

## 一类混沌系统的量化同步

刘伟<sup>1,2</sup>, 王岩岩<sup>1</sup>, 汪志鸣<sup>3</sup>, 李建华<sup>3</sup>

(1. 周口师范学院 数学系, 河南 周口 466001; 2. 上海交通大学 自动化系, 上海 200240;

3. 华东师范大学 数学系, 上海 200241)

**摘要:** 针对信息受限的条件, 研究了一类连续混沌系统的同步问题. 通过一个有限容量的信道, 将具有混沌形式的驱动系统和基于观测器的响应系统连接. 在这种情况下, 设计了有效的量化方法使得同步误差关于传输误差是输入状态稳定(ISS), 同时保证传输误差是指数衰减的. 从而使得混沌同步误差在信道容量有限条件下渐近趋于零. 最后通过数值例子说明了本文方法的有效性.

**关键词:** 观测器; 量化; 矩阵不等式; 混沌同步; 输入状态稳定

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Quantized synchronization for a class of chaotic systems

LIU Wei<sup>1,2</sup>, WANG Yan-yan<sup>1</sup>, WANG Zhi-ming<sup>3</sup>, LI Jian-hua<sup>3</sup>

(1. Department of Mathematics, Zhoukou Normal University, Zhoukou Henan 466001, China;

2. Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

3. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200241, China)

**Abstract:** This paper investigates synchronization for a class of continuous chaotic systems with information constraints. A general chaotic master system and its observer-based response system are connected through a limited-capacity communication channel. A proper quantization scheme is designed such that the synchronization error caused by the transmission error is input-to-state stable (ISS). Meanwhile, the transmission error decays to zero exponentially. This indicates that the synchronization error converges to zero asymptotically in a communication channel of limited capacity. A simulation example is presented to show the effectiveness of the proposed approach.

**Key words:** observer; quantization; matrix inequality; chaotic synchronization; input-to-state stability

### 1 引言(Introduction)

混沌系统作为一类特殊的确定性非线性系统, 由于其轨道对初始条件的极端敏感性, 使得它在信息处理中有着重要的地位. 当前一个重要的研究方向是利用该性质实现混沌的加密通信, 要求通过混沌控制产生出与给定混沌序列同步的混沌轨道. 因此, 混沌同步成为混沌控制中的重要组成部分. 混沌同步还有许多其他重要的应用背景. 当不考虑信息受限的情况, 已取得了很多的研究成果<sup>[1-4]</sup>, 已有许多方法. 信息通过网络传输标志着现代技术的进步. 在信息受限条件下研究混沌同步问题变得很有意义.

近年, Fradkov和Evans等学者研究了几类信息受限条件下的混沌量化同步问题<sup>[5-7]</sup>. 作者假定具有Lurie形式的驱动系统的单输出以固定采样周期通过有限信道到达响应系统. 结果表明, 在信息受限条件下同步误差只能是有界的. 除非信道容量无穷大, 否则, 不可能保证同步误差渐近趋于零. 文献[8]也研究了一类混沌系统在信息受限条件下的量化同步

问题, 得到同步误差是指数衰减的, 但文中的驱动系统和响应系统完全相同.

能否设计一套算法使得在信息受限情况下, 实现混沌完全同步是本文的研究目标. 本文研究一类结构更为一般的基于观测器的混沌同步问题, 设计了一种不同的量化方式, 使得在有限信道传输条件下, 就可以实现同步. 方法的关键是在量化设计过程中, 编码器和解码器部分(见图1)分别复制了驱动系统. 通过这种方式, 可以获得实际状态与复制系统产生的预测状态之间的差值, 并在编码器中进行量化. 然后, 编码器通过传输信道将量化误差传送给解码器. 由于编码器和解码器中置入了相同的复制系统, 它们会引起同样的预测状态. 在这种情况下, 在解码器中, 预测状态与量化误差相加便形成实际信号. 由于驱动系统是混沌系统, 初值具有不可预见性, 该方法不仅有利于控制初值条件, 实现混沌同步的关键环节, 另外还可以极大减少数码率的传输, 从而间接达到放宽带宽的限制. 这些都是本文的特点.

## 2 问题描述(Problem formulation)

考虑连续时间驱动系统

$$\dot{x} = f(x), x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

响应系统为

$$\dot{y} = f(y) + G(x - y), y(t_0) = y_0. \quad (2)$$

其中:  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $G$  为状态观测器的增益矩阵. 设函数  $f(x)$  满足 Lipschitz 条件, 即存在常数  $L > 0$ , 使得对于任意  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|. \quad (3)$$

本文假定固定采样, 即  $h = t_{k+1} - t_k > 0$  为常数 ( $k \in N = \{0, 1, 2, \dots\}$ ).

为了减少平均传输率的要求, 在编码器和解码器中分别添加驱动系统的复制系统

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}), \hat{x}(t_0) = x_0 \quad (4)$$

用来构造驱动系统的估计状态  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ . 记  $e = x - \hat{x}$  为传输误差, 则其量化误差为  $e_q = q(e)$ , 其中  $q(\cdot)$  是量化函数. 记  $\eta = x - y$  为同步误差. 在每个采样时刻  $t_k$ , 编码器和解码器中的状态  $\hat{x}$  被更新为

$$\begin{aligned} \hat{x}(t_k) &= \hat{x}(t_k^-) + q(e(t_k^-)) = \\ & \hat{x}(t_k^-) + q(x(t_k) - \hat{x}(t_k^-)), \end{aligned} \quad (5)$$

其中 “-” 表示相应变量在  $t_k$  处的左极限. 本文要求在信道容量有限的条件下, 通过设计合适的量化器和增益矩阵  $G$  使得同步误差  $\eta$  关于传输误差  $e$  是输入状态稳定 (ISS). 同时又保证传输误差  $e$  指数衰减. 从而实现同步误差在有限信道条件下渐近趋于零的目标.

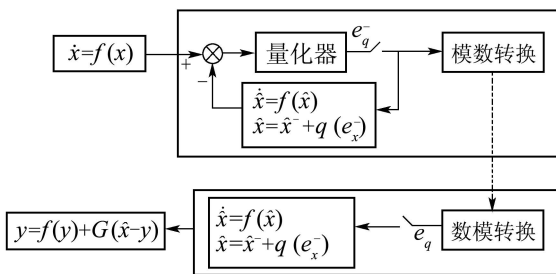


图1 信息受限下的混沌同步

Fig. 1 Chaotic synchronization under information constraints

## 3 量化器(Quantizer)

量化函数  $q: \mathbb{R}^n \rightarrow D$  是分段常值向量函数, 其中  $D$  是  $\mathbb{R}^n$  中的有限子集, 即把  $\mathbb{R}^n$  划分成有限个形如  $\{z \in \mathbb{R}^n : q(z) = i, i \in D\}$  的量化区域. 具体地说, 存在  $M > \Delta > 0$  使得<sup>[10]</sup>

- 1) 如果  $\|z\| \leq M$ , 那么  $\|q(z) - z\| \leq \Delta$ ;
- 2) 如果  $\|z\| > M$ , 那么  $\|q(z)\| > M - \Delta$ .

**注1** 条件1)显示当量化值非饱和时量化误差不超过  $\Delta$ ; 条件2)给出检测饱和的方法. 本文假定在原点的某个领域内  $q(z) = 0$ .

在上述量化规则的基础上, 定义量化器如下:

$$q_\mu(z) = \mu q\left(\frac{z}{\mu}\right), \quad (6)$$

其中  $\mu > 0$  为调焦变量, 随着  $\mu$  的增大或减小, 量化范围  $M\mu$  和量化误差  $\Delta\mu$  也随着增大或减小, 并在采样时刻  $t_k$  更新  $\mu$ .

## 4 主要结果(Main results)

量化器的调焦规则定义为

$$\begin{cases} \mu_{k+1} = \begin{cases} a_{out}\mu_k, & a_k = a_{out}, \\ a_{in}\mu_k, & a_k = a_{in}, \end{cases} & k = 0, 1, 2, \dots, \\ a_k = \begin{cases} a_{out}, & \|q_{\mu_k}(e(t_k^-))\| > l_{out}\mu_k, \\ a_{in}, & \|q_{\mu_k}(e(t_k^-))\| < l_{in}\mu_k, \\ a_{k-1}, & \|q_{\mu_k}(e(t_k^-))\| \in [l_{in}\mu_k, l_{out}\mu_k], \end{cases} \end{cases} \quad (7)$$

其中  $l_{out} > l_{in} > 0$ ,  $a_{out}$  和  $a_{in}$  是根据设计需要而待定的常数. 由量化器的调焦规则可知,  $a_k$  仅取  $a_{out}$  和  $a_{in}$  两个值, 并且  $a_{out} > 1, 0 < a_{in} < 1$ . 前者说明在采样时刻量化器已处于饱和阶段; 后者说明在采样时刻量化器处于非饱和阶段.

**注2** 设计的量化器为动态量化器, 量化范围  $M\mu_k$  的增大和减小完全由  $\mu_k$  决定, 而  $\mu_k$  的更新规则是由  $a_{k-1}$  决定的. 假若系统处于饱和阶段, 要使  $a_k = a_{out}$  转化为  $a_k = a_{in}$ , 则必须要使  $\|q_{\mu_k}(e(t_k^-))\| < l_{in}\mu_k$  才能实现. 若系统处于非饱和阶段, 则只有量化器达到饱和时,  $a_k = a_{in}$  才转化为  $a_k = a_{out}$ .

由于驱动系统初值的不确定性, 量化器会交替处于饱和及非饱和阶段, 根据调焦规则, 量化器的运行过程可以分为以下3种情况:

- 1) 始终处于非饱和阶段;
- 2) 从饱和阶段进入非饱和阶段;
- 3) 初始阶段进入非饱和阶段, 然后又返回到饱和阶段, 而最终进入非饱和阶段.

考虑传输误差  $e = x - \hat{x}$  所满足的方程

$$\dot{e}(t) = f(x) - f(\hat{x}), t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (8)$$

当  $t \in [t_k, t_{k+1})$  时, 有

$$e(t) = e(t_k) + \int_{t_k}^t (f(x(s)) - f(\hat{x}(s))) ds.$$

由 Gronwall 不等式<sup>[11]</sup>

$$\|e(t)\| \leq \|e(t_k)\| e^{(Lh)}, t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (9)$$

根据式(5)-(6), 式(9)又可写为

$$\begin{aligned} \|e(t)\| &\leq \|e(t_k)\| e^{(Lh)} = \|x(t_k) - \hat{x}(t_k)\| e^{(Lh)} = \\ & \|e(t_k^-) - q_{\mu_k}(e(t_k^-))\| e^{(Lh)}. \end{aligned} \quad (10)$$

当  $t \rightarrow t_{k+1}^-$  时, 可得

$$\|e(t_{k+1}^-)\| \leq \|e(t_k^-) - q_{\mu_k}(e(t_k^-))\| e^{(Lh)}. \quad (11)$$

定义变量  $\xi_k^- = \frac{e(t_k^-)}{\mu_k}$ , 当轨道状态进入非饱和阶段时, 由式(11)可推出

$$\|\xi_{k+1}^-\| \leq \frac{e^{(Lh)}}{a_{in}} \|\xi_k^- - q(\xi_k^-)\|. \quad (12)$$

由此可得如下引理:

**引理 1** 若  $(2+e^{(Lh)})\Delta < M$  成立, 则存在  $a_{in}^* \in (0, 1)$  使得对任意  $a_{in} \in (a_{in}^*, 1)$  有

$$(2 + \frac{1}{a_{in}} e^{(Lh)})\Delta < M. \quad (13)$$

**证** 令  $w = M - (2 + e^{(Lh)})\Delta$ , 则存在  $\epsilon_0 > 0$ , 使得  $w = \epsilon_0 \Delta$ , 即

$$(2 + e^{(Lh)} + \epsilon_0)\Delta = M.$$

取  $a_{in}^* = \frac{e^{(Lh)}}{e^{(Lh)} + \epsilon_0}$ , 则有

$$(2 + \frac{1}{a_{in}^*} e^{(Lh)})\Delta = M,$$

因此, 当  $a_{in} \in (a_{in}^*, 1)$  时, 结论式(13)成立. 证毕.

**引理 2** 设  $M, \Delta$  和  $a_{in}$  满足引理1. 记  $B_0 = M - 2\Delta$ , 则当  $\|\xi_0\| < B_0$  时, 成立

$$\|\xi_{k+1}^-\| \leq \frac{e^{(Lh)}}{a_{in}} \Delta < M, \quad k \geq 0, \quad (14)$$

$$\|q_{\mu_k}(e(t_k^-))\| \leq (M - \Delta)\mu_k, \quad (15)$$

$$\|e(t)\| \leq e^{(Lh)} a_{in}^k \Delta \mu_0, \quad t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (16)$$

**证** 若  $\|\xi_0\| < B_0$ , 则量化器在初始时刻处于非饱和阶段. 根据量化器的调焦规则(7)和式(12), 可得式(14)和(15)成立. 由此及调焦规则可知, 在初始时刻以后的任意时间里量化器都处于非饱和阶段, 于是式(16)成立. 证毕.

**定理 1** 对给定的  $h > 0$ , 选取  $M, \Delta$  和  $a_{in}$  满足引理1; 取  $l_{in} = B_0 - \Delta = M - 3\Delta, l_{out} > M - \Delta$ , 以及  $a_{out} > \frac{e^{(Lh)}(2M - 3\Delta)}{M - 3\Delta}$ , 则对任意  $k \geq 0, \mu_k$  有界, 并且系统(8)指数稳定.

**证** 证明过程分3部分.

1) 如果初始条件使得量化器始终处于非饱和阶段, 则

$$\|e(t)\| \leq \|e(t_{k+1}^-)\| \leq \|e(t_k^-) - q_{\mu_k}(e(t_k^-))\| e^{(Lh)}, \quad (17)$$

$$\mu_{k+1} = a_{in} \mu_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \geq 0. \quad (18)$$

由于  $\|z - q_{\mu_k}(z)\| \leq \Delta \mu_k$ , 根据式(17)可知

$$\|e(t)\| \leq e^{(Lh)} a_{in}^k \Delta \mu_0, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \geq 0.$$

由  $a_{in} \in (0, 1)$ , 故系统(8)指数稳定.

2) 如果初始条件使得量化器处于饱和阶段, 则

$$\|\xi_{k+1}^-\| \leq \frac{e^{(Lh)}}{a_{out}} \|\xi_k^- - q(\xi_k^-)\| < \frac{e^{(Lh)}}{a_{out}} (\|\xi_k^-\| + M).$$

记  $\rho = \frac{e^{(Lh)}}{a_{out}}$ , 由上面公式递推可得

$$\|\xi_k^-\| \leq \rho^k \|\xi_0\| + M(\rho^k + \rho^{k-1} + \dots + \rho) \leq \rho^k \|\xi_0\| + \frac{M\rho}{1 - \rho}.$$

因为  $a_{out} > \frac{e^{(Lh)}(2M - 3\Delta)}{M - 3\Delta}$ , 故对任意的  $x_0$  和  $\mu_0$ ,

必存在  $k^*(\|x_0\|, \mu_0)$  使得  $\xi_{k^*}^- < l_{in} = M - 3\Delta$ , 此时, 量化器处于非饱和阶段. 由引理1和引理2可知, 系统在未来时刻将一直处于非饱和阶段. 于是, 问题就转化为第1)种情况. 对  $\forall k > k^*$ ,

$$\|e(t)\| \leq e^{(Lh)} a_{in}^{k-k^*} \Delta \mu_k = e^{(Lh)} a_{in}^{k-k^*} a_{out}^{k^*} \Delta \mu_0, \quad t \in [t_k, t_{k+1})$$

成立, 因此当初始阶段处于饱和阶段时, 系统(8)仍然指数稳定.

3) 如果初始阶段处于非饱和阶段, 但在有限时间段内又跳回到饱和阶段, 那么这种情况可以先转化为第2)种情况, 然后再转化为第1)种情况, 因此, 系统(9)还是指数稳定.

综上所述, 对任意的  $x_0$ , 当  $t \rightarrow \infty$  时, 传输误差  $e(t)$  指数衰减. 证毕.

在上述量化规则下, 现在研究系统(1)和(2)的量化同步问题. 同步误差  $\eta$  满足

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f(x) - f(y) - G(\hat{x} - y) = \\ &-G\eta + f(x) - f(y) + Ge(t). \end{aligned} \quad (19)$$

**定理 2** 选择增益矩阵  $G$ , 使得  $-G$  为 Hurwitz 矩阵. 若存在标量  $\mu > 0$ , 正定矩阵  $P > 0$  使得下列矩阵不等式

$$-G^T P - PG + L^2 P^T P + I + \mu P < 0 \quad (20)$$

成立, 则同步误差  $\eta$  关于传输误差  $e$  是 ISS 稳定.

**证** 若存在正定矩阵  $P$  使得 (20) 成立, 则选取 Lyapunov 函数

$$V(\eta(t)) = \eta^T(t) P \eta(t), \quad (21)$$

$V$  沿着系统(19)轨线的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \eta^T (-G^T P - PG) \eta + \\ &2\eta^T P (f(x) - f(y)) + 2\eta^T P G e(t). \end{aligned} \quad (22)$$

由于  $P > 0$ , 所以存在正定矩阵  $Q$  使得  $P = Q^T Q$ , 通过式(22)计算可得

$$\dot{V} \leq -\mu V + 2\sqrt{V} \sqrt{\lambda_{\max}(P)} \|G\| \|e\|.$$

根据比较引理,

$$\begin{aligned} \sqrt{V} \leq & \sqrt{\lambda_{\max}(P)}(\exp(-\frac{\mu}{2}(t-t_0))\|\eta_0\| + \\ & \frac{2}{\mu}(1-\exp(-\frac{\mu}{2}(t-t_0)))\|G\| \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|e(\tau)\|), \end{aligned}$$

进一步可推出

$$\begin{aligned} \|\eta\| \leq & \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}(\exp(-\frac{\mu}{2}(t-t_0))\|\eta_0\| + \\ & \frac{2}{\mu}(1-\exp(-\frac{\mu}{2}(t-t_0)))\|G\| \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|e(\tau)\|) \leq \\ & \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \exp(-\frac{\mu}{2}(t-t_0))\|\eta_0\| + \\ & \frac{2}{\mu} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|G\| \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|e(\tau)\|. \end{aligned} \quad (23)$$

令

$$\begin{aligned} \beta(r, s) &= \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \exp(-\frac{\mu}{2}s)r, \\ \gamma(s) &= \frac{2}{\mu} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|G\|s, \end{aligned}$$

则(23)可被重写为

$$\|\eta\| \leq \beta(\|\eta_0\|, t-t_0) + \gamma(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|e(\tau)\|),$$

即同步误差 $\eta$ 关于传输误差 $e$ 是ISS稳定. 证毕.

**注3** 当且仅当 $0 < \mu < \mu^*$ 时, 不等式(20)有唯一解 $P$ , 其中 $\mu^* = -2 \max \operatorname{Re} \lambda_i(-G)$ .

**注4** 由定理1可知, 传输误差 $e(t)$ 指数衰减, 因此可推出同步误差 $\eta(t)$ 渐近趋于零. 另外, 从本文的量化规则可知信道容量是有限的, 并不随着 $t \rightarrow \infty$ 时趋于无穷.

### 5 数值例子(Numerical example)

用统一混沌系统<sup>[12]</sup>来验证定理2的有效性. 驱动系统为

$$\dot{x} = f(x) = Ax + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 z_1 \\ -x_1 y_1 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

响应系统为

$$\dot{y} = Ay + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2 z_2 \\ -x_2 y_2 \end{pmatrix} + G(x - y), \quad (25)$$

其中:

$$G = \begin{bmatrix} 90.158 & 0 & 0 \\ 0 & 90.158 & 0 \\ 0 & 0 & 90.158 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -(25a+10) & 25a+10 & 0 \\ 28-35a & 29a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a+8}{3} \end{bmatrix}, \quad a \in [0, 1].$$

显然,  $-G$ 是Hurwitz矩阵; 根据文献[12], 可知统一混沌系统的轨线是在一个有界集 $\Omega$ 内, 其中

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid -20 \leq x \leq 20, -30 \leq y \leq 30, 0 \leq z \leq 50\}.$$

对 $\Omega$ 中的任意向量 $x$ 和 $y$ , 容易验证

$$\|f(x) - f(y)\| \leq (\|A\| + \|Q\|)\|x - y\|,$$

其中

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z_1 & 0 & x_2 \\ -y_2 - x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

通过计算, 可得

$$\begin{aligned} L = \|A\| + \|Q\| &\leq \\ &30.2367 + 50.9902 = 81.2269. \end{aligned}$$

定义量化函数为

$$q(x) = \begin{cases} M, & x_i \geq M + \frac{1}{2}\Delta, \\ -M, & x_i \leq -M - \frac{1}{2}\Delta, \\ \Delta \left\lfloor \frac{x}{\Delta} + \frac{1}{2} \right\rfloor, & x_i \in (-M - \frac{1}{2}\Delta, M + \frac{1}{2}\Delta), \end{cases}$$

其中:  $i = 1, 2, 3$ ,  $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 $x$ 的最大整数.

量化器为

$$q_\mu(x) = \mu q\left(\frac{x}{\mu}\right).$$

若选取 $M = 80$ ,  $\Delta = \frac{1}{2}$ ,  $\mu_0 = 1$ ,  $a_{in} = 0.8$ ; 初始条件 $x_0 = [0.3 \ 0.3 \ 0.3]^T$ , 则在上述定义的量化方式下, 图2~4给出了当参数 $a$ 取不同值时驱动系统(24)与响应系统(25)的同步误差的仿真, 显示出同步误差渐近趋于零, 从而验证了定理2的有效性.

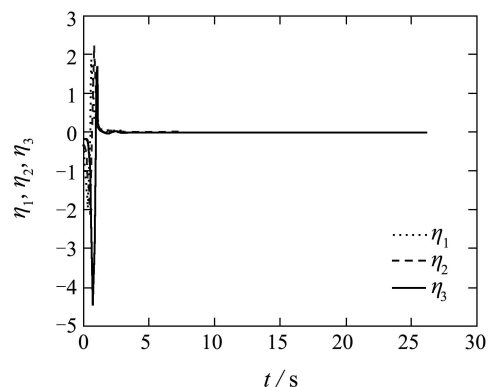
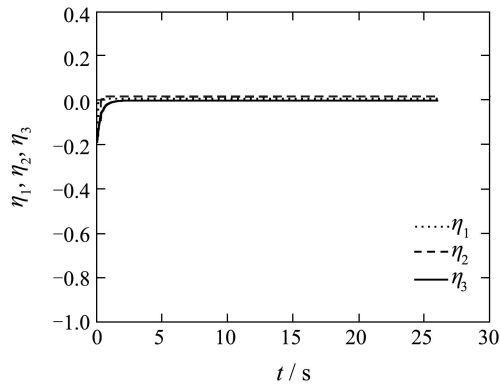
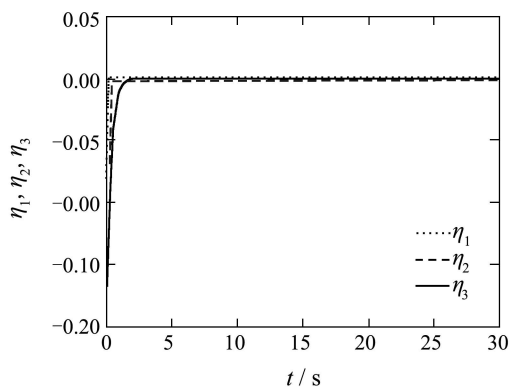


图2 混沌系统的同步误差( $a = 0.3$ )

Fig. 2 Synchronization error of chaotic systems( $a = 0.3$ )

图3 混沌系统的同步误差( $a = 0.8$ )Fig. 3 Synchronization error of chaotic systems( $a = 0.8$ )图4 混沌系统的同步误差( $a = 1$ )Fig. 4 Synchronization error of chaotic systems( $a = 1$ )

## 6 结论(Conclusion)

本文研究了一类连续混沌系统在信息受限下的量化同步问题,给出了有效的量化方法,使得同步误差渐近趋于零,克服了以往的研究工作,在有限信道容量下无法实现同步误差渐近趋于零的缺陷。

## 参考文献(References):

- [1] 胡刚, 萧井华, 郑志刚. 混沌控制 [M]. 上海: 上海科技教育出版社, 2000.  
(HU Gang, XIAO Jinghua, ZHENG Zhigang. *Chaos Control* [M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 2000.)

- [2] LÜ J H, CHEN G R. Generating multiscroll chaotic attractors: theories, methods and applications [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2006, 16(4): 775 – 858.
- [3] OTT E, GREBOGI C, YORKE J A. Controlling chaos [J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64(11): 1196 – 1199.
- [4] ZHAO L Y, LI X R, ZHAO G. Chaotic synchronization based on Riccati inequality with application to secure communication [C] // *Proceedings of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation*. New York: IEEE, 2004: 1308 – 1311.
- [5] FRADKOV A L, ANDRIEVSKY B, EVANS R J. Chaotic observer-based synchronization under information constraints [J]. *Physical Review E*, 2006, 73(6): 1 – 8.
- [6] FRADKOV A L, ANDRIEVSKY B, EVANS R J. Adaptive observer-based synchronization of chaotic systems with first-order coder in the presence of information constraints [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 2008, 55(6): 1685 – 1694.
- [7] FRADKOV A L, ANDRIEVSKY B, EVANS R J. Controlled synchronization under information constraints [J]. *Physical Review E*, 2008, 78(3): 1 – 6.
- [8] WANG G X, WANG Z M, LU G P. Chaotic synchronization with limited information [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2008, 18(10): 1 – 9.
- [9] SAVKIN A V, CHENG T M. Detectability and output feedback stabilizability of nonlinear networked control systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(4): 730 – 735.
- [10] LIBERZON D. Hybrid feedback stabilization of systems with quantized signals [J]. *Automatica*, 2003, 39(9): 1543 – 1554.
- [11] HASSAN K K. *Nonlinear Systems* [M]. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [12] LÜ J H, CHEN G R, CHENG D Z, et al. Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(12): 2917 – 2926.

## 作者简介:

刘伟 (1984—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为非线性系统、网络控制系统、混沌控制, E-mail: 345127147@163.com;

王岩岩 (1981—), 女, 硕士, 目前研究方向为网络控制系统、混沌控制, E-mail: 15994194766@163.com;

汪志鸣 (1953—), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为非线性时变系统、网络控制系统、奇摄动分析、混沌分析与控制等, E-mail: zmwang@math.ecnu.edu.cn;

李建华 (1982—), 女, 硕士, 目前研究方向为网络化控制系统、混沌控制, E-mail: lishaohua998@126.com.