假设 $L(G)$ 与 $L_f(G)$ 有相同特征根, 则存在向量 v_f 满足 $v_f^T \cdot (L_f - \lambda I) = 0$. 由于 $L_f = P_f^T L P_f$, $P_f = \begin{bmatrix} I_N \\ \mathbf{0}_{m \times N} \end{bmatrix}$, 则 $P_f v_f^T L = v_f^T P_f^T$. $P_f L_f P_f^T = \lambda P_f v_f^T$. 故存在 $v = P_f v_f = [v_f^T \quad 0]^T$, 满足 $v^T L = \lambda v^T$. 这与本推论的条件相矛盾, 故假设错误, 即推论得证. 证毕.

4.2 图论的角度分析系统可控性(Controllability analysis by the graph theory)

下面将系统可控性的分析与网络结构的图论特性联系起来, 并分析可控性条件.

4.2.1 单Leader网络的可控性(Controllability of single-Leader networks)

定义 1^[4] 单Leader系统关于Leader对称定义: 存在一个非同一性置换矩阵 J 使得 $J(-L_f) = (-L_f)J$, 即 $JL_f = L_f J$, 其中 J 是一个只有0或1元素的矩阵, 且每行每列都只有1个非0元素. Leader对称在图论理论中表现为Follower顶点构成的图 G_f 存在一个非同一性的自同构, 使得图 G 的结构

和性能保持不变, 即 $\delta_l(i) = \delta_l(\psi(i))$, 其中

$$\delta_l(i) = \begin{cases} 1, & \text{若 } i \sim l, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases} \quad l \in m, i \in N.$$

引理 4^[4] 对单Leader系统, 若系统是Leader对称的, 则系统不可控. 但Leader不对称, 系统也不一定是可控的.

以图3为例, 该系统为Leader不对称的且系统是可控的.

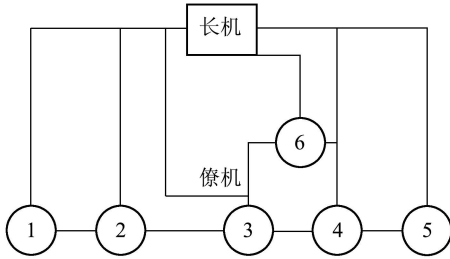


图3 Leader不对称且不可控的单Leader网络

Fig. 3 A single-Leader network which is Leader asymmetry and uncontrollable

推论 4 若系统可控, 则在 G 中任二Follower都不能拥有相同的邻接点.

若存在Follower拥有相同的邻接点, 即对图 G_f 存在一个非同性的自同构, 且满足

$$\delta_l(i) = \delta_l(\psi(i)) = \begin{cases} 1, & \text{若 } i \sim l, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases} \quad i \in N,$$

则系统Leader对称, 根据引理4可知系统不可控.

4.2.2 多Leader网络的可控性(Controllability of multiple-Leader networks)

下面将单Leader系统可控性分析推广到多Leader系统可控性分析. 首先对定义1进行拓展, 得到多Leader系统的Leader对称定义.

定义 2 多Leader系统Leader对称定义: 存在一个非同性的置换矩阵 J 使得 $JL_f = L_f J$, 且 $Jl_h = l_h$, 其中 J 是一个只含0和1元素的矩阵, 且每行每列都只有1个非0元素. Leader对称在图论理论中表现为Follower顶点构成的图 G_f 存在一个非同性的自同构, 使得图 G 的结构和性能保持不变, 即 $\delta_l(i) = \delta_l(\psi(i))$, 其中

$$\delta_l(i) = \begin{cases} 1, & \text{若 } i \sim l, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases} \quad l \in m, i \in N.$$

定理 2 对于多Leader系统, 若系统Leader对称, 系统也是不可控的; 若系统Leader不对称, 系统也不一定是可控的.

证 对多Leader系统, 设 λ 为 L_f 的特征向量, 则

有 $L_f v = \lambda v$, 结合Leader对称的定义, 存在对称置换矩阵 J 满足 $JL_f v = J\lambda v = \lambda(Jv)$, 则 $Jv, v - Jv$ 也是 L_f 的特征向量. 又 $Jl_h = l_h$, 因此

$$(v - Jv)^T l_h = v^T l_h - v^T J l_h = 0,$$

由定理1可知系统不可控. 举例证明第2部分, 图4所示系统即不可控, 也不Leader对称. 证毕.

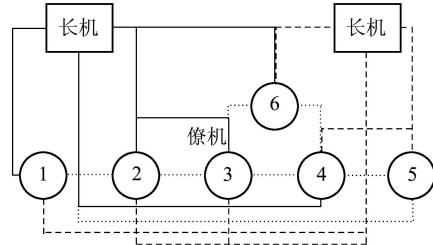


图4 即不可控也不Leader对称的多Leader网络

Fig. 4 A multiple-Leader network which is uncontrollable and Leader asymmetry

根据定义2和定理2, 可知推论4在多Leader系统中同样适用.

4.2.3 特殊图形的可控性(Controllability of special graphs)

下面将给出一些特殊图形的可控性分析, 如路、圈和完全图.

结论 1 任意Leader数, Follower数 $N \geq 2$ 的完全图都是不可控的.

如图5所示, 任二Follower都拥有完全相同的邻接点, 故根据推论4, 可得完全图是不可控的.

结论 2 对单Leader系统, $N \geq 2$ 的圈是不可控的(如图6所示). 而该结论对多Leader系统不一定成立.

结论 3^[4] 对单Leader系统, 顶点数为偶数的路不管Leader在何位置, 系统都是可控的, 如图7所示. 该结论同样在多Leader系统中不成立.

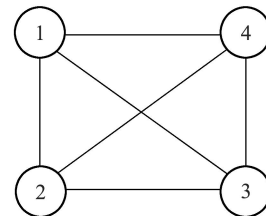


图5 完全图

Fig. 5 A complete graph

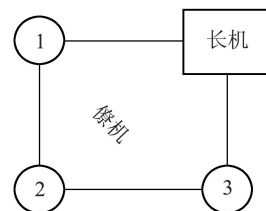


图6 圈(Leader对称)

Fig. 6 A ring graph (Leader symmetry)

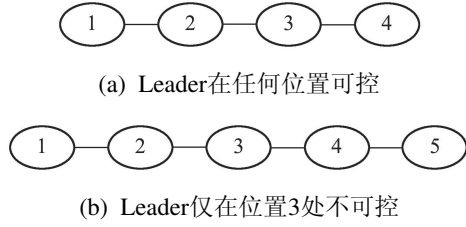


图7 两图都是路

Fig. 7 Two paths

5 线性模型的系统可控性(Controllability of linear model)

5.1 线性同构网络的可控性(Controllability of linear homogeneous networks)

对于一些同构UAV网络化系统, 其每个UAV自身状态变化相同, 若其状态变化模型是线性的, 则不失一般性, 可令 $f_i(x_f^i, t) = cx_f^i$, $\mu_{ji} = \lambda_{ki} = 1$, 即将系统表达式(1)简化为

$$\dot{x}_f(t) = (cI - L_f)x_f(t) - l_{\text{fl}}u_f(t). \quad (3)$$

为了满足系统的稳定性, 根据线性系统理论, 只需要 $cI - L_f$ 为负, 故可设定 c 为负数.

定理3 当 c 为负数时, 系统(3)与系统(2)有完全相同的可控性.

证 由 $L_f = U\Lambda U^T$ 可知 $cI - L_f = U(cI - \Lambda)U^T$. 故其可控性判别矩阵可表示为

$$C = \begin{bmatrix} -[l_{\text{fl}} \ U(cI - \Lambda)U^T l_{\text{fl}} \ \cdots \ U(cI - \Lambda)^{N-1}U^T l_{\text{fl}}] \\ -U[U^T l_{\text{fl}} \ (cI - \Lambda)U^T l_{\text{fl}} \ \cdots \ (cI - \Lambda)^{N-1}U^T l_{\text{fl}}] \end{bmatrix}.$$

当 c 为负数时, $cI - L_f$ 是负定对称矩阵. 与定理1的证明相似, 可以证得系统(3)可控的充分必要条件是 $cI - L_f$ 任一特征向量都不会同时与 l_{fl} 的所有列向量都正交.

由于 L_f 的特征向量也是 $cI - L_f$ 的特征向量, L_f 的任一特征向量都不会同时与 l_{fl} 的所有列向量都正交, 等价于 $cI - L_f$ 任一特征向量都不会同时与 l_{fl} 的所有列向量都正交. 再结合定理1, 可知: 当 c 为负数时, 系统(3)与系统(2)有完全相同的可控性. 证毕.

根据该定理, 可以知道系统(2)的可控性结论对系统(3)同样适用, 如定理1及其推论.

再根据系统Leader对称的定义, 又 $JL_f = L_f J \Leftrightarrow J(cI - L_f) = (cI - L_f)J$, 对系统(2)的可控性图论分析结论对系统(3)同样适用.

5.2 线性异构网络的可控性(Controllability of linear heterogeneous networks)

对于大多数UAV网络化系统, 其Follower自身

状态变化模型必然存在差异, 故在考虑其线性情况时可令 $f_i(x_f^i, t) = c_i x_f^i$, 则系统表达式(1)简化为

$$\dot{x}_f(t) = (C - L_f)x_f(t) - l_{\text{fl}}u_f(t), \quad (4)$$

其中 $C = \text{diag}\{c_i\}$.

为保证系统(4)渐近稳定, 设 c_i 为负数. 由于系统是线性时不变系统, 故利用秩方法、PHB(Popov Belevitch Hautus)方法等可以判定系统可控性, 可得到类似定理1的结论.

定理4 任意Leader数, 系统(4)完全可控的充分必要条件为: $C - L_f$ 的任一特征向量都不与 l_{fl} 的所有列向量都正交.

证 由于 L_f 是半正定矩阵, c_i 为负数, 故 $C - L_f$ 为对称负定矩阵, 则 $C - L_f = U\Lambda U^T$. 根据传统的秩方法, 控性判别矩阵可表示为

$$\Phi = \begin{bmatrix} l_{\text{fl}}, U\Lambda U^T l_{\text{fl}}, \cdots, U\Lambda^{N-1}U^T l_{\text{fl}} \\ -U[U^T l_{\text{fl}}, \Lambda U^T l_{\text{fl}}, \cdots, \Lambda^{N-1}U^T l_{\text{fl}}] \end{bmatrix}.$$

由于 U, Λ 为非奇异, 故影响 $\text{rank}(\Phi)$ 的因素只有 $U^T l_{\text{fl}}$. 由此, 根据定理1的证明, 同理可证得定理4. 证毕.

推论5 对单Leader系统, 若系统可控, $C - L_f$ 的特征根互异.

证 假设 $C - L_f$ 存在相同特征根, 又 l_{fl} 是一维的, 则其对应的特征向量 v_1, v_2 满足 $v_1 l_{\text{fl}}, v_2 l_{\text{fl}}$ 线性相关. 假设 $c = -\frac{v_1 \cdot l_{\text{fl}}}{v_2 \cdot l_{\text{fl}}}$, 则 $v_1 + cv_2$ 与 l_{fl} 的所有列向量都正交, 而 $v_1 + cv_2$ 也是 $C - L_f$ 的特征向量, 根据定理4可知系统不可控. 这与已知条件矛盾.

证毕.

推论6 对多Leader系统, 若系统可控, $C - L_f$ 也可能会有相同特征根.

由于 l_{fl} 是多维向量, 则 $C - L_f$ 即便存在相同特征根, 其对应的特征向量 v_1, v_2 也不一定满足 $v_1 l_{\text{fl}}, v_2 l_{\text{fl}}$ 线性相关.

因为 c_i 的随意性, 关于Leader对称中存在的自同构不能保证系统(4)的结构与性能保持不变. 于是扩展系统Leader对称的定义为:

定义3 系统Leader对称定义: 存在一个非同一性置换矩阵 J , 使得 $J(C - L_f) = (C - L_f)J$, 且 $Jl_{\text{fl}} = l_{\text{fl}}$, 其中 J 是一个只有0或1元素的矩阵且每行每列都只有1个非0元素.

在定义3的前提下, 可得到以下结论.

定理5 若系统Leader对称, 系统(4)不可控.

证 与定理2的证明相似. 且由定理4可知, 不

论系统是单Leader还是多Leader情形都是不可控的。

推论7 若系统不可控, 系统不一定是Leader不对称的。

6 非线性模型的系统可控性(Controllability of nonlinear model)

对异构多飞行器系统, 通常其Follower状态变化模型 $f_i(x_f^i, t)$ 都是非线性的且不相同的, 则有

$$\dot{x}_f(t) = F(x_f, t) - L_f x_f(t) - l_{\text{fl}} u_f(t), \quad (5)$$

其中 $F(x_f, t) = [f_1(x_f^1, t) \cdots f_N(x_f^N, t)]$ 。

由于 $f_i(x_f^i, t)$ 都是非线性的, 根据非线性系统理论对该系统的可控性进行分析。

引理5^[18] 对于系统

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

其中: $f(x, t)$ 是非线性的且对所有 t 都连续; $A(t)$ 和 $B(t)$ 是分段连续的, 假设

$$H = \int_{t_0}^T \Phi(T, \tau) B(\tau) B'(\tau) \Phi'(T, \tau) d\tau$$

是非奇异的, 且对于任意正常数 c, d , 存在一个 $M > 0$, 使得 $\|x\| \leq M, t \in [t_0, T]$ 时, 满足 $c\|f(x, t)\| + d \leq M$, 则对于给定向量 x_0 与 v 都存在一个控制函数, 使得系统状态能在 T 时刻从 t_0 时刻的 x_0 转移到 v 。

推论8 对系统(5), 若以下条件成立:

1) 线性系统 $\dot{x}_f(t) = -L_f x_f(t) - l_{\text{fl}} u_f(t)$ 是在 t_0 处完全可控;

2) 对于正常数 c, d , 存在 $M > 0$, 使得 $\|x\| \leq M, t \in [t_0, t_1]$ 时, 满足 $c\|F(x_f, t)\| + d \leq M$; 则系统(5)可控。

对于推论8, 第1个条件可由前面对线性情况下系统可控性研究结果来得到, 而第2个条件是对非线性 $f_i(x_f^i, t)$ 一个简单的数值约束。尽管该推论没给出系统(5)可控性的充要条件, 但也得到了系统达到可控的一个分散式充分条件, 给出了相应的参数设计依据。

推论9 对系统(5), 若以下条件成立:

1) 线性系统 $\dot{x}_f(t) = -L_f x_f(t) - l_{\text{fl}} u_f(t)$ 在 t_0 处完全可控;

2) $F(x_f, t)$ 和 $\frac{\partial F}{\partial x_f}$ 连续且一致有界;

3) $F(0, t) = 0$;

则系统(6)全局可控。

证 与引理5证明相似, 通过Schauder不动点定

理可证明控制函数的存在, 即证得系统可控。

对非线性系统(5)的可控性分析是在线性部分可控的基础上, 对非线性部分加以约束得到一个充分条件, 而无法得到一个充要条件或更直观的可控性与通信拓扑的关系。这也是以后要继续研究的内容。

7 改善系统可控性措施(Methods to improve the controllability of the systems)

据前面所得结论可知, 选择合适的通信拓扑可以改变系统的可控性。并不是网络连接越紧密越好, 如结论1所示, 完全图也会不可控; 但最好也不会出现不连通的区域, 在单Leader系统中不连通就导致不可控。故选择合适的拓扑能使得系统可控。

以图5为例, 在该完全图中, 可以以Leader为起始点选择一条路, 其他边删去, 形成一条简单的路的拓扑。这样反而可以使得系统可控, 而且减少多UAV网络中的通信拓扑, 增加安全性。选择合适的Leader位置也可以改善系统的可控性。由前面的结论可知, Leader对称会使得系统不可控, 因此可以选择Leader的位置使得系统Leader不对称, 从而改善系统的可控性。

选择合适的拓扑权重也可使得系统可控。对于系统(1), 选择不同的 μ_{ji}, λ_{ki} 可以改变系统的系统矩阵和控制矩阵。

以 $f(x_f^i, t)$ 是线性的情况为例, 系统可简化为 $\dot{x}_f = A(G_f, G_l)x_f + B(G_l)u_f$, 其中 $A(G_f, G_l)$ 和 $B(G_l)$ 分别为Follower控制系统模型的系统矩阵和控制矩阵, 且依赖于Follower之间的通信拓扑 G_f 以及Leader与Follower之间的通信拓扑 G_l 。由此可以看出, 改变权重可以改变 $A(G_f, G_l), B(G_l)$, 从而达到使系统可控的目的。

8 实例数值仿真(Numerical examples)

下面将列举一个实例, 并对其进行数值仿真, 以此来具体说明前面所得可控性条件及其与通信拓扑之间的关系。

以图7(b)为例。取agent-3为Leader时, 由图论角度可知系统是Leader对称的。同时可得到 $-L_f =$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, -l_{\text{fl}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{则可知存在 } -L_f \text{ 的}$$

$$\text{特征向量 } v = \begin{bmatrix} -0.5257 \\ 0.8507 \\ -0.8507 \\ 0.5257 \end{bmatrix} \text{ 使得 } v^T \cdot l_{\text{fl}} = 0. \text{ 由此可}$$

知该模型的系统是不可控的. 图8表示的是不同输入下系统状态的响应曲线, 由图可看出任意输入情况下僚机2与僚机3、僚机1与僚机4的状态响应曲线是完全一致, 则可知系统是不可控的.

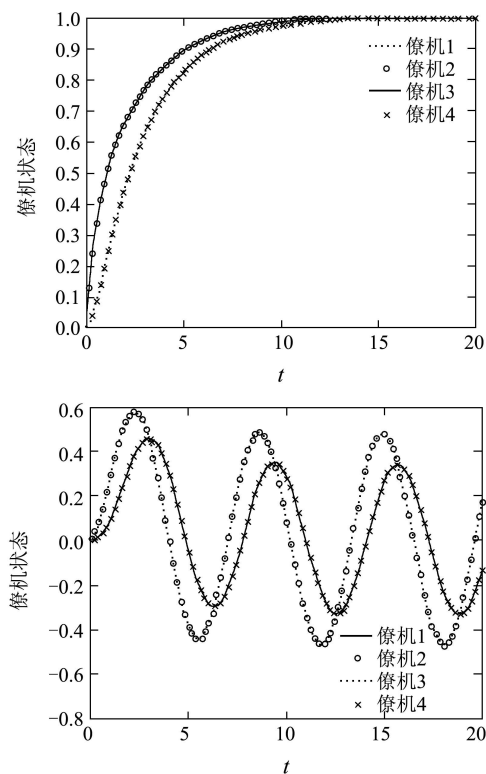


图8 不同输入下系统的状态响应曲线

Fig. 8 The state response curves of the system with different inputs

若取agent-1为Leader, 则可知该路图是Leader不对称的. 同时可知:

$$-L_f = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad -l_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

则

$\text{eig}(-L_f) = \{-3.5321, -2.3473, -1.0000, -0.1206\}$, 且

$$U^T \cdot l_f = [0.4285 \quad 0.6565 \quad -0.5774 \quad -0.2280]^T.$$

故可知该模型的系统是可控的. 图9(a)表示系统的初始状态, 图9(b)表示系统要求达到的状态结构. 而图10则是该控制过程中系统状态的误差曲线图.

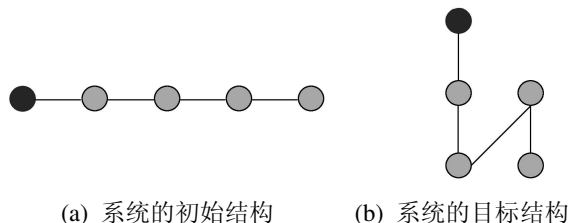


图9 系统结构图

Fig. 9 Configuration of system

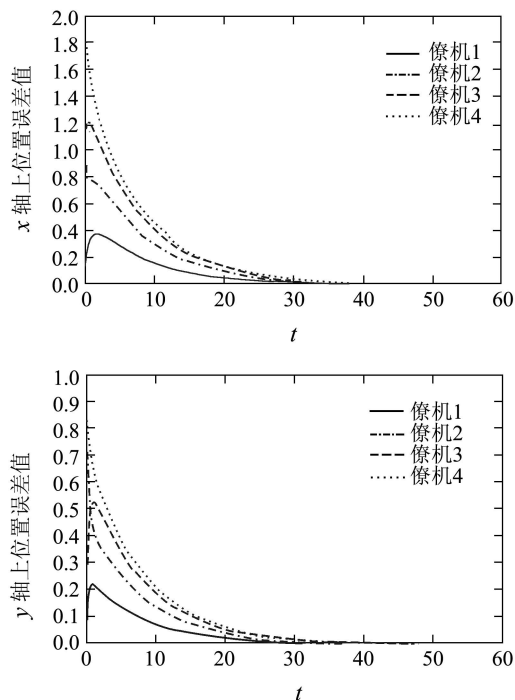


图10 系统控制过程中的x轴和y轴方向上的位置误差曲线

Fig. 10 The position errors on x axis and y axis in the process of the control system

9 结论(Conclusions)

本文主要是对具有Leader-Follower结构且分布式通信拓扑的多UAV网络化分布式协同控制系统的可控性问题进行分析, 利用代数图论和传统的控制理论, 得到系统在不同形式的动态模型下的可控性条件以及其与通信拓扑之间的关系, 为异构多UAV分布式可控通信拓扑的设计提供了依据.

参考文献(References):

- [1] 李广义. 发展无人作战飞机的技术与战略问题[J]. 现代军事, 2005(9): 39.
(LI Guangyi. The technology and strategic issue in development of unmanned combat aircraft[J]. *Modern Military*, 2005(9): 39.)
- [2] ROYCE L. Mission battle management system fighter engagement manager concept[C] // *American Institute of Aeronautics and Astronautics International Air and Space Symposium and Exposition: The Next 100 Years*. Dayton, Ohio: AIAA, 2003: 1-10.
- [3] HERBERT G T. On the Controllability of nearest neighbor interconnections[C] // *The 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Atlantis: IEEE, 2004, 1(5): 2467-2472.
- [4] RAHMANI A, JI M, MESBAHI M, et al. Controllability of multi-agent systems from a graph-theoretic perspective[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2009, 48(1): 162-186.
- [5] FALL C, MARLAND E, WAGNER J, et al. *Computational Cell Biology*[M]. New York: Springer, 2005.
- [6] BALCH T, ARKIN R C. Behavior-based formation control for multi-robot teams[J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1998, 14(6): 926-939.

- [7] WANG P K C, HADAEGH F Y. Coordination and control of multiple microspacecraft moving in formation[J]. *Journal of the Astronautical Sciences*, 1996, 44(3): 315 – 355.
- [8] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [9] XIAO F, WANG L, SHI H, et al. Algebraic characterization of consensus problems for networked dynamic system[C] // *Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on Intelligent Control*. Li-massol: IEEE, 2005: 622 – 627.
- [10] LI Z G, JIA Y M. Algebraic criteria for consensus problems of continuous-time networked systems[J]. *Intertional Journal of Control*, 2009, 82(4): 643 – 658.
- [11] OLFATI-SABER R, FAX J A, MURRAY R M. Consensus and co-operation in networked multi-agent systems[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 215 – 233.
- [12] 张晓琴, 黄玉清, 刘刚. 基于改进的领导-跟随者编队算法研究[J]. 计算机工程与设计, 2010, 31(11): 2547 – 2549.
(ZHANG Xiaoqin, HUANG Yuqing, LIU Gang. Research on improved leader-following formation method[J]. *Computer Engineering and Design*, 2010, 31(11): 2547 – 2549.)
- [13] LOZANO R, SPONG M W, GUERRERO J A, et al. Controllability and observability of leader-based multi-agent systems[C] // *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancun: IEEE, 2008: 3713 – 3718.
- [14] JI Z J, WANG L, GUO X X. On controllability of switched linear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(3): 769 – 801.
- [15] LIU B, CHU T G, WANG L, et al. Controllability of a leader-follower dynamic network with switching topology[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(4): 1009 – 1013.
- [16] JI M, EGERSTEDT M. A graph-theoretic characterization of controllability for multi-agent systems[C] // *Proceedings of the American Control Conference*. New York: IEEE, 2007: 4588 – 4593.
- [17] 孙惠泉. 图论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
(SUN Huiquan. *Graph Theory and Its Application*[M]. Beijing: Science Press, 2004.)
- [18] VIDYASAGAR M. A controllability condition for nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1972, 17(4): 569 – 570.

作者简介:

陈际玮 (1989—), 男, 目前研究方向为多无人机协同控制, E-mail: jawei_2005@163.com;

周锐 (1968—), 男, 教授, 目前研究方向为飞行器制导与控制, E-mail: zhr@buaa.edu.cn;

吴江 (1972—), 男, 讲师, 目前研究方向为飞行器制导与控制, E-mail: wujiang@buaa.edu.cn.