

# 基于目标函数的递推子空间辨识算法

王 佳, 王宏伟, 顾 宏

(大连理工大学 控制科学与工程学院, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 针对实际工程中要求对系统参数进行在线估计的问题, 提出一种递推子空间辨识的新方法. 通过引入辅助变量关系将递推子空间辨识问题转化为目标函数的迭代最小化求解问题. 采用递推最小二乘法在线估计参数并由传播方法得到更新的广义能观性矩阵, 进而求得子空间辨识模型系统参数. 该算法简单有效且对初值具有更高的鲁棒性. 最后, 通过仿真实例验证算法的有效性.

**关键词:** 子空间辨识; 递推算法; 目标函数; 递推最小二乘法

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Recursive subspace identification algorithm based on the objective function

WANG Jia, WANG Hong-wei, GU Hong

(School of Control Science and Engineering, Dalian University of Technology, Liaoning Dalian 116024, China)

**Abstract:** For the requirements of estimating the system parameters on-line in most practical engineering problems, a new recursive subspace identification algorithm is proposed in this paper. The recursive identification problem is converted to minimize the objective function by the introduction of the instrumental variable relation. The Recursive least square algorithm is employed to estimate the parameters, then the propagator method is developed to update the extended observability matrix and finally the system matrices are computed. The proposed method is simple and effective and improves the robustness to the uncertainty in initial values. The efficiency of this method is illustrated with a simulation example.

**Key words:** subspace identification; recursive algorithm; the objective function; recursive least square method(RLS)

### 1 引言(Introduction)

子空间模型辨识(Subspace model identification, SMI)是20世纪末提出的一类新的状态空间模型辨识方法. 由于子空间辨识算法数值稳定性、无需迭代优化、参数估计不依赖初值选取, 可以直接由输入输出数据估计状态空间模型, 从提出至今的十几年中, 以其独特的优势广泛应用于多变量系统. 子空间方法在辨识和控制领域受到越来越多的关注, 各国学者也纷纷致力于将该方法扩展到更多的应用领域<sup>[1,2]</sup>.

目前, 许多成熟的子空间辨识方法已经用于故障检测, 自适应控制等工程实践中, 并取得了显著的效果<sup>[3,4]</sup>. 但是大多数的工程问题要求能够对系统参数进行在线估计, 递推子空间方法可以有效地解决以上问题, 已成为大家研究的热点<sup>[5]</sup>. 文献[6]基于4SID子空间辨识方法提出一类递推子空间辨识方法, 前提条件是系统阶次为已知. 文献[7]结合序列信号处理和子空间辨识方法跟踪可观矩阵子空间. 文献[8]将梯度型算法引入基于遗忘因子的状态子空间跟踪中, 实现系统矩阵的在线更新.

本文直接从过程模型的状态空间方程出发推导算法, 利用子空间辨识算法与序列信号处理方法的关系, 将子空间跟踪问题转换为一个无约束最优化问题的求解. 进一步地, 递推子空间辨识问题转化为目标函数的迭代最小化问题, 采用传播方法更新状态观测矩阵和递推最小二乘法在线估计模型参数. 最后, 通过仿真实例将本文方法与其他文献中提出的方法进行比较, 可看出本文所提出的算法简单有效, 提高算法鲁棒性的同时并进一步缩短了运算时间.

### 2 问题描述(Problem statement)

考虑如下线性时不变状态空间新息模型:

$$S: \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Ke_k \\ y_k = Cx_k + Du_k + e_k \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $u_k \in \mathbb{R}^r$  和  $y_k \in \mathbb{R}^l$  分别为  $k$  时刻系统的输入和输出测量值,  $x_k \in \mathbb{R}^n$  为  $k$  时刻的过程状态, 新息  $e_k$  为零均值白噪声且满足  $E[e_p e_q^T] = R_e \delta_{pq}$ ,  $(A, B, C, D)$  为相应维数的系统矩阵和  $K$  为卡尔曼滤波增益.

假设模型(1)的系统阶次  $n$  为已知, 并满足如下三

个条件:

- 1) 系统渐近稳定, 即系统特征值  $|\lambda_{\max}(A)| < 1$ ,
- 2)  $(A - KC, C)$  可观测,  $(A, [B, K])$  可控,
- 3)  $(A - KC)$  的特征值严格在单位圆内.

针对由状态空间模型(1)描述的系统进行前向迭代且新息值为  $e_k = y_k - Cx_k - Du_k$ , 推导如下:

$$\begin{aligned}
 y_k &= Cx_k + Du_k + e_k \\
 y_{k+1} &= Cx_{k+1} + Du_{k+1} + e_{k+1} \\
 &= C[Ax_k + Bu_k + K(y_k - Cx_k - Du_k)] \\
 &\quad + Du_{k+1} + e_{k+1} \\
 &= C(A - KC)x_k + C(B - KD)u_k + CKy_k \\
 &\quad + Du_{k+1} + e_{k+1} \\
 &\vdots \\
 y_{k+f-1} &= C(A - KC)^{f-1}x_k + C(A - KC)^{f-2} \\
 &\quad (B - KD)u_k + C(A - KC)^{f-2}Ky_k + \cdots \\
 &\quad + Du_{k+f-1} + e_{k+f-1}
 \end{aligned} \tag{2}$$

定义新变量  $z_k = [u_k^T \ y_k^T]^T$ , 令  $\bar{A} = A - KC$ ,  $\bar{B} = [B - KD \ K]$  和  $\bar{D} = [D \ \text{zeros}(l)]$ , 由式(2)可得到广义数据输入输出矩阵等式写成下述形式:

$$\bar{y}_f = \Gamma_i x_k + H_i \bar{z}_f + \bar{e}_f \tag{3}$$

其中广义能观性矩阵  $\Gamma_i$  和三角 Toeplitz 矩阵  $H_i$  分别为:

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} C \\ C\bar{A} \\ \vdots \\ C\bar{A}^{f-1} \end{bmatrix}, H_i = \begin{bmatrix} \bar{D} & 0 & \cdots & 0 \\ C\bar{B} & \bar{D} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C\bar{A}^{f-2}\bar{B} & C\bar{A}^{f-3}\bar{B} & \cdots & \bar{D} \end{bmatrix}$$

堆向量  $\bar{y}_f = [y_k^T \ y_{k+1}^T \ \cdots \ y_{k+f-1}^T]^T$ ,  $\bar{z}_f = [z_k^T \ z_{k+1}^T \ \cdots \ z_{k+f-1}^T]^T$  和  $\bar{e}_f = [e_k^T \ e_{k+1}^T \ \cdots \ e_{k+f-1}^T]^T$ .

仿照上面式(2), 对模型(1)进行后向迭代操作,

$$\begin{aligned}
 x_k &= Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + Ke_{k-1} \\
 &= (A - KC)x_{k-1} + (B - KD)u_{k-1} + Ky_{k-1} \\
 &= (A - KC)^2x_{k-2} + (A - KC)(B - KD)u_{k-2} \\
 &\quad + (A - KC)Ky_{k-2} + (B - KD)u_{k-1} + Ky_{k-1} \\
 &\vdots \\
 &= (A - KC)^p x_{k-p} + (A - KC)^{p-1}(B - KD)u_{k-p} \\
 &\quad + (A - KC)^{p-1}Ky_{k-p} + \cdots + (B - KD)u_{k-1} \\
 &\quad + Ky_{k-1}
 \end{aligned} \tag{4}$$

进一步地, 可得关系式:

$$x_k = \bar{A}^p x_{k-p} + \Delta_i \bar{z}_{k-p} \tag{5}$$

其中: 逆广义能观性矩阵  $\Delta_i = [\bar{A}^{p-1}\bar{B} \ \bar{A}^{p-2}\bar{B} \ \cdots \ \bar{B}]$  和堆向量  $\bar{z}_{k-p} = [z_{k-p}^T \ z_{k-p+1}^T \ \cdots \ z_{k-1}^T]^T$ .

假设系统为渐近稳定, 当  $p \rightarrow \infty$  时, 变换矩

阵  $\bar{A}^p \approx 0$ , 即可得,

$$x_k \approx \Delta_i \bar{z}_{k-p} \tag{6}$$

将式(6)代入状态空间模型(1)中的输出方程可得,

$$y_k = C\Delta_i \bar{z}_{k-p} + Du_k + e_k \tag{7}$$

上面式中的下标 'p' 和 'f' 分别表示过去和将来相对时间概念, 可取不同的正整数.

### 3 递推子空间模型辨识(Recursive subspace model identification)

#### 3.1 RLS 计算参数(Computing the parameters by RLS)

给定有限的输入输出数据样本  $\{u_k, y_k, k = 1, 2, \cdots, N\}$ , 令未知参数  $\theta = [C\Delta_i \ D]$ , 则式(7)可化为如下的极小化目标函数:

$$\min_{\theta} \sum_{k=1}^N \lambda_1^{N-k} \|y_k - \theta w_k\|_F^2 \tag{8}$$

其中:  $0 \leq \lambda_1 < 1$  和  $w_k = [\bar{z}_{k-p}^T \ u_k^T]^T$ . 可以看出, 将式(7)等价于式(8)中的极小化变量非常适合于递推更新. 采用 RLS 算法解决上面式(8)中的指数加权最小二乘问题.

假设马尔可夫参数  $h_i = C\bar{A}^{i-1}\bar{B}$  ( $i = 1, 2, \cdots, f-1$ ), 矩阵  $H_i$  中的每个块元素可以由  $h_i$  代替, 得到

$$H_i = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & * & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{f-1} & h_{f-2} & \cdots & * \end{bmatrix} \tag{9}$$

这里 '\*' 位置的元素为  $\bar{D}$ . 由最小二乘参数估计  $\hat{\theta}$  构建矩阵  $\hat{H}_i$ , 这时每个马尔可夫参数  $h_i$  为已知且有  $\hat{\theta} = [h_{f-1} \ h_{f-2} \ \cdots \ h_1 \ \bar{D}]$ .

#### 3.2 广义能观性矩阵的递推估计(Recursive update of the extended observability matrix)

将式(3)中的其中一项移到等式的左边,

$$\bar{y}_f - H_i \bar{z}_f = \Gamma_i x_k + \bar{e}_f \tag{10}$$

令

$$b_f = \bar{y}_f - H_i \bar{z}_f \tag{11}$$

和

$$b_f = \Gamma_i x_k + \bar{e}_f \tag{12}$$

可以看出式(10)将子空间辨识方法式(11)和阵列信号处理方法式(12)紧密联系起来.

根据式(11)由输入输出数据测量值及矩阵估计值  $\hat{H}_i$  可得到更新的观测向量  $\hat{b}_f$ , 应用阵列信号处理

中的子空间跟踪方法, 根据式(12)由更新的观测向量 $\hat{b}_f$ 即可估计广义能观性矩阵 $\Gamma_i$ .

基于前面假设 $(\bar{A}, C)$ 是可观测的, 则广义能观性矩阵 $\Gamma_i$ 至少有 $n_x$ 个线性独立的行. 令 $n_x$ 为已知的, 构建一个置换矩阵 $S \in l_f \times l_f$ , 广义能观性矩阵 $\Gamma_i$ 可以分解为 $n_x$ 独立行的块 $\Gamma_{i1}$ 以及 $l_f - n_x$ 行的块 $\Gamma_{i2}$ , 可以按照下面的方式分解,

$$S\Gamma_i = \begin{bmatrix} \Gamma_{i1} \\ \Gamma_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{i1} \\ P_f^T \Gamma_{i1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ P_f^T \end{bmatrix} \Gamma_{i1} \quad (13)$$

可得的唯一的算子 $P_f$ , 称为传播方法中的传播因子, 由子空间跟踪方法可得到广义能观性矩阵 $\hat{\Gamma}_i = [I_{n_x} \ P_f]^T$ .

### 3.3 系统矩阵的递推估计(Recursive estimation of system matrices)

在求解系统矩阵的不同方法中, 一旦广义能观性矩阵 $\hat{\Gamma}_i$ 确定. 那么系统矩阵 $A$ 和 $C$ 也就可以确定, 利用矩阵 $\Gamma_i$ 的移位不变结构<sup>[9,10]</sup>, 矩阵 $C$ 可以直接由广义能观性矩阵的前 $l$ 行得到, 即

$$\hat{\Gamma}_i((1:l(f-1)), :)A = \hat{\Gamma}_i(l+1:lf, :) \quad (14)$$

其中:  $\hat{\Gamma}_i((1:l(f-1)), :)$ 表示去掉 $\hat{\Gamma}_i$ 的后 $l$ 行,  $\hat{\Gamma}_i(l+1:lf, :)$ 表示去掉 $\hat{\Gamma}_i$ 的前 $l$ 行. 那么系统矩阵 $C$ 和 $A$ 可由下式直接得到:

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \hat{\Gamma}_i(1:l, :) \\ \hat{A} &= \left\{ \hat{\Gamma}_i(1:l(f-1)), : \right\}^\dagger \hat{\Gamma}_i(l+1:lf, :) \end{aligned} \quad (15)$$

模型输出 $\hat{y}_k$ 可以由下式决定,

$$\begin{aligned} \hat{y}_k &= Du_k + \sum_{r=0}^{k-1} CA^{k-r-1}Bu_r \\ &= [u_k^T \otimes I_l] \text{vec}D + \left( \sum_{r=0}^{k-1} u_r^T \otimes CA^{k-r-1} \right) \text{vec}B \end{aligned} \quad (16)$$

我们可以通过极小化上面的方程, 得到系统矩阵 $B$ 和 $D$ 的解:

$$\min_{B,D} \sum_{t=1}^N \lambda_2^{N-t} \|y(t) - \varphi^T(t)\theta\|_F^2 \quad (17)$$

其中,  $\theta = [\text{vec}^T(D) \ \text{vec}^T(B)]^T$ 和 $\varphi^T(t) = \left[ (u^T(t) \otimes I_l) \left( \sum_{s=1}^{t-1} u^T(s) \otimes \hat{C}\hat{A}^{t-s-1} \right) \right]$ , 应用RLS算法递推求解 $B$ 和 $D$ .

### 3.4 递推算法归纳(The summary of recursive algorithm)

将状态空间模型(1)中的系统矩阵 $(A, B, C, D)$ 递推辨识算法归纳总结如下:

*Step 1:* 初始化参数 $n, f, p, \lambda_1$ 和 $\lambda_2$ ,

*For*  $k = p+1, p+2, \dots, N$

*Step 2:* 根据式(8)递推计算参数最小二乘参

数 $\hat{\theta}$ ,

*Step 3:* 构建Toeplitz矩阵 $\hat{H}_i$ , 根据式(11)更新观测向量 $b_f = \bar{y}_f - \hat{H}_i \bar{z}_f$ ,

*Step 4:* 由传播方法递推更新得到广义能观性矩阵 $\hat{\Gamma}_i = [I_{n_x} \ \hat{P}_f]^T$ ,

*Step 5:* 根据式(15)估计系统矩阵 $A$ 和 $C$ ,

*Step 6:* 根据式(17)估计系统矩阵 $B$ 和 $D$ .

*End*

## 4 仿真算例Simulation example)

考虑如下四阶MIMO状态空间模型:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Ke_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k + e_k \end{aligned} \quad (18)$$

其中,

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0.67 & 0.67 & 0 & 0 \\ -0.67 & 0.67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.67 & -0.67 \\ 0 & 0 & 0.67 & -0.67 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0.6598 & 1.9698 \\ -0.5256 & 0.4845 \\ -0.6968 & 0.1722 \\ -0.1474 & 0.5646 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} -0.3749 & 0.0751 & -0.5225 & 0.5830 \\ -0.8977 & 0.7543 & 0.1159 & 0.0982 \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 4.3171 & -2.6436 \\ -0.4879 & -0.3416 \\ 0.6484 & -0.9400 \\ -0.4660 & 0.1032 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

信号 $e_k$ 是独立的方差为1的白噪声序列且信号噪声比(Signal to noise ration, SNR)为20dB. 仿真中共产生3000对输入输出数据序列以验证递推辨识结果.

仿真中的计算平台是运行于Windows XP操作系统下的MATLAB Version 7.0.4.365, 处理器为Intel (R) Celeron (R) CPU 2.66GHz, 内存为2GB.

仿真中初始化参数选择如下: 遗忘因子 $\lambda_1 = 0.9999$ ,  $\lambda_2 = 0.9999$ , 未来窗口和过去窗口大小均为 $f = 10, p = 10$ .

假设系统的阶次 $n = 4$ 为已知, 构建一个两输入两输出的四阶模型. 将本文的方法与文献[7]提出的Eivpm算法进行比较. 在图1中可以看出, Eivpm算法给出的系统状态估计是有偏的, 而本文提出的递推方法可以很好的估计原系统. 图2给出状态矩阵估计 $A$ 的特征值与实际特征值的跟踪比较图, 可以看出, 本文提出的方法可以实现对原系统参数的高精度估计.

为了进一步比较辨识结果, 选用不同的初始值继续做实验, 可选取零矩阵或单位阵等, 本文方法对原

系统的估计均能给出比较满意的结果,可看出算法具有一定的鲁棒性.此外,本文提出的递推方法运算时间为 $10^{-1}$ 数量级,而且从理论上讲,计算复杂度 $o((r+l)p)$ .

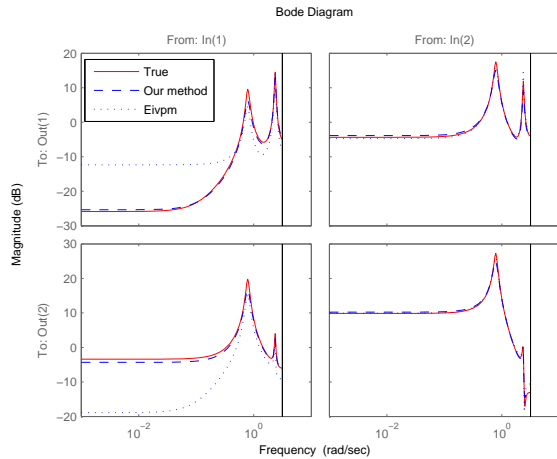


图 1 辨识模型与真实系统的Bode图

Fig. 1 Bode diagram of the identified systems and the true system

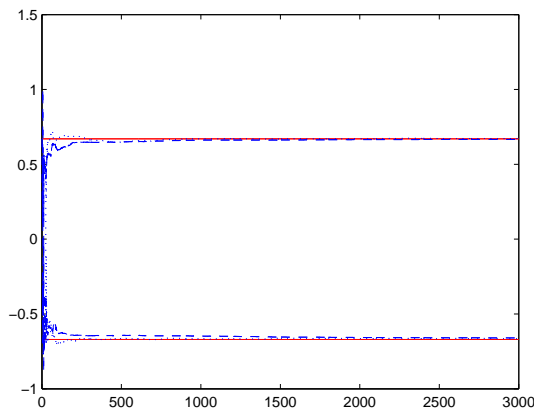


图 2 辨识模型与真实系统的极点跟踪

Fig. 2 Poles trajectories of the identified systems and the true system

## 5 结论与展望(Conclusion and future)

本文提出的递推子空间辨识方法可在线估计系

统矩阵,通过仿真实验可以说明所提出的方法的有效性和跟踪的稳定性,并具有一定的鲁棒性.但是,递推子空间辨识的收敛性以及稳定性分析等性能分析相关问题的研究还处在初步阶段,需要进一步展开和推进.

## Reference(References):

- [1] 李幼凤, 苏宏业, 褚健. 子空间模型辨识方法综述[J]. 化工学报, 2006, 57(3): 225–228.
- [2] Qin S J. An overview of subspace identification[J]. *Computers and Chemical Engineering*, 2006, 30(10-12): 1502 – 1513.
- [3] Wei X K, Verhagen M, van Engeledn T. Sensor fault detection and isolation for wind turbines based on subspace identification and Kalman filter techniques[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2010, 24(8): 687 – 707.
- [4] van Wingerden J W, Verhaegen M. Subspace identification of Bilinear and LPV systems for open- and closed-loop data[J]. *Automatica*, 2009, 45(2): 372 – 381.
- [5] 丁锋. 系统辨识(1): 辨识导引. 南京信息工程大学学报(自然科学版)[J], 2011, 3(1): 1–22.
- [6] Oku H, Kimura H. Recursive 4SID algorithms using gradient type subspace tracking[J]. *Automatica*, 2002, 38, 1035 – 1043.
- [7] Mercère G, Bako L, Lecoeuche S. Propagator-based methods for recursive subspace model identification[J]. *Signal Processing*, 2008, 88(3): 468 – 491.
- [8] 杨华, 李少远. 一种新的基于遗忘因子的递推子空间辨识算法[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(1): 69 – 72.
- [9] 丁锋, 萧德云. 多变量系统状态空间模型的递阶辨识[J]. 控制与决策, 2005, 20(8): 848 – 853.
- [10] Ding F, Chen T W. Hierarchical identification of lifted state-space models for general dual-rate systems[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2005, 52(6): 1179 – 1187.

## 作者简介:

王 佳 (1984—), 女, 博士研究生, 目前研究方向子空间辨识方法和预测控制, E-mail: jiaawang@mail.dlut.edu.cn;

王宏伟 (1969—), 男, 副教授, 研究领域为建模、辨识与控制, 非线性系统等, E-mail: wanghw@dlut.edu.cn;

顾 宏 (1961—), 男, 教授, 博士生导师, 研究领域为生物信息学, 数据挖掘, 系统辨识和控制等, E-mail: guhong@dlut.edu.cn.