

无线传感器网络分布式量化卡尔曼滤波

陈军勇¹, 邬依林^{1,2}, 祁恬¹

(1. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640; 2. 广东第二师范学院 计算机科学系, 广东 广州 510310)

摘要: 本文针对无线传感器网络中的目标跟踪问题, 研究了分布式量化卡尔曼滤波问题. 由于网络中存在能量和带宽限制, 传感器传输的数据必须经过量化处理. 考虑一个线性离散随机动态系统, 首先提出了一种动态Lloyd-Max量化器并设计了其在线更新方案, 然后基于贝叶斯原理导出了递归形式的最优化卡尔曼滤波器, 同时给出了一种渐近等价的迭代算法, 并进一步分析了量化卡尔曼滤波器的稳定性. 最后, 仿真结果验证了所设计算法的可行性与有效性.

关键词: 无线传感器网络; 分布式量化卡尔曼滤波; 动态Lloyd-Max量化器; 稳定性

中图分类号: TP393 **文献标识码:** A

Distributed quantized Kalman filtering for wireless sensor networks

CHEN Jun-yong¹, WU Yi-lin^{1,2}, QI Tian¹

(1. College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China;

2. Faculty of Computer Science, Guangdong University of Education, Guangzhou Guangdong 510310, China)

Abstract: We study the distributed quantized Kalman filtering for the target-tracking in wireless sensor networks (WSNs). Because of the constraints on power and bandwidth in WSNs, sensor data have to be quantized before transmission. A linear discrete-time stochastic dynamic system is employed for this purpose. First, a dynamic Lloyd-Max quantizer is adopted and the corresponding online update scheme is designed. Then, the optimal recursive quantized Kalman filter is derived based on the Bayesian principles, and an asymptotically equivalent iterative algorithm is developed. The stability of the quantized Kalman filter is analyzed. Simulation results show the feasibility and effectiveness of the designed algorithms.

Key words: wireless sensor networks; distributed quantized Kalman filtering; dynamic Lloyd-Max quantizer; stability

1 引言(Introduction)

无线传感器网络(WSNs)近年来成为研究热点, 其由大量低功耗的分布式传感器节点组成, 通过节点之间的协同式工作可以完成许多复杂的任务, 如目标定位与跟踪、网络控制、环境监测等^[1~5]. 带宽受限下的分布式估计问题是无线传感器网络研究的一个重要方向, 由于传感器节点能量和带宽的限制, 为了延长网络使用寿命, 节点一般需要对观测进行量化编码后才发送, 接收端对量化信号解码并进行融合处理. 因此, 网络中分布式估计问题的量化器、估计器以及节点通信协议设计等是研究重点.

多年来, 国内外一些研究者提出了多种能量和带宽受限下的分布式估计算法. Gubner^[1]针对随机性参数的分布式量化估计问题, 设计了给定线性形式下的最优估计器, 并得到了局部最优量化器. Zhang等^[3]基于文献[1]的思想首先研究了静态参数的线性最优分布式估计问题, 然后扩展到动态系统的量化卡尔曼滤波问题, 其设计了递归形式的估计器和动

态更新的量化器, 但文中只讨论了单传感器观测情形, 且量化器的更新需要融合中心在每个采样周期反馈状态预测信息到节点, 这增加了通信代价并带来一定局限性. Ribeiro等^[6]研究了量化比特率仅为一位的量化卡尔曼滤波器(SOI-KF), 然后Msechu等在文献[7]中扩展到了多位情形, 他们虽然考虑了多传感器网络环境, 但在每个采样周期只有一个传感器激活, 且量化器的更新亦需要融合中心广播状态预测信息到各节点. 此外, Sun等^[8]研究了线性量化卡尔曼滤波问题, 其采用均匀量化器, 但量化器的更新亦需要融合中心广播状态预测信息到各节点.

针对上述问题, 本文研究了多传感器多位的分布式量化卡尔曼滤波问题. 首先提出了一种新的动态Lloyd-Max量化器并设计了其在线自动更新方案, 然后导出了递归形式的最优化卡尔曼滤波器, 同时给出了一种渐近等价的迭代算法(迭代量化卡尔曼滤波器(IQKF)), 最后分析了量化卡尔曼滤波器的稳定性. 本文提出的动态Lloyd-Max量化器的更新无

需融合中心的反馈信息,这节省了通信代价,且适用性增强.迭代量化卡尔曼滤波器算法在存在丢包或延迟的网络环境下亦适用,这增强了算法的鲁棒性.对于不稳定系统,量化卡尔曼滤波器稳定的临界比特率在给定量化器下由系统矩阵的不稳定特征值决定,这与文献[9,10]关于量化控制问题的结论保持一致.最后,仿真结果验证了所得结论的正确性和算法的高效性.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑一个存在融合中心的传感器网络,其中包含有 N 个分布式传感器节点,且节点之间没有通信,它们各自只与融合中心通信.

在每个采样周期,各节点对同一个动态目标进行独立观测,由于网络中的带宽限制以及数字信号传输的要求,传感器的观测需要经过量化并编码成数字信号,然后经过无噪声信道发送到融合中心,融合中心基于接收到的量化观测对目标状态进行实时估计.无线传感器网络分布式估计系统如图1所示.

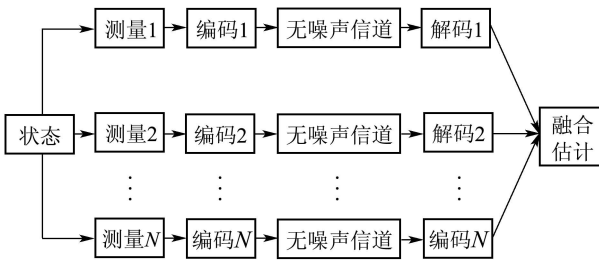


图1 无线传感器网络分布式估计示意图

Fig. 1 Distributed estimation scheme for WSNs

上述目标的动态模型由下列线性离散随机动态系统描述:

$$x(k) = Ax(k-1) + u(k), \quad k = 1, 2, \dots, \infty. \quad (1)$$

传感器 n 的观测为

$$y_n(k) = hx(k) + v_n(k), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

其中: 状态变量 $x(k) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$, 初始状态 $x(0) \sim \mathcal{N}(x_0, M_0)$, 转移矩阵 $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$, 驱动噪声 $u(k) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ 为零均值高斯白噪声, 其协方差阵 $E\{u(k) \cdot u^T(l)\} = C_u \delta_{kl}$, $C_u \in \mathbb{R}^{p \times p}$, 传感器观测 $y_n(k) \in \mathbb{R}$, 其中 $h \in \mathbb{R}^{1 \times p}$ 为观测向量, 观测噪声 $v_n(k) \in \mathbb{R}$ 为零均值高斯白噪声, 其方差 $E\{v_n(k)v_m^T(l)\} = \sigma_n^2 \delta_{nm} \cdot \delta_{kl}$, 假定 $\{u(k), v_n(k), x(0)\}$ 相互独立. 传感器 n 的量化比特率给定定为 q_n 位, 其中 $q_n \geq 0$, $q_n \in \mathbb{Z}$, $q_n = 0$ 表示传感器未激活.

2.1 动态量化器(Dynamic quantizer)

本节首先介绍标量量化器的概念, 然后针对本文的动态目标跟踪问题, 提出动态量化器的设计及其在线更新问题^[3,11,12].

量化是一个把连续信号转换成离散信号的处理过程.

考虑一维标量信源 $y \in \mathbb{R}$, 设量化比特率为 q 位, $q \geq 0$, $q \in \mathbb{Z}$, 定义量化分区 $R_i := [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, 2^q - 1$, 其中 $\{\tau_i\}_{i=0}^{2^q}$ 为量化阈值集, 且 $\tau_0 = -\infty$, $\tau_{2^q} = \infty$. 量化准则如图2所示, 即

$$b = i, \text{ iff } y \in R_i, \quad (3)$$

其中: b 为量化输出, $i \in \{0, 1, \dots, 2^q - 1\}$, 其需要转换为二进制数字信号然后才发送.

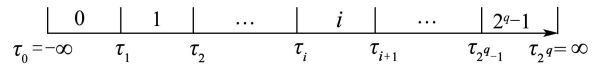


图2 量化器

Fig. 2 Quantizer

在接收端, 解码器根据量化规则对数字信号进行解码, 将信息从数字信号的形式恢复到其原来形式, 解码规则如下:

$$y \in R_i \text{ or } y = \hat{y}_i, \text{ iff } b = i, \quad (4)$$

其中: 量化值 $\hat{y}_i \in R_i$, $i = 0, 1, \dots, 2^q - 1$, \hat{y}_i 的具体值根据量化准则而定.

对于一个具有给定分布的随机信源 y , 设其概率密度函数为 $p(y)$, 定义平均失真

$$D := \sum_{i=0}^{2^q-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (y - \hat{y}_i)^2 p(y) dy, \quad (5)$$

则存在一种最优量化器使其平均失真达到最小, 即著名的Lloyd-Max量化器^[11,12], 其在给定量化比特率 q 下, 量化分区可由信源分布 $p(y)$ 唯一确定, 即 $\{\tau_i\}_{i=1}^{2^q-1} = F^{LM}(p(y))$.

由于本文考虑的是动态目标的跟踪问题, 在不同的采样时刻, 传感器的观测信号 $y_n(k)$ 的分布不一样, 为了得到最优的量化效果, 本文采用动态Lloyd-Max量化方式, 即在每个采样周期, 各传感器的Lloyd-Max量化分区根据采样信号的分布进行动态更新. 假定各传感器以及融合中心存有系统模型的信息, 因而关于动态量化器的一个基本问题是: 传感器的编码器和融合中心的解码器如何根据量化观测和系统模型等信息实现在线自动更新?

2.2 基于量化数据的极小均方误差估计 (Minimum mean square error estimation based on quantized data)

本节根据贝叶斯估计原理提出基于量化数据的最优卡尔曼滤波问题.

设 $b_n(k)$ 为传感器 n 在 k 时刻对观测 $y_n(k)$ 的量化输出, 其中 $b_n(k) \in \{0, 1, \dots, 2^{q_n} - 1\}$. 定义 k 时刻所有传感器的量化观测集为 $B_k := \{b_1(k), b_2(k), \dots, b_N(k)\}$, 整个传感器网络从初始观测时刻1到时刻 k 的量化观测集为 $B_{1:k} := \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$. 本文用 $\hat{x}(k|B_{1:k})$ 表示基于所有接收到的量化观测 $B_{1:k}$

得到的对当前状态 $x(k)$ 的估计. 分布式量化估计结构如图3所示, 其中 $\{S_n\}_{n=1}^N$ 表示传感器集合.

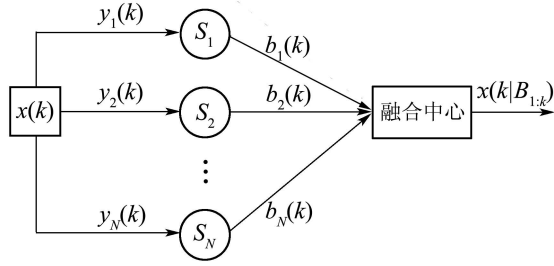


图 3 分布式量化估计结构图

Fig. 3 Distributed quantized-estimation scheme

本文采用均方误差(MSE)作为估计性能准则, 定义 k 时刻估计器的误差协方差阵为

$$M(k|B_{1:k}) := E\{[x(k) - \hat{x}(k|B_{1:k})][x(k) - \hat{x}(k|B_{1:k})]^T | B_{1:k-1}\}, \quad (6)$$

则 $\hat{x}(k|B_{1:k})$ 的均方误差(MSE)可用该误差协方差阵的迹表示, 即 $MSE := \text{tr}\{M(k|B_{1:k})\}$.

根据贝叶斯估计原理^[13], 融合中心在 k 时刻基于 $B_{1:k}$ 对状态 $x(k)$ 的极小均方误差估计(MMSE)即为下面的条件均值:

$$\hat{x}(k|B_{1:k}) = E\{x(k)|B_{1:k}\} = \int_{\mathbb{R}^p} x(k)p(x(k)|B_{1:k})dx(k), \quad (7)$$

其中 $p(\cdot)$ 表示条件概率密度函数.

在任意 k 时刻, 状态的后验分布 $p(x(k)|B_{1:k})$ 可以根据系统模型(1)和(2)以及 $B_{1:k}$ 递归确定. 基于量化观测的卡尔曼滤波器($[P_q]$ - $[C_q]$)可以表示为:

$[P_q]$ 预测. 假设 k 时刻 $p(x(k-1)|B_{1:k-1})$ 已知, 则状态 $x(k)$ 在 k 时刻的先验分布 $p(x(k)|B_{1:k-1})$ 为

$$p(x(k)|B_{1:k-1}) = \int_{\mathbb{R}^p} p(x(k)|x(k-1))p(x(k-1)|B_{1:k-1})dx(k-1), \quad (8)$$

其中 $p(x(k)|x(k-1)) = \mathcal{N}[x(k); Ax(k-1), C_u]$.

$[C_q]$ 校正. 当融合中心接收到新的量化观测 B_k 时, 根据贝叶斯原理^[13], 即有

$$p(x(k)|B_{1:k}) = p(x(k)|B_{1:k-1}) \frac{P\{B_k|x(k), B_{1:k-1}\}}{P\{B_k|B_{1:k-1}\}}. \quad (9)$$

由于量化引入的非线性影响, 基于量化观测的贝叶斯最优估计算法计算复杂, 因此对状态后验分布 $p(x(k)|B_{1:k})$ 作高斯近似, 即

假设 1 在 k 时刻, 基于量化观测 $B_{1:k}$ 的状态后验分布 $p(x(k)|B_{1:k})$ 假定为高斯分布, 即

$$p(x(k)|B_{1:k}) = \mathcal{N}[x(k); \hat{x}(k|B_{1:k}), M(k|B_{1:k})]. \quad (10)$$

注 1 类似的假设见文献[7, 14], 当量化比特率比较大的时候, 模拟结果显示其基本成立.

量化卡尔曼滤波器的预测部分 $[P_q]$ 和校正部分 $[C_q]$ 是本文研究的核心问题, 即融合中心如何根据历史量化观测对当前状态进行预测? 当获得当前的量化观测后, 如何对状态预测进行校正? 进一步, 当得到状态的最优估计后, 如何分析量化卡尔曼滤波器的稳定性与量化器以及量化比特率之间的关系?

3 动态 Lloyd-Max 量化器(Dynamic Lloyd-Max quantizer)

本节首先简介Lloyd-Max量化器的一些基本特征^[11, 12], 然后提出一种动态Lloyd-Max量化器更新方案.

3.1 Lloyd-Max 量化器(Lloyd-Max quantizer)

若信源 y 服从高斯分布, 设 $y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$, 则Lloyd-Max量化分区可表示为

$$\{\tau_i\}_{i=1}^{2^q-1} = F^{LM}(\mu_y, \sigma_y^2), \quad (11)$$

其具体实现见文献[12], 且其平均失真可表示为

$$D = \frac{K(q)\sigma_y^2}{4^q}, \quad (12)$$

其中 $K(q)$ 为一随 q 缓慢递增的收敛序列, $1 \leq K(q) \leq \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$, 由于其值变化不大, 亦可近似视其为常数.

3.2 动态 Lloyd-Max 量化器及其更新(Dynamic Lloyd-Max quantizer and update)

下面讨论动态Lloyd-Max量化器的具体设计问题.

设 $\{\tau_i^{(n)}(k)\}_{i=0}^{2^{q_n}}$ 表示传感器 n 在 k 时刻的量化阈值集, 其中 $\tau_0^{(n)}(k) = -\infty, \tau_{2^{q_n}}^{(n)}(k) = \infty$. 记 $R_i^{(n)}(k) := [\tau_i^{(n)}(k), \tau_{i+1}^{(n)}(k)]$, 则动态量化规则如下:

$$b_n(k) = i, \text{ iff } y_n(k) \in R_i^{(n)}(k), \quad (13)$$

其中量化输出 $i \in \{0, 1, \dots, 2^{q_n} - 1\}$.

在解码端, 解码器 n 根据接收到的 $b_n(k)$ 进行解码, 解码规则如下:

$$y_n(k) \in R_i^{(n)}(k), \text{ iff } b_n(k) = i. \quad (14)$$

为了得到动态更新的Lloyd-Max量化器, 采用局部量化卡尔曼滤波器的方式. 定义 $b_{1:k}^{(n)} := \{b_n(1), b_n(2), \dots, b_n(k)\}$, 则传感器 n 在 k 时刻基于局部量化观测集 $b_{1:k}^{(n)}$ 得到的最优状态估计为

$$\hat{x}(k|b_{1:k}^{(n)}) := E(x(k)|b_{1:k}^{(n)}) = \int_{\mathbb{R}^p} x(k)p(x(k)|b_{1:k}^{(n)})dx(k), \quad (15)$$

且局部估计误差协方差阵为

$$M(k|b_{1:k}^{(n)}) := E\{[x(k) - \hat{x}(k|b_{1:k}^{(n)})][x(k) - \hat{x}(k|b_{1:k}^{(n)})]^T | b_{1:k}^{(n)}\}. \quad (16)$$

根据贝叶斯原理, 传感器 n 的局部量化卡尔曼滤波器($[P_{lq}]$ - $[C_{lq}]$)可以表述如下:

$[P_{lq}]$ 预测. 在 k 时刻, 假定 $\hat{x}(k-1|b_{1:k-1}^{(n)})$ 和 $M(k-1|b_{1:k-1}^{(n)})$ 已经得到, 同假设1类似, 对状态后验分布 $p(x(k-1)|b_{1:k-1}^{(n)})$ 作高斯近似, 即

$$p(x(k-1)|b_{1:k-1}^{(n)}) = \mathcal{N}[x(k-1); \hat{x}(k-1|b_{1:k-1}^{(n)}), M(k-1|b_{1:k-1}^{(n)})]. \quad (17)$$

根据系统模型(1)则有

$$p(x(k)|b_{1:k-1}^{(n)}) = \mathcal{N}[x(k); \hat{x}(k|b_{1:k-1}^{(n)}), M(k|b_{1:k-1}^{(n)})], \quad (18)$$

其中:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k|b_{1:k-1}^{(n)}) &= A\hat{x}(k-1|b_{1:k-1}^{(n)}), \\ M(k|b_{1:k-1}^{(n)}) &= AM(k-1|b_{1:k-1}^{(n)})A^T + C_u. \end{aligned} \quad (19)$$

$[C_{lq}]$ 校正. 当传感器的量化观测为 $b_n(k)$ 得到后, 有

$$p(x(k)|b_{1:k}^{(n)}) = \mathcal{N}[x(k); \hat{x}(k|b_{1:k-1}^{(n)}), M(k|b_{1:k-1}^{(n)})] \cdot \frac{P\{b_n(k)|x(k), b_{1:k-1}^{(n)}\}}{P\{b_n(k)|b_{1:k-1}^{(n)}\}}. \quad (20)$$

传感器 n 的动态Lloyd-Max量化器更新规则如下所述:

在系统初始时刻 $k=0$ 时, 由于已知 $x(0) \sim \mathcal{N}(x_0, M_0)$, 则根据系统模型(1)和(2), 对下一时刻的观测 $y_n(1)$ 有先验预测

$$p(y_n(1)) = \mathcal{N}[y_n(1); \mu_{y_n(1)}, \sigma_{y_n(1)}^2], \quad (21)$$

其中: $\mu_{y_n(1)} = hAx_0$, $\sigma_{y_n(1)}^2 = h(AM_0A^T + C_u)h^T + \sigma_n^2$.

因此, 在编码端, 传感器 n 可根据式(11)和式(21)初始化编码器 n 在观测时刻 $k=1$ 的Lloyd-Max量化分区, 即

$$\{\tau_i^{(n)}(1)\}_{i=1}^{2^{q_n}-1} = F_n^{\text{LM}}(\mu_{y_n(1)}, \sigma_{y_n(1)}^2), \quad (22)$$

其中 $F_n^{\text{LM}}(\cdot)$ 表示传感器 n 的Lloyd-Max量化分区生成函数. 在解码端, 融合中心亦可根据式(22)初始化对应的解码器 n .

当 $k \geq 1$ 时, 在编码端, 传感器 n 首先对观测 $y_n(k)$ 量化得到 $b_n(k)$ 并发送出去, 然后根据 $b_n(k)$ 运行局部量化卡尔曼滤波的校正算法 $[C_{lq}]$ 得到 $\hat{x}(k|b_{1:k}^{(n)})$ 和 $M(k|b_{1:k}^{(n)})$, 其具体校正算法将在下一节详细讨论.

当传感器获得 $\hat{x}(k|b_{1:k}^{(n)})$ 和 $M(k|b_{1:k}^{(n)})$ 后, 根据局

部量化卡尔曼滤波器的预测 $[P_{lq}]$ 即可得

$$\begin{aligned} p(x(k+1)|b_{1:k}^{(n)}) &= \mathcal{N}[x(k+1); \hat{x}(k+1|b_{1:k}^{(n)}), M(k+1|b_{1:k}^{(n)})], \end{aligned} \quad (23)$$

其中:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1|b_{1:k}^{(n)}) &= A\hat{x}(k|b_{1:k}^{(n)}), \\ M(k+1|b_{1:k}^{(n)}) &= AM(k|b_{1:k}^{(n)})A^T + C_u. \end{aligned} \quad (24)$$

又根据式(23)以及观测模型(2)即有

$$\begin{aligned} p(y_n(k+1)|b_{1:k}^{(n)}) &= \mathcal{N}[y_n(k+1); h\hat{x}(k+1|b_{1:k}^{(n)}), \\ &hM(k+1|b_{1:k}^{(n)})h^T + \sigma_n^2]. \end{aligned} \quad (25)$$

因此, 传感器 n 可根据式(11)和式(25)对编码器 n 进行更新, 确定其下一个时刻 $k+1$ 的Lloyd-Max量化分区, 即

$$\begin{aligned} \{\tau_i^{(n)}(k+1)\}_{i=1}^{2^{q_n}-1} &= F_n^{\text{LM}}(h\hat{x}(k+1|b_{1:k}^{(n)}), hM(k+1|b_{1:k}^{(n)})h^T + \sigma_n^2). \end{aligned} \quad (26)$$

在解码端, 融合中心亦可基于接收到的新的量化观测 $b_n(k)$ 运行局部量化卡尔曼滤波器算法, 并对解码器 n 进行更新, 为下一时刻的量化作准备, 具体步骤同编码器一致.

传感器 n 的动态Lloyd-Max量化器更新过程可用图4表示.

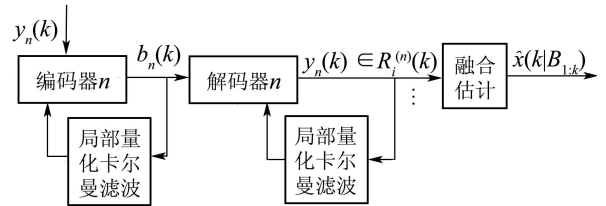


图4 传感器 n 的动态Lloyd-Max量化器更新示意图
Fig. 4 Update of dynamic Lloyd-Max quantizer for sensor- n

为了简化分析, 对于局部量化卡尔曼滤波器的校正部分 $[C_{lq}]$ 的解, 下面将结合融合中心的全局量化卡尔曼滤波问题一起进行讨论.

4 基于量化观测的卡尔曼滤波器(Kalman filtering based on quantized observations)

首先回顾一下无量化效应时的卡尔曼滤波问题.

4.1 基于分布式观测的卡尔曼滤波器(Kalman filtering based on distributed observations)

假设融合中心接收到的为未量化的观测, 即 $B_k = \{y_1(k), y_2(k), \dots, y_N(k)\}$, 则量化卡尔曼滤波器即简化为标准卡尔曼滤波器^[13, 15].

定义:

$$Y(k) := [y_1(k) \ y_2(k) \ \dots \ y_N(k)]^T,$$

$$\begin{aligned} Y_{1:k} &:= \{Y(1), Y(2), \dots, Y(k)\}, \\ \hat{x}(k|Y_{1:k}) &:= E\{x(k)|Y_{1:k}\}, \\ M(k|Y_{1:k}) &:= \\ E\{[x(k) - \hat{x}(k|Y_{1:k})][x(k) - \hat{x}(k|Y_{1:k})]^T\}. \end{aligned} \quad (27)$$

基于分布式观测 $Y(k)$ 的卡尔曼滤波器 (\mathbf{P}_{kf}]- \mathbf{C}_{kf}) 可表示为:

\mathbf{P}_{kf} 预测. 假设 k 时刻 $\hat{x}(k-1|Y_{1:k-1})$ 和 $M(k-1|Y_{1:k-1})$ 已获得, 则有:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k|Y_{1:k-1}) &= A\hat{x}(k-1|Y_{1:k-1}), \\ M(k|Y_{1:k-1}) &= AM(k-1|Y_{1:k-1})A^T + C_u. \end{aligned} \quad (28)$$

\mathbf{C}_{kf} 校正. 记

$$\varphi := \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n^2}, \quad \phi := \frac{1}{\varphi} \left[\frac{1}{\sigma_1^2} \quad \frac{1}{\sigma_2^2} \quad \dots \quad \frac{1}{\sigma_N^2} \right], \quad (29)$$

则基于观测 $Y_{1:k}$ 对状态 $x(k)$ 的贝叶斯最优估计可表示为

$$\begin{aligned} \hat{x}(k|Y_{1:k}) &= \hat{x}(k|Y_{1:k-1}) + \\ &g(k)[\phi Y(k) - h\hat{x}(k|Y_{1:k-1})], \\ M(k|Y_{1:k}) &= M(k|Y_{1:k-1}) - g(k)hM(k|Y_{1:k-1}), \end{aligned} \quad (30)$$

其中增益

$$g(k) = \frac{M(k|Y_{1:k-1})h^T}{hM(k|Y_{1:k-1})h^T + 1/\varphi}. \quad (31)$$

\mathbf{C}_{kf} 的证明见附录 1.

4.2 量化卡尔曼滤波器 (Quantized Kalman filtering)

下面研究融合中心的量化卡尔曼滤波问题.

在 k 时刻, 假设融合中心已经得到 $k-1$ 时刻状态的最优估计 $\hat{x}(k-1|B_{1:k-1})$ 和估计误差协方差阵 $M(k-1|B_{1:k-1})$, 则根据假设 1 和系统模型 (1), 有

$$\begin{aligned} p(x(k)|B_{1:k-1}) &= \\ \mathcal{N}[x(k); \hat{x}(k|B_{1:k-1}), M(k|B_{1:k-1})], \end{aligned} \quad (32)$$

其中:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k|B_{1:k-1}) &= A\hat{x}(k-1|B_{1:k-1}), \\ M(k|B_{1:k-1}) &= AM(k-1|B_{1:k-1})A^T + C_u. \end{aligned} \quad (33)$$

式 (32) 和式 (33) 给出了量化卡尔曼滤波器预测部分 \mathbf{P}_q 的解, 下面研究其校正部分的问题.

根据 $Y(k)$ 的定义以及式 (32), 可得

$$\begin{aligned} p(Y(k)|B_{1:k-1}) &= \\ \mathcal{N}[Y(k); H\hat{x}(k|B_{1:k-1}), HM(k|B_{1:k-1})H^T + R], \end{aligned} \quad (34)$$

其中: $H = [h^T \dots h^T]^T$, $H \in \mathbb{R}^{N \times p}$, $R = \text{diag}\{\sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2\}$.

下面的定理 1 给出了量化卡尔曼滤波器校正部分 \mathbf{C}_q 的解.

定理 1 考虑系统模型 (1) 和 (2) 以及式 (13) 中定义的 $b_n(k)$, 在 k 时刻, 设融合中心接收到的量化观测集为 B_k , 则有

$$\begin{aligned} \hat{x}(k|B_{1:k}) &= \hat{x}(k|B_{1:k-1}) + \\ &\bar{g}(k)[\phi \hat{Y}(k|B_{1:k-1}, B_k) - h\hat{x}(k|B_{1:k-1})], \end{aligned} \quad (35)$$

且误差协方差阵为

$$\begin{aligned} M(k|B_{1:k}) &= M(k|B_{1:k-1}) - \bar{g}(k)hM(k|B_{1:k-1}) + \\ &\lambda(k)\bar{g}(k)\bar{g}^T(k), \end{aligned} \quad (36)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{g}(k) &= \frac{M(k|B_{1:k-1})h^T}{hM(k|B_{1:k-1})h^T + 1/\varphi}, \\ \hat{Y}(k|B_{1:k-1}, B_k) &= E\{Y(k)|B_{1:k-1}, B_k\}, \\ \lambda(k) &= \phi \Delta_{Y(k)} \phi^T, \\ \Delta_{Y(k)} &= E\{\tilde{Y}(k)\tilde{Y}^T(k)|B_{1:k-1}\}, \\ \tilde{Y}(k) &= Y(k) - \hat{Y}(k|B_{1:k-1}, B_k). \end{aligned} \quad (37)$$

证 见附录 2.

注 2 定理 1 中量化卡尔曼滤波器的误差协方差阵 (36) 可分为两部分: 前两项为基于分布式观测的卡尔曼滤波器的误差协方差阵, 最后一项为量化引起的增量部分, 其中标量系数 $\lambda(k)$ 反映了量化效果, $\Delta_{Y(k)}$ 为量化误差协方差阵. 易知, 当 $\{q_n \rightarrow \infty\}_{n=1}^N$ 时, 则 $\hat{Y}(k|B_{1:k-1}, B_k) \rightarrow Y(k)$, 且 $\Delta_{Y(k)} \rightarrow 0$, $\lambda(k) \rightarrow 0$, 因此量化卡尔曼滤波器简化为分布式卡尔曼滤波器.

定理 1 给出了量化卡尔曼滤波器的最优解, 但是根据 $Y(k)$ 的预测分布式 (34) 可知, 对于式 (35) 中的 $\hat{Y}(k|B_{1:k-1}, B_k)$ 以及式 (36) 中 $\lambda(k)$ 的 $\Delta_{Y(k)}$, 其分别需要计算 N 维高斯先验分布的随机变量 $Y(k)$ 在给定量化的观测 B_k 下的条件均值和量化误差协方差阵, 当 N 比较大时, 解这类问题需要蒙特卡罗积分方法^[16], 运算负担较重.

下面给出一种渐近等价于定理 1 的 IQKF, 其简单易实现, 运算代价也因此降低.

定义量化观测集 $B_k^{1:n} := \{b_1(k), b_2(k), \dots, b_n(k)\}$, 且

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(n)}(k|B_{1:k-1}) &:= E\{x(k)|B_{1:k-1}, B_k^{1:n}\}, \\ M^{(n)}(k|B_{1:k-1}) &:= \\ E\{[x(k) - \hat{x}^{(n)}(k|B_{1:k-1})] \\ [x(k) - \hat{x}^{(n)}(k|B_{1:k-1})]^T | B_{1:k-1}, B_k^{1:n-1}\}, \end{aligned} \quad (38)$$

其中 $n = 0, 1, 2, \dots, N$, 且

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(0)}(k|B_{1:k-1}) &:= \hat{x}(k|B_{1:k-1}), \\ M^{(0)}(k|B_{1:k-1}) &:= M(k|B_{1:k-1}). \end{aligned} \quad (39)$$

同假设1类似, 对状态后验分布 $p(x(k)|B_{1:k-1}, B_k^{1:n})$ 作高斯近似, 即

$$p(x(k)|B_{1:k-1}, B_k^{1:n}) = \mathcal{N}[x(k); \hat{x}^{(n)}(k|B_{1:k-1}), M^{(n)}(k|B_{1:k-1})]. \quad (40)$$

根据上式即可得

$$p(y_{n+1}(k)|B_{1:k-1}, B_k^{1:n}) = \mathcal{N}[y_{n+1}(k); h\hat{x}^{(n)}(k|B_{1:k-1}), hM^{(n)}(k|B_{1:k-1})h^T + \sigma_{n+1}^2]. \quad (41)$$

迭代量化卡尔曼滤波器的预测部分同式(32)和式(33), 其校正部分由下面的定理2给出.

定理2 对于定理1中的量化卡尔曼滤波器的校正部分, 有如下渐近等价的迭代算法:

对迭代序列 $n = 1, 2, \dots, N$, 有

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(n)}(k|B_{1:k-1}) &= \hat{x}^{(n-1)}(k|B_{1:k-1}) + \\ &g^{(n)}(k)[\hat{y}_n(k|B_{1:k-1}, B_k^{1:n-1}, b_n(k)) - \\ &h\hat{x}^{(n-1)}(k|B_{1:k-1})], \end{aligned} \quad (42)$$

且误差协方差阵为

$$\begin{aligned} M^{(n)}(k|B_{1:k-1}) &= \\ &M^{(n-1)}(k|B_{1:k-1}) - g^{(n)}(k)hM^{(n-1)}(k|B_{1:k-1}) + \\ &\Delta_{y_n(k)}^{(n)}g^{(n)}(k)g^{(n)T}(k), \end{aligned} \quad (43)$$

其中:

$$\begin{aligned} g^{(n)}(k) &= \frac{M^{(n-1)}(k|B_{1:k-1})h^T}{hM^{(n-1)}(k|B_{1:k-1})h^T + \sigma_n^2}, \\ \hat{y}_n(k|B_{1:k-1}, B_k^{1:n-1}, b_n(k)) &= \\ &E[y_n(k)|B_{1:k-1}, B_k^{1:n-1}, b_n(k)], \\ \Delta_{y_n(k)}^{(n)} &= E\{\tilde{y}_n^2(k)|B_{1:k-1}, B_k^{1:n-1}\}, \\ \tilde{y}_n(k) &= y_n(k) - \hat{y}_n(k|B_{1:k-1}, B_k^{1:n-1}, b_n(k)). \end{aligned} \quad (44)$$

在每个采样周期, 融合中心迭代计算式(42)和式(43) N 次, 即可得 $\hat{x}(k|B_{1:k}) = \hat{x}^{(N)}(k|B_{1:k-1})$, $M(k|B_{1:k}) = M^{(N)}(k|B_{1:k-1})$.

证 见附录3.

注3 对于IQKF算法, 在每个采样周期, 融合中心每接收到一个传感器的量化观测, 即可对状态估计进行更新, 最终得到全局最优估计. 因此, 其在存在丢包或延迟的网络环境下亦适用, 融合中心在每个采样周期可以根据当前接收到的量化观测形成对状态当前的最优估计.

4.3 局部量化卡尔曼滤波器(Local quantized Kalman filtering)

传感器的编码器和融合中心的解码器的在线更新都需要通过局部量化卡尔曼滤波来实现. 式(18)

和式(19)给出了局部量化卡尔曼滤波器预测部分 $[P_{lq}]$ 的解, 而对于其校正部分 $[C_{lq}]$, 可根据定理1得到下面的推论.

推论1 考虑状态空间模型(1)和(2)以及式(13)中定义的 $b_n(k)$, 在 k 时刻, 假定传感器 n 和融合中心已经得到预测估计 $\hat{x}(k|b_{1:k-1}^{(n)})$ 和预测误差协方差阵 $M(k|b_{1:k-1}^{(n)})$, 则当传感器 n 和融合中心得到局部量化观测 $b_n(k)$ 后, 即有

$$\begin{aligned} \hat{x}(k|b_{1:k}^{(n)}) &= \hat{x}(k|b_{1:k-1}^{(n)}) + g_n(k)[\hat{y}_n(k|b_{1:k-1}^{(n)}, b_n(k)) - \\ &h\hat{x}(k|b_{1:k-1}^{(n)})], \end{aligned} \quad (45)$$

且其局部量化估计误差协方差阵为

$$\begin{aligned} M(k|b_{1:k}^{(n)}) &= M(k|b_{1:k-1}^{(n)}) - \\ &(1 - \frac{K(q_n)}{4^{q_n}})g_n(k)hM(k|b_{1:k-1}^{(n)}), \end{aligned} \quad (46)$$

其中:

$$\begin{aligned} g_n(k) &= \frac{M(k|b_{1:k-1}^{(n)})h^T}{hM(k|b_{1:k-1}^{(n)})h^T + \sigma_n^2}, \\ \hat{y}_n(k|b_{1:k-1}^{(n)}, b_n(k)) &= E[y_n(k)|b_{1:k-1}^{(n)}, b_n(k)]. \end{aligned} \quad (47)$$

证 根据定理1, 只需考虑单个传感器观测的特殊情形, 此时 $\phi = 1$, $\varphi = 1/\sigma_n^2$, 则由式(35)(36)即可得式(45)以及

$$\begin{aligned} M(k|b_{1:k}^{(n)}) &= M(k|b_{1:k-1}^{(n)}) - g_n(k)hM(k|b_{1:k-1}^{(n)}) + \\ &\Delta_{y_n(k)}g_n(k)g_n^T(k), \end{aligned} \quad (48)$$

其中

$$\Delta_{y_n(k)} = E\{[y_n(k) - \hat{y}_n(k|b_{1:k-1}^{(n)}, b_n(k))]^2|b_{1:k-1}^{(n)}\}. \quad (49)$$

又由式(18)可得

$$\begin{aligned} p(y_n(k)|b_{1:k-1}^{(n)}) &= \\ &\mathcal{N}[y_n(k); h\hat{x}(k|b_{1:k-1}^{(n)}), hM(k|b_{1:k-1}^{(n)})h^T + \sigma_n^2]. \end{aligned} \quad (50)$$

因此, 根据高斯信源的Lloyd-Max量化器平均失真表达式(12)即可得

$$\Delta_{y_n(k)} = \frac{K(q_n)(hM(k|b_{1:k-1}^{(n)})h^T + \sigma_n^2)}{4^{q_n}}. \quad (51)$$

把式(51)代入式(48), 化简即可得式(46). 证毕.

5 量化卡尔曼滤波器的稳定性(Stability of quantized Kalman filtering)

本节分析定理1中量化卡尔曼滤波器的稳定性问题. 定理1适用于任何采用标量量化器的量化卡尔曼滤波问题, 研究预测误差协方差阵 $M(k|B_{1:k-1})$ 的收敛性与量化器以及量化比特率的关系.

简记 $M_k^q := M(k|B_{1:k-1})$, 根据式(33)(36)可得

黎卡提方程

$$M_{k+1}^q = AM_k^q A^T + C_u - A\bar{g}(k)hM_k^q A^T + \lambda(k)A\bar{g}(k)\bar{g}^T(k)A^T, \quad (52)$$

其中: $k = 1, 2, \dots, \infty$, 初始值 $M_1^q = AM_0 A^T + C_u$.

对于 M_k^q , 下面给出一个定义:

定义 1 若 $\forall M_0 \succeq 0$, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k^q = M_\infty^q$, 其中 $M_\infty^q \succ 0$, 且与 M_0 无关, 则称 M_k^q 绝对收敛; 若 $\forall M_0 \succeq 0$, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k^q \prec +\infty$, 则称 M_k^q 绝对有界; 若 $\exists M_0 \succeq 0$, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k^q = +\infty$, 则称 M_k^q 条件发散.

黎卡提方程(52)中的 $\lambda(k)$ 反映了量化效果, 其与量化器以及各传感器的量化比特率有关. 众所周知, 若系统矩阵 A 稳定, 则 M_k^q 必绝对收敛或绝对有界^[15,17], 若系统矩阵 A 不稳定, 则 M_k^q 的收敛性与量化器以及量化比特率 $\{q_n\}_{n=1}^N$ 有关.

下面重点考虑 A 不稳定的情形, 分别对单传感器系统 ($N = 1$) 和多传感器系统 ($N \geq 1$) 的 M_k^q 的收敛性进行讨论.

5.1 单传感器系统(One-sensor system)

首先考虑网络中只存在一个传感器观测的情形, 即 $N = 1$. 不失一般性, 设此时的观测为传感器 n 的观测, 量化比特率为 q_n 位.

记标量系数 $\alpha := 1 - \frac{K(q_n)}{4^{q_n}}$, 函数 $g_n(M) := \frac{Mh^T}{hMh^T + \sigma_n^2}$, 则有下面的定理.

定理 3 假定 $(A, C_u^{\frac{1}{2}})$ 能控, (A, h) 能观, A 不稳定, $N = 1$, 则在动态 Lloyd-Max 量化器下, M_k^q 绝对收敛的充要条件为

$$\frac{K(q_n)}{4^{q_n}} < \frac{1}{\prod_i |\lambda_i^u|^2}, \quad (53)$$

其中 $\{\lambda_i^u\}$ 为 A 的不稳定特征值集合, 则其绝对收敛的临界比特率可表示为

$$q_c = \min\{q \mid \frac{K(q)}{4^q} < \frac{1}{\prod_i |\lambda_i^u|^2}, q > 0, q \in \mathbb{Z}\}, \quad (54)$$

即若 $q_n \geq q_c$, 则 M_k^q 绝对收敛, 且唯一正定收敛值 M_∞^q 可由 $M = AMA^T + C_u - \alpha Ag_n(M)hMA^T$ 解得; 若 $q_n < q_c$, 则 M_k^q 条件发散.

证 在单传感器观测下, 传感器的局部量化卡尔曼滤波即为融合中心的量化卡尔曼滤波, 因此根据式(19)以及推论1中的式(46), 式(52)可简化为

$$M_{k+1}^q = AM_k^q A^T + C_u - \alpha Ag_n(M)hM_k^q A^T, \quad (55)$$

这里 M_k^q 表示单传感器观测下的预测误差协方差阵, 即 $M_k^q = M(k|b_{1:k-1}^{(n)})$.

对于黎卡提方程(55), 其收敛性已有相关的结

论^[17~19]. 根据 Elia^[19], 由于 $(A, C_u^{\frac{1}{2}})$ 能控, (A, h) 能观, A 不稳定, 且 $\text{rank}(h) = 1$, 因此其绝对收敛的充要条件为

$$\alpha > 1 - \frac{1}{\prod_i |\lambda_i^u|^2}, \quad (56)$$

即为式(53). 定理3中其他相关结论亦可根据文献[17~19]得到. 证毕.

注 4 在单传感器观测下, Lloyd-Max 量化器在极小化均方误差意义上实际上是最优量化器^[7], 这亦可从单传感器观测下的误差协方差阵(48)可看出, 极小化均方误差等价于极小化观测的平均失真.

注 5 若视 $K(q) = K$ 为常数, 则 M_k^q 绝对收敛的临界比特率为 $\frac{1}{2} \log_2 K \prod_i |\lambda_i^u|^2$, 其与系统矩阵的不稳定特征值以及量化器性能指标 K 有关. 从信息论^[20]的角度看, K 的理论最小值为 1, 则可简化为 $q_c = \log_2 \prod_i |\lambda_i^u|$, 这与文献[9, 10]的结论是一致的, 但是 $K = 1$ 需对信号分块编码且块长为无穷大的时候才能达到, 对于本文的实时目标跟踪系统, 这是难以实现的, 因此本文的临界比特率不仅与系统矩阵的不稳定特征值有关, 亦与量化器性能指标 K 有关.

5.2 多传感器系统(Multi-sensor system)

现在分析多传感器下 ($N \geq 1$) 黎卡提方程(52)的收敛性问题. 设网络中的总比特率为 Q , $Q = \sum_{n=1}^N q_n$, 其中 $Q \geq 0$, $Q \in \mathbb{Z}$. 首先不限定量化器的具体形式, 则有如下定理.

定理 4 假定 $(A, C_u^{\frac{1}{2}})$ 能控, (A, h) 能观, A 不稳定, $N \geq 1$, 则对任何标量量化器, M_k^q 绝对有界的必要条件为

$$\frac{K(Q)}{4^Q} < \frac{1}{\prod_i |\lambda_i^u|^2}. \quad (57)$$

上述必要条件亦等价于 $Q \geq q_c$.

证 见附录4.

注 6 定理4说明在多传感器系统中, 对任何标量量化器, M_k^q 绝对有界所需的最小总比特率亦不会低于 q_c , 亦即传感器数目增加不能降低黎卡提方程(52)稳定的临界总比特率, 其仍然只与系统矩阵的不稳定特征值以及 $K(q)$ 有关.

注 7 由定理4的证明可知, 由于 $Y'(k) = \phi Y(k)$, 若对 $Y'(k)$ 采用 Lloyd-Max 量化器, 则式(A25)取等号, 因此 $\forall k$, 有 $M_k^q = Z_k$, 此时定理4中的必要条件则为充要条件, 且此时的量化器在均方误差意义上为最优量化器, 但由于 $Y'(k)$ 为各传感器观测的线性组合, 若 $N = 1$, 则 $Y'(k)$ 为一维观测, 定理4退化为定理3, 若 $N > 1$, 则需要对传感器的观测进行联合编码才能实现.

在分布式量化卡尔曼滤波问题中, 传感器需要独立编码各自的观测. 对于本文提出的动态Lloyd-Max量化器, 根据定理3易得下面的推论.

推论 2 假定 $(A, C_u^{\frac{1}{2}})$ 能控, (A, h) 能观, A 不稳定, $N \geq 1$, 则在动态Lloyd-Max量化器下, M_k^q 绝对有界的充要条件为 $\exists n \in \{1, 2, \dots, N\}$, 有 $q_n \geq q_c$.

证 充分性. 若 $\exists n \in \{1, 2, \dots, N\}$, 有 $q_n \geq q_c$, 则根据定理3, 由于 $(A, C_u^{\frac{1}{2}})$ 能控, (A, h) 能观, A 不稳定, 则至少一个传感器的量化观测可以使 M_k^q 绝对有界, 又根据激活的传感器数目增加 M_k^q 必降低的事实, 可知 M_k^q 必绝对有界.

必要性(反证法). 若 $\forall n$, 有 $q_n < q_c$, 则根据定理3和文献[18], 由于 $(A, C_u^{\frac{1}{2}})$ 能控, (A, h) 能观, A 不稳定, 可知 $\exists M_0$, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} M(k|b_{1:k-1}^{(n)}) = +\infty, \forall n$, 而根据动态Lloyd-Max量化器更新规则, 可知此时所有传感器的量化分区将随 k 增加而趋于无穷大, 量化失真亦将趋于无穷大, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(k) = +\infty$, 又根据黎卡提方程(52), 可知 $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k^q = +\infty$, 这与 M_k^q 绝对有界矛盾. 证毕.

6 仿真结果(Simulation results)

本节将通过MATLAB仿真验证文中所设计算法的可行性和有效性. 考虑下面的二维目标跟踪系统:

$$x(k) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k-1) + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} u(k). \quad (58)$$

上述系统实际为一常速运动模型, 其中: 状态向量 $x(k) := [s(k) \ \dot{s}(k)]^T$, $s(k)$ 和 $\dot{s}(k)$ 分别为目标位置和速度, T 为采样周期, 驱动噪声为 $u(k)$.

传感器的观测模型为

$$y_n(k) = [1 \ 0]x(k) + v_n(k), \quad n = 1, 2, \quad (59)$$

其中: $v_1(k) \sim \mathcal{N}(0, 1), v_2(k) \sim \mathcal{N}(0, 2)$.

在全部仿真试验中, 系统初始条件设为 $x(0) \sim \mathcal{N}(x_0, M_0)$, 其中 $x_0 = (0, 5)^T, M_0 = 0.3I_2$, 驱动噪声 $u(k) \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 采样周期 $T = 0.1$ s. 对于均方误差(MSE), 本文采用5000次蒙特卡罗仿真结果取平均值得到.

本文分析基于动态Lloyd-Max量化器的IQKF在不同带宽限制下的估计性能. 根据目标运动模型(58)和推论2可知 M_k^q 绝对有界的临界比特率 $q_c = 1$ 位. 图5给出IQKF-1位和IQKF-2位以及基于未量化观测的分布式卡尔曼滤波器(KF)的理论和实际MSE曲线比较. IQKF-1位和IQKF-2位分别指两个传感器的量化比特率均为1位和均为2位的情形. 图5(a)为理论MSE比较, 图5(b)为实际MSE比较. IQKF和KF的理论MSE分别通过文中 $M^{(N)}(k|B_{1:k-1})$ 和 $M(k|Y_{1:k})$ 的显示解得到, 实际MSE指状态估计和

状态真实值之间的均方误差.

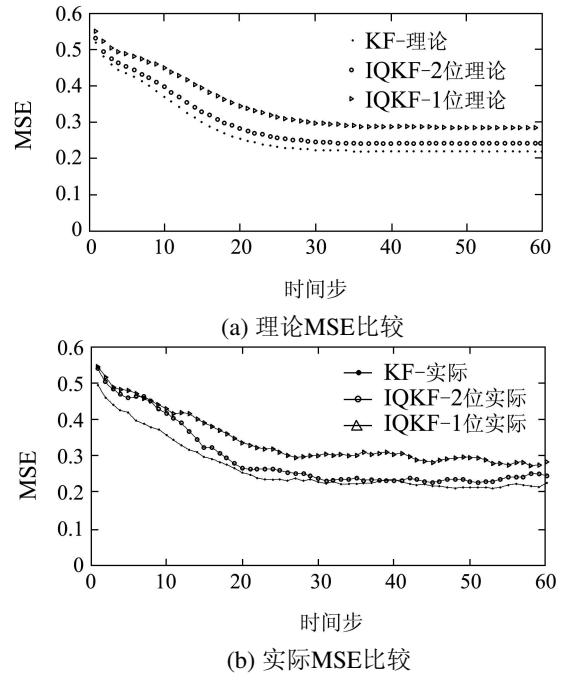


图5 各种滤波器的理论MSE和实际MSE比较
Fig. 5 Comparison of theoretical MSE and empirical MSE for various filters

从图5(a)和图5(b)可以看出, 分布式卡尔曼滤波器(KF)的MSE为IQKF的MSE的理论不可达下界, 且IQKF-2位的MSE小于IQKF-1位的MSE, 这说明量化比特率愈大, IQKF估计性能愈好. 另外, 由于都存在某个传感器的量化比特率不小于 q_c , 因此随着 k 增加, IQKF-1位和IQKF-2位的MSE都趋于稳定. IQKF在量化比特率都为最小的1位时都能很好的跟踪目标, 这说明了IQKF的高效性.

图6给出了IQKF的理论MSE和实际MSE曲线比较. 从图6可以看出, 不同量化比特率下IQKF的理论MSE和实际MSE都很接近, 这说明文中所得 $M^{(N)}(k|B_{1:k-1})$ 的显示解的有效性. 另外, IQKF-2位的MSE差异比IQKF-1位的MSE差异更小, 这是因为量化比特率愈大, 文中对状态后验分布的高斯近似愈与实际相符, 因此理论MSE和实际MSE愈接近.

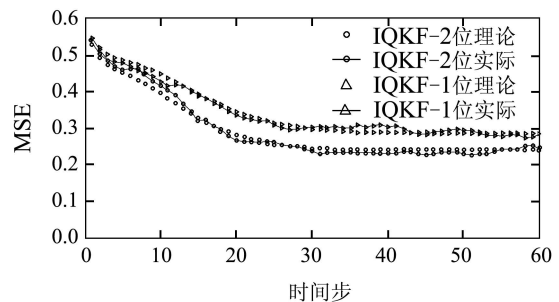


图6 IQKF的理论MSE和实际MSE比较
Fig. 6 Comparison of theoretical MSE and empirical MSE for IQKF

为了更好地分析本文提出的 IQKF 算法的性能, 本文对 IQKF 和 Sun 等^[8]提出的 QKFQI(quantized Kalman filter based on quantized innovations)算法的估计性能进行了比较, 其中 QKFQI 采用均匀量化器, 且量化器的更新需要融合中心反馈预测信息. 图 7 给出了 IQKF-2 位和 QKFQI-2 位算法的实际 MSE 曲线比较, 从图 7 可以看出, 本文的 IQKF 估计器性能优于 QKFQI, 且由于本文的动态 Lloyd-Max 量化器更新过程无需融合中心的反馈信息, 因此通信代价亦得到节省.

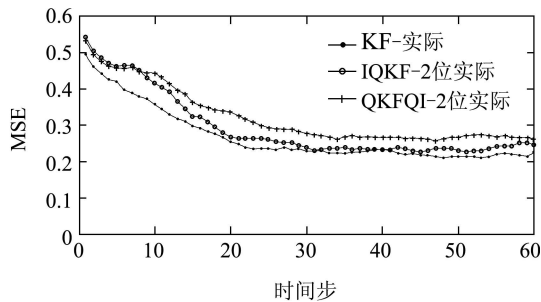


图 7 IQKF 和 QKFQI 的实际 MSE 比较

Fig. 7 Comparison of empirical MSE for IQKF and QKFQI

7 结论(Conclusions)

本文基于无线传感器网络研究了分布式量化卡尔曼滤波问题. 提出了一种新的动态 Lloyd-Max 量化器并设计了其在线更新方案, 基于贝叶斯原理得到了递归形式的最优化卡尔曼滤波器, 并与标准卡尔曼滤波器进行了比较, 同时给出了一种渐近等价的迭代算法(IQKF). 对于不稳定系统, 量化卡尔曼滤波器稳定的临界比特率由量化器以及系统矩阵的不稳定特征值决定, 与传感器数目和观测噪声无关. 动态 Lloyd-Max 量化器更新无需融合中心的反馈信息, 通信代价小、适用性强. IQKF 算法运算代价低, 且存在丢包或延迟的网络环境中亦适用. 因此, 本文所提出的设计方法能得到较广泛的应用.

参考文献(References):

- [1] GUBNER J A. Distributed estimation and quantization[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1993, 39(4): 1456 – 1459.
- [2] LI J L, ALREGIB G. Distributed estimation in energy-constrained wireless sensor networks[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(10): 3746 – 3758.
- [3] ZHANG K S, LI X R. Optimal sensor data quantization for best linear unbiased estimation fusion[C] // *The 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 2004: 2656 – 2661.
- [4] MARIC I, YATES R D. Bandwidth and power allocation for cooperative strategies in Gaussian relay networks[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(4): 1880 – 1889.
- [5] KHAN U A, MOURA J M F. Distributing the Kalman filter for large-scale systems[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(10): 4919 – 4935.
- [6] RIBEIRO A, GIANNAKIS G B, ROUMELIOTIS S I. SOI-KF: distributed Kalman filtering with low-cost communications using the

sign of innovations[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(12): 4782 – 4795.

- [7] MSECHU E J, ROUMELIOTIS S I, RIBEIRO A, et al. Decentralized quantized Kalman filtering with scalable communication cost[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(8): 3727 – 3741.
- [8] SUN S L, LIN J Y, XIE L, et al. Quantized kalman filtering[C] // *The 22nd IEEE International Symposium on Intelligent Control Part of IEEE Multi-conference on Systems and Control*. New York: IEEE, 2007: 7–12.
- [9] NAIR G N, EVANS R J. Exponential stabilisability of finite-dimensional linear systems with limited data rates[J]. *Automatica*, 2003, 39(4): 585 – 593.
- [10] TATIKONDA S, MITTER S. Control under communication constraints[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(7): 1056 – 1068.
- [11] MAX J. Quantizing for minimum distortion[J]. *IRE Transactions on Information Theory*, 1960: 7 – 12.
- [12] LLOYD S P. Least squares quantization in PCM[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1982, 28(2): 129 – 137.
- [13] KAY S M. *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*[M]. Engle-wood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993.
- [14] ITO K, XIONG K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(5): 910 – 927.
- [15] KAILATH T, SAYED A H, HASSIBI B. *Linear Estimation*[M]. Engle-wood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2000.
- [16] GILKS W R, RICHARDSON S, SPIEGELHALTER D J, et al. *Markov Chain Monte Carlo in Practice*[M]. London: Chapman & Hall, 1995.
- [17] SINOPOLI B, SCHENATO L, FRANCESCHETTI M, et al. Kalman filtering with intermittent observations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1453 – 1464.
- [18] KATAYAMA T. On the matrix riccati equation for linear systems with a random gain[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, 21(5): 770 – 771.
- [19] ELIA N. Remote stabilization over fading channels[J]. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(3): 237 – 249.
- [20] COVER T M, THOMAS J A. *Elements of Information Theory*[M]. Cambridge: John Wiley & Sons, 1991.

附录 1 $[C_{k,f}]$ 的证明(Proof of $[C_{k,f}]$)

证 根据 $Y(k)$ 的定义, 有

$$Y(k) = Hx(k) + V(k), \quad (A1)$$

其中: $H = [h^T \ h^T \ \dots \ h^T]^T$, $H \in \mathbb{R}^{N \times p}$, $V(k) = [v_1(k) \ \dots \ v_N(k)]^T$, 且 $V(k) \sim \mathcal{N}(0, R)$, $R = \text{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2\}$.

因此, 根据标准卡尔曼滤波理论^[13,15], 可得

$$\begin{aligned} \hat{x}(k|Y_{1:k}) &= \hat{x}(k|Y_{1:k-1}) + G(k)[Y(k) - H\hat{x}(k|Y_{1:k-1})], \\ M(k|Y_{1:k}) &= M(k|Y_{1:k-1}) - G(k)HM(k|Y_{1:k-1}), \end{aligned} \quad (A2)$$

其中:

$$\begin{aligned} G(k) &= M(k|Y_{1:k-1})H^T C_Y^{-1}(k), \\ C_Y(k) &= HM(k|Y_{1:k-1})H^T + R. \end{aligned}$$

现在来化简 $G(k)$, 为方便简记 $M_k := M(k|Y_{1:k-1})$.

由于 $C_Y(k) = HM_k H^T + R$, 则

$$C_Y(k) = \begin{pmatrix} hM_k h^T + \sigma_1^2 & \dots & hM_k h^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ hM_k h^T & \dots & hM_k h^T + \sigma_N^2 \end{pmatrix}, \quad (A3)$$

令 $\psi = \prod_{n=1}^N \sigma_n^2$, 则经行列变换化简 $|C_{Y(k)}|$ 可得

$$|C_{Y(k)}| = \psi(hM_k h^T \varphi + 1), \tag{A4}$$

故

$$C_{Y(k)}^{-1} = \frac{1}{|C_{Y(k)}|} \times \begin{bmatrix} M_{11}(k) & -M_{21}(k) & \cdots & (-1)^{1+N} M_{N1}(k) \\ -M_{12}(k) & M_{22}(k) & \cdots & (-1)^{2+N} M_{N2}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{N+1} M_{1N}(k) & (-1)^{N+2} M_{2N}(k) & \cdots & M_{NN}(k) \end{bmatrix}, \tag{A5}$$

其中 $M_{ij}(k)$ 为 $C_{Y(k)}$ 中去除第 i 行和第 j 列的余子式, 且由行列变换以及式(A4)可得:

$$M_{ii}(k) = \frac{\psi}{\sigma_i^2} [hM_k h^T (\varphi - \frac{1}{\sigma_i^2}) + 1], \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$M_{ij}(k) = (-1)^{i+j-1} \frac{hM_k h^T \psi}{\sigma_i^2 \sigma_j^2}, \quad i \neq j. \tag{A6}$$

根据式(A4)(A5)和式(A6), 即可得

$$H^T C_{Y(k)}^{-1} = \frac{h^T \varphi \phi}{hM_k h^T \varphi + 1}, \tag{A7}$$

则

$$G(k) = \frac{M_k h^T \varphi \phi}{hM_k h^T \varphi + 1} = g(k)\phi. \tag{A8}$$

现在, 代入式(A8)到式(A2)中, 由于 $\phi H = h$, 即得

$$\hat{x}(k|Y_{1:k}) = \hat{x}(k|Y_{1:k-1}) + g(k)[\phi Y(k) - h\hat{x}(k|Y_{1:k-1})],$$

$$M(k|Y_{1:k}) = M(k|Y_{1:k-1}) - g(k)hM(k|Y_{1:k-1}).$$

证毕.

附录2 定理1的证明(Proof of Theorem 1)

在证明之前, 首先给出一个引理.

引理1 对随机变量 x, y, z , 若形成马尔可夫链 $x \rightarrow y \rightarrow z$, 则有 $E(x|z) = E(E(x|y)|z)$.

证 首先有 $E(x|y) = \int xp(x|y)dx := g(y)$, 则

$$E(E(x|y)|z) = E(g(y)|z) = \int g(y)p(y|z)dy = \iint xp(x|y)p(y|z)dx dy. \tag{A9}$$

又由马克可夫链 $x \rightarrow y \rightarrow z$, 则可知 $p(x|y) = p(x|y, z)$, 故式(A9)即化为

$$E(E(x|y)|z) = \iint xp(x|y, z)p(y|z)dx dy = \iint xp(x, y|z)dx dy = \int x \int p(x, y|z)dy dx = \int xp(x|z)dx = E(x|z), \tag{A10}$$

证毕.

现在来证明定理1.

证 根据定义易知 $x(k) \rightarrow \{B_{1:k-1}, Y(k)\} \rightarrow B_{1:k}$, 于是由引理1即可得

$$\hat{x}(k|B_{1:k}) = E(x(k)|B_{1:k}) =$$

$$E\{E(x(k)|B_{1:k-1}, Y(k))|B_{1:k}\}. \tag{A11}$$

又由式(32)可知式(A11)右边项的内部期望等价于分布式卡尔曼滤波器校正部分 $[C_{kf}]$ 的状态估计, 定义

$$\hat{x}_{k|k}^* := E[x(k)|B_{1:k-1}, Y(k)], \tag{A12}$$

则有

$$\hat{x}_{k|k}^* = \hat{x}(k|B_{1:k-1}) + \bar{g}(k)[\phi Y(k) - h\hat{x}(k|B_{1:k-1})]. \tag{A13}$$

又根据式(A11)和式(A13), 即得

$$\hat{x}(k|B_{1:k}) = E\{\hat{x}(k|B_{1:k-1}) + \bar{g}(k)[\phi Y(k) - h\hat{x}(k|B_{1:k-1})]|B_{1:k-1}, B_k\} = \hat{x}(k|B_{1:k-1}) + \bar{g}(k)[\phi \hat{Y}(k|B_{1:k-1}, B_k) - h\hat{x}(k|B_{1:k-1})], \tag{A14}$$

故式(35)得证.

现在来证明式(36). 首先根据式(A13)和式(A14), 可重写

$x(k) - \hat{x}(k|B_{1:k})$ 为

$$x(k) - \hat{x}(k|B_{1:k}) = x(k) - \hat{x}_{k|k}^* + \hat{x}_{k|k}^* - \hat{x}(k|B_{1:k}) = x(k) - \hat{x}_{k|k}^* + \bar{g}(k)\phi \tilde{Y}(k). \tag{A15}$$

又根据 $M(k|B_{1:k})$ 的定义, 可得

$$M(k|B_{1:k}) = E\{[x(k) - \hat{x}_{k|k}^* + \bar{g}(k)\phi \tilde{Y}(k)][x(k) - \hat{x}_{k|k}^* + \bar{g}(k)\phi \tilde{Y}(k)]^T | B_{1:k-1}\}. \tag{A16}$$

对上式右边项展开, 由于 $B_{1:k-1}$ 给定时, $\bar{g}(k)$ 亦给定, 且根据垂直原理^[13], 即有 $[x(k) - \hat{x}_{k|k}^*] \perp \tilde{Y}(k)$, 又 $E[x(k) - \hat{x}_{k|k}^*] = 0$, 因此展开项的交叉项等于0, 式(A16)可化简为

$$M(k|B_{1:k}) = E\{[x(k) - \hat{x}_{k|k}^*][x(k) - \hat{x}_{k|k}^*]^T | B_{1:k-1}\} + \bar{g}(k)\phi \Delta_{Y(k)} \phi^T \bar{g}^T(k). \tag{A17}$$

又由式(32)可知上式右边第1项等价于分布式卡尔曼滤波器校正部分 $[C_{kf}]$ 的误差协方差阵, 且根据 $\lambda(k)$ 的定义, 得

$$M(k|B_{1:k}) = M(k|B_{1:k-1}) - \bar{g}(k)hM(k|B_{1:k-1}) + \lambda(k)\bar{g}(k)\bar{g}^T(k), \tag{A18}$$

式(36)即得证. 证毕.

附录3 定理2的证明(Proof of Theorem 2)

在证明之前, 需要一个引理.

引理2 考虑随机变量 x , 设其先验概率密度函数为 $p(x)$, 若观测集 $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_N]$, 则有

$$p(x|B) = p(x) \times \frac{p(b_1|x)}{p(b_1)} \times \frac{p(b_2|b_1, x)}{p(b_2|b_1)} \times \dots \times \frac{p(b_N|b_{N-1}, \dots, b_1, x)}{p(b_N|b_{N-1}, \dots, b_1)}. \tag{A19}$$

证 根据贝叶斯原理, 有 $p(x|B) = \frac{p(x, B)}{p(B)}$, 对右边项分子分母展开即得式(A19). 证毕.

现在来证明定理2.

证 根据引理2, 令 $p(x) \Leftrightarrow p(x(k)|B_{1:k-1})$, $B \Leftrightarrow B_k$, 则可迭代计算 $\hat{x}(k|B_{1:k})$ 以及均方误差 $M(k|B_{1:k})$, 即首先基于第1个量化观测 $b_1(k)$ 对状态进行估计, 得到状态后验分布, 然后将其作为下一步估计的状态先验分布, 再利用量化观测 $b_2(k)$ 产生新的状态估计, 如此重复直至所有传感器的量化观测利用完毕.

考虑第 n 步迭代, 在高斯近似式(40)下, 即状态 $x(k)$ 具有高斯先验分布, 则根据定理1, 只需考虑单传感器观测的特殊情形, 此时 $\phi = 1$, $\varphi = 1/\sigma_n^2$, 即可得式(42)和式(43).

式(42)和式(43)迭代计算 N 次即可得到 $\hat{x}(k|B_{1:k}) = \hat{x}^{(N)}(k|B_{1:k-1})$, 且 $M(k|B_{1:k}) = M^{(N)}(k|B_{1:k-1})$.

若各传感器的量化比特率比较大, 则高斯近似式(40)基本成立^[7, 14], 因此上述迭代校正算法与定理1中的校正算法渐近等价. 证毕.

附录 4 定理4的证明(Proof of Theorem 4)

证 为简化分析, 记函数

$$\begin{aligned} \bar{g}(M) &:= \frac{Mh^T}{hMh^T + 1/\varphi}, \\ C(M) &:= HMH^T + R. \end{aligned} \quad (A20)$$

首先, 根据黎卡提方程(52)以及函数 $\bar{g}(M)$ 的定义可得

$$\begin{aligned} M_{k+1}^q &= AM_k^q A^T + C_u - A\bar{g}(M_k^q)hM_k^q A^T + \\ &\lambda(k)A\bar{g}(M_k^q)\bar{g}^T(M_k^q)A^T, \end{aligned} \quad (A21)$$

其中: $k = 1, 2, \dots, \infty$, 初始值 $M_1^q = AM_0 A^T + C_u$.

下面分析式(A21)中标量系数 $\lambda(k)$ 的性质.

在 k 时刻, 由式(34)以及函数 $C(M)$ 的定义可知融合中心对 $Y(k)$ 的预测分布为

$$p(Y(k)|B_{1:k-1}) = \mathcal{N}[Y(k); H\hat{x}(k|B_{1:k-1}), C(M_k^q)]. \quad (A22)$$

定义随机标量 $Y'(k) := \phi Y(k)$, 则根据式(A22)可知 k 时刻其先验分布为

$$\begin{aligned} p(Y'(k)|B_{1:k-1}) &= \\ &\mathcal{N}[Y'(k); \phi H\hat{x}(k|B_{1:k-1}), \phi C(M_k^q)\phi^T], \end{aligned} \quad (A23)$$

记 $\hat{Y}'(k) := \phi\hat{Y}(k|B_{1:k-1}, B_k)$, 则关于 $Y'(k)$ 的平均失真为

$$\begin{aligned} \Delta_{Y'(k)} &= E\{(Y'(k) - \hat{Y}'(k))^2|B_{1:k-1}\} = \\ &\phi E\{\tilde{Y}(k)\tilde{Y}^T(k)|B_{1:k-1}\}\phi^T = \\ &\phi\Delta_Y(k)\phi^T = \lambda(k). \end{aligned} \quad (A24)$$

根据Lloyd-Max量化理论^[12], 在总带宽为 Q 位下, 由式(12)和式(A23)可知恢复标量信号 $Y'(k)$ 的平均失真的理论下界为 $\frac{K(Q)\phi C(M_k^q)\phi^T}{4Q}$, 则

$$\lambda(k) \geq \frac{K(Q)\phi C(M_k^q)\phi^T}{4Q}. \quad (A25)$$

现在, 根据式(A21)和式(A25), 定义一新的数列 Z_k , 其满足下列递推关系:

$$\begin{aligned} Z_{k+1} &= AZ_k A^T + C_u - A\bar{g}(Z_k)hZ_k A^T + \\ &\Delta(Z_k)A\bar{g}(Z_k)\bar{g}^T(Z_k)A^T, \end{aligned} \quad (A26)$$

其中函数 $\Delta(Z_k) := \frac{K(Q)\phi C(Z_k)\phi^T}{4Q}$, 初始值取 $Z_1 = M_1^q$.

式(A26)亦可转换为

$$\begin{aligned} Z_{k+1} &= AZ_k A^T + C_u - A\bar{g}(Z_k)hZ_k A^T + \\ &\frac{K(Q)}{4Q}A\bar{g}(Z_k)\phi C(Z_k)\phi^T\bar{g}^T(Z_k)A^T. \end{aligned} \quad (A27)$$

又根据 $\phi H = h$ 和 $\phi R\phi^T\varphi = 1$, 则式(A27)可化简为

$$Z_{k+1} = AZ_k A^T + C_u - \beta A\bar{g}(Z_k)hZ_k A^T, \quad (A28)$$

其中 $\beta = 1 - \frac{K(Q)}{4Q}$.

下面来证明 $\forall k \geq 1$, 有 $M_k^q \succeq Z_k$.

根据数学归纳法, 首先有 $M_1^q = Z_1$, 又若 $M_k^q \succeq Z_k$, 则

$$\begin{aligned} M_{k+1}^q &= AM_k^q A^T + C_u - A\bar{g}(M_k^q)hM_k^q A^T + \\ &\lambda(k)A\bar{g}(M_k^q)\bar{g}^T(M_k^q)A^T \succeq \\ &AM_k^q A^T + C_u - A\bar{g}(M_k^q)hM_k^q A^T + \\ &\frac{K(Q)}{4Q}A\bar{g}(M_k^q)\phi C(M_k^q)\phi^T\bar{g}^T(M_k^q)A^T = \end{aligned} \quad (A29)$$

$$AM_k^q A^T + C_u - \beta A\bar{g}(M_k^q)hM_k^q A^T \succeq \quad (A30)$$

$$AZ_k A^T + C_u - \beta A\bar{g}(Z_k)hZ_k A^T = \quad (A31)$$

$$Z_{k+1}, \quad (A32)$$

其中式(A29)根据式(A25)可得, 式(A30)的推导同式(A28)一样, 式(A31)根据文献[17]附录A中引理1的c)以及 $M_k^q \succeq Z_k$ 可得到.

因此, 由归纳法即知 $\forall k$, 有 $M_k^q \succeq Z_k$. 若 M_k^q 绝对有界, 则 Z_k 必绝对有界, 而根据Elia^[19], 由于 $(A, C_u^{\frac{1}{2}})$ 能控, (A, h) 能观, A 不稳定, 且 $\text{rank}(h) = 1$, 则 Z_k 绝对有界亦即绝对收敛, 且其充要条件为 $\beta > 1 - \frac{1}{\prod_i |\lambda_i^u|^2}$, 化简即为式(57), 其与式(53)等价, 因此亦有 $Q \geq q_c$. 证毕.

作者简介:

陈军勇 (1983—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为分布式量化估计、网络控制等, E-mail: chenjunyong102@gmail.com;

邬依林 (1970—), 男, 副教授, 博士研究生, 主要研究方向为网络控制、分布式信号处理等, E-mail: lyw@gdei.edu.cn;

祁恬 (1981—), 女, 讲师, 博士, 主要研究方向为网络控制、最优和鲁棒控制、分布式信号处理等, E-mail: auqt@scut.edu.cn. 通讯作者.