

## 通讯约束下的线性系统状态降维与估计

沈 英, 章 辉

(浙江大学 工业控制技术国家重点实验室, 杭州 浙江 310027; 浙江大学 控制科学与工程学系 工业控制研究所, 杭州 浙江 310027)

**摘要:** 本文面向状态估计, 考察了通讯功率受限线性动态系统状态的降维问题. 为了满足平行信道传输数据的维数限制和通讯功率约束, 采取降低状态维数的方法, 通过传输信号的新息, 提高传输效率, 利用有限的通信资源, 使得接收端的状态估计达到最优. 本文采用差分脉冲编码调制系统(DPCM), 基于最小误差熵估计准则和Kalman估计算法, 得出了最优的状态降维矩阵的设计方法, 并且对随机系统的可估计性以及相应确定性系统的能观性进行了分析. 分析和仿真结果表明, 这种设计方法在传输信号满足通讯功率限制的情况下可以使接收端的状态估计性能达到最优.

**关键词:** 通讯约束; 功率受限; 状态降维; 状态估计误差熵; 可估计性

**中图分类号:** TP13      **文献标识码:** A

## State-dimension reduction and filtering for linear systems under communication constraints

SHEN Ying, ZHANG Hui

(State Key Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China;  
Institute of Industrial Process Control, Department of Control Science and Engineering, Zhejiang University,  
Hangzhou Zhejiang 310027, China)

**Abstract:** We investigate how to reduce the state dimensions when estimating the states of a linear dynamic system with channel communication power constraints. To meet the requirements on the dimension number and communication power constraints of the parallel channels, we adopt the structure of differential pulse code modulation (DPCM) to produce the innovation as the transmitted signal; and a new method of state-dimension reduction is derived under the minimum error entropy estimation (MEEE) criterion of filtering at receiver. Furthermore, the problem of state estimability of the stochastic system and the observability of the corresponding deterministic system are analyzed by using information theoretic method. Analysis and simulation results show that the estimation performance of Kalman filter is optimal under communication power constraint when this dimension reduction method is applied.

**Key words:** communication constraint; power constraint; states-dimension reduction; state estimation error entropy; estimability

### 1 引言(Introduction)

在系统控制设计方案中, 往往需要利用被控对象内部状态变量的实时信息. 在很多工程领域中, 被控对象往往结构复杂, 其数学模型阶次往往很高, 状态维数很大. 另一方面, 在大规模控制系统、分布式控制系统或远程控制系统中, 被控对象、控制器、执行器等往往是分布在不同的物理位置并通过网络信道连结成一个整体. 而它们之间的通讯信道的传输能力往往是有限的, 如存在带宽约束、功率约束等. 这时, 相对较大的数据实时传输量与有限的信道传输能力之间产生了矛盾.

为了解决这一矛盾, 一类做法是对须同时传输的信号分时传输, 这样的通讯策略对实时系统提出的是“接入约束”(access constraints)问题<sup>[1-2]</sup>. 另一种

策略是, 通过降低被控对象状态的维数, 然后在信道接收端估计被控对象的状态, 从而达到降低数据传输量的目的, 即本文所考察的“状态降维”(state-dimension reduction)问题. 关于与数据降维相关的问题, 前人已经做过大量的工作, 如通信和图像处理领域中的数据压缩<sup>[3-4]</sup>. 本文研究的是以估计为目的的动态系统状态降维问题, 与此相关的成果有文献[5-9]. 文献[5]讨论的是基于信息论方法的模型降阶问题. 模型降阶是尽量保持原模型的输入输出特性的前提下降低状态阶次, 这与状态降维有相似的地方, 但它们的目不同: 前者是寻找一个降阶矩阵, 使得降阶后的系统性能最接近于原系统; 后者是寻找一个降维矩阵, 使得接收端的状态估计值与原状态的误差最小. 文献[6]讨论了观测值的选择问

题,以状态估计误差的最小二乘为目标,得出了输出矩阵的设计方法,并且在文献[7-8]中得到应用.文献[9]是以信息论的方法研究估计问题的经典文献,讨论了系统中的信息量的变化情况,特别是对估计误差熵作了较详细的分析.

本文针对系统通过有限数目的平行信道进行数据传输的情况,以最优状态估计为目的,研究在信道功率受限情况下的状态降维问题.采用信息论的方法对系统进行分析设计,以接收端的估计误差熵最小为准则,得出了降维矩阵的设计方法,并且对系统的可估计性进行了分析.本文的工作受到文献[6,8]所采用方法的启发,而与它们的不同之处在于本文是针对信道约束条件进行讨论,采用最小误差熵估计准则,并且在算法中进一步考虑了平行信道的功率分配问题,而文献[6,8]以最小二乘估计为准则,且没有涉及功率约束问题.另外,本文与文献[8]的一个显著的区别是最终所要解决的问题是不同的,文献[8]是对滤波器参数的设计,而本文是设计状态降维矩阵.

本文采用了差分脉冲编码调制(DPCM)<sup>[10]</sup>的系统结构,在信道上传输信号的新息.此时,信道前后各有一个滤波器,分别称为前置滤波器和后置滤波器,前置滤波器是为了得到信号的新息,后置滤波器是为了估计被控对象的状态. DPCM通过降低相邻两个被传输值之间的冗余度可以降低数据传输率,同时又可以降低传输功率,因而被广泛应用于通信系统中,如文献[11-13]中都采用了这样的系统结构.而本文的系统与传统DPCM不同之处在于本文可以通过设计系统的参数(输出矩阵,即降维矩阵)使得信道接收端更准确地估计.广义上说,降维和前置滤波器相当于通信系统的编码部分,而后置滤波器相当于通信系统的解码部分.因此,事实上,本文所讨论的也是通信系统中广泛存在的编码与解码问题.分析和仿真结果表明,本文的设计方法可以使传输信号满足功率约束,且状态估计的性能在最小估计误差熵准则下达到最优.

## 2 问题描述(Problem statement)

### 2.1 研究对象(System under discussion)

假设研究对象可描述成如下的离散定常模型:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + B\boldsymbol{w}(k), \quad (1)$$

其中:  $\boldsymbol{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\boldsymbol{w}(k) \in \mathbb{R}^m$ ,  $A, B$ 分别是具有适当维数的定常矩阵,  $\boldsymbol{x}(0)$ 服从高斯分布,  $\boldsymbol{w}(k)$ 是协方差阵为 $Q$ 的零均值高斯白噪声向量,与 $\boldsymbol{x}(0)$ 不相关.假设每一时刻对象的状态均是可检测的.

### 2.2 状态预处理(States preprocessing)

预处理是为了将所要传输的信号转变成适合于信道传输的信号.本文所研究的信道是由 $p$ 个

独立、平行且具有功率约束的信道组成的平行信道<sup>[14-15]</sup>,假设当信道输入信号满足功率约束的条件时,信息可以在信道上无误差地传输.这里,暂不考虑量化的问题.

由于信道是由 $p$ 个独立信道组成的平行信道,所以信道同时传输的数据维数不能大于 $p$ 维,这个约束条件可通过系统状态降维来得以满足.本文采用线性的降维方式,即将不同的状态线性组合作为输出.在实际系统中,可以考虑采用传感器或检测设备来实现这个降维过程.检测过程不可避免地受到各种因素的干扰,用高斯白噪声近似各种随机干扰是工业过程领域常用的处理方法,如文献[16];在通信领域,用高斯白噪声来近似也是一种常用的处理手段,如文献[17]中所提到的热噪声.在降维检测过程中,会受到热噪声、散粒噪声以及其他加性微噪声的影响,根据中心极限定理<sup>[18]</sup>,它们的和往往近似地服从高斯分布.所以在数据压缩时,也常用高斯白噪声来近似各种随机干扰,如文献[19].因此,这里状态检测以及降维检测过程中的各种干扰因素可以用一个加性高斯白噪声表示.这样,降维输出过程可描述如下:

$$\boldsymbol{y}(k) = C\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{v}(k), \quad (2)$$

其中:  $\boldsymbol{y}(k) \in \mathbb{R}^p$ 为状态降维后的输出值;  $C$ 为适当维数的定常矩阵,称之为降维矩阵;  $\boldsymbol{v}(k) \in \mathbb{R}^p$ 是降维过程中的高斯白噪声向量,假定其均值为零,协方差为 $R$ ,与 $\boldsymbol{w}(k)$ 和 $\boldsymbol{x}(0)$ 均不相关.

信号预处理部分还包括一个滤波的过程,产生信号的新息,新息的定义如下:

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(k|k-1) = \boldsymbol{y}(k) - \hat{\boldsymbol{y}}(k|k-1), \quad (3)$$

其中:  $\hat{\boldsymbol{y}}(k|k-1) = E\{\boldsymbol{y}(k)|Y^{k-1}\}$ 为信号的预测值,  $Y^k$ 表示0到 $k$ 时刻所有输出的时间序列,即 $Y^k = \{\boldsymbol{y}(0), \boldsymbol{y}(1), \dots, \boldsymbol{y}(k)\}$ .由于新息在通讯中能降低相邻两个被传输值之间的冗余度,因而传输新息可以进一步降低被传输信号的功率,从而降低信道通信速率资源的使用.传输新息的另一个优点是它不仅适用于稳定对象,而且适用于不稳定的对象.根据平均功率的定义<sup>[14-15]</sup>,新息的平均功率可以表示如下:

$$\frac{1}{p} \text{tr}(E(\tilde{\boldsymbol{y}}\tilde{\boldsymbol{y}}^T)), \quad (4)$$

其中:  $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹,  $E(\cdot)$ 表示数学期望,  $(\cdot)^T$ 表示转置运算.信道接收端接收到信号的新息,对新息滤波后可以估计出被控对象的状态.在系统中,前置和后置滤波器均采用Kalman滤波算法. Kalman滤波器有很多优良的性质,它在均方误差准则以及估计误差熵准则下都是最优的<sup>[20-21]</sup>.既然滤波器已经确定,那么事实上本文的问题就是要在某种准则下寻

找一种线性降维方法, 即确定式(2)中的降维矩阵 $C$ , 通过 $C$ 的选择使得输出端的Kalman估计的性能达到最优.

系统结构如图1所示.

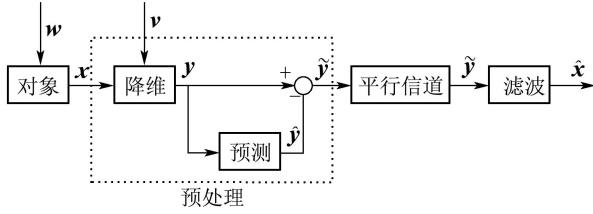


图1 系统结构框图

Fig. 1 System block diagram

### 3 问题求解(Solution)

#### 3.1 最小误差熵估计(Minimum error entropy estimation)

希望在信道接收端通过Kalman滤波器尽量准确地恢复被控系统的状态, 即寻找一个降维矩阵使得状态的估计误差尽量小, 因此合理的设计准则应该是关于估计误差的某个凹函数或凸函数. 不同于一般的最小均方差准则<sup>[20]</sup>, 本文采用最小误差熵估计准则<sup>[21]</sup>, 即寻找一个降维矩阵使得估计误差熵

$$H(\tilde{\mathbf{x}}(k))$$

最小. 其中:  $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$ 为状态估计误差,  $\hat{\mathbf{x}}(k) = E\{\mathbf{x}(k)|Y^k\}$ 为状态估计值. 本文将参照文献[8]的方法, 采用迭代算法获得每一时刻的降维矩阵 $C(k)$ , 当 $C(k)$ 收敛于某个定常矩阵时, 该定常矩阵即为本文所求的定常降维矩阵 $C$ . 之所以采用最小估计误差熵准则, 是因为它具有如下的良好性质.

考察当前时刻的状态和当前及以往所有时刻的输出之间的互信息

$$I(\mathbf{x}(k); Y^k) = H(\mathbf{x}(k)) - H(\mathbf{x}(k)|Y^k) = H(\mathbf{x}(k)) - H(\tilde{\mathbf{x}}(k)), \quad (5)$$

$H(\mathbf{x}(k))$ 与降维矩阵无关, 所以, 对于本文的问题, 当 $H(\tilde{\mathbf{x}}(k))$ 达到最小时, 互信息 $I(\mathbf{x}(k); Y^k)$ 达到最大.

再看条件互信息:

$$I(\mathbf{x}(k); \mathbf{y}(k)|Y^{k-1}) = H(\mathbf{x}(k)|Y^{k-1}) - H(\mathbf{x}(k)|Y^k) = H(\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1)) - H(\tilde{\mathbf{x}}(k)), \quad (6)$$

其中:  $\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ 表示状态的预测误差,  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = E\{\mathbf{x}(k)|Y^{k-1}\}$ 为状态预测值. 在第 $k$ 时刻,  $H(\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1))$ 只与 $C(k-1)$ 有关, 与 $C(k)$ 无关, 因此, 对于本文的问题, 当 $H(\tilde{\mathbf{x}}(k))$ 达到最小时, 互信息 $I(\mathbf{x}(k); \mathbf{y}(k)|Y^{k-1})$ 达到最大.

因此, 针对本文的问题有

$$\min H(\tilde{\mathbf{x}}(k)) \Leftrightarrow \max I(\mathbf{x}(k); Y^k) \Leftrightarrow \max I(\mathbf{x}(k); \mathbf{y}(k)|Y^{k-1}). \quad (7)$$

假设信道所能传输的最大平均功率为 $F$ , 已知在信道上传输的是新息, 因此信道功率限制即是对新息的功率限制, 即

$$\frac{1}{p} \text{tr}(E(\tilde{\mathbf{y}}(k|k-1)\tilde{\mathbf{y}}^T(k|k-1))) \leq F, \quad (8)$$

其中:  $p$ 表示信道可同时传输数据的最大个数;  $\tilde{\mathbf{y}}(k|k-1) = \mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k|k-1)$ 为信号的新息, 其中:  $\hat{\mathbf{y}}(k|k-1) = E\{\mathbf{y}(k)|Y^{k-1}\}$ 表示输出的预测值,  $Y^k$ 表示0到 $k$ 时刻所有输出的时间序列, 即 $Y^k = \{\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(k)\}$ . 因此, 本文的问题可以归结为

$$\begin{aligned} &\min_C H(\tilde{\mathbf{x}}(k)), \\ &\text{s.t. } \frac{1}{p} \text{tr}(E(\tilde{\mathbf{y}}(k|k-1)\tilde{\mathbf{y}}^T(k|k-1))) \leq F. \end{aligned} \quad (9)$$

#### 3.2 求解方法(Solving method)

根据信息论的相关知识<sup>[14-15]</sup>可知

$$H(\tilde{\mathbf{x}}(k)) = \frac{n}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{2} \ln \det(P(k)), \quad (10)$$

其中 $P(k) = E\{\tilde{\mathbf{x}}(k)\tilde{\mathbf{x}}^T(k)\}$ 为估计误差协方差矩阵. 根据Kalman滤波迭代算法<sup>[20]</sup>, 有

$$P(k) = P(k|k-1) - P(k|k-1)C^T(k)[C(k)P(k|k-1) + R]^{-1}C(k)P(k|k-1), \quad (11)$$

其中:  $P(k|k-1) = E\{\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1)\tilde{\mathbf{x}}^T(k|k-1)\}$ 为预测误差的协方差矩阵. 根据矩阵求逆定理, 式(11)可进一步转化为如下形式:

$$P(k) = [P^{-1}(k|k-1) + C^T(k)R^{-1}C(k)]^{-1} = P(k|k-1)[I_n + C^T(k)R^{-1}C(k)P(k|k-1)]^{-1}, \quad (12)$$

其中 $I_n$ 为 $n$ 维单位阵, 则

$$\begin{aligned} \ln \det(P(k)) &= \ln \det(P(k|k-1)) - \ln \det(I_n + C^T(k)R^{-1}C(k)P(k|k-1)), \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\det(I_n + C^T(k)R^{-1}C(k)P(k|k-1)) = \det(I_p + C(k)P(k|k-1)C^T(k)R^{-1}) = \frac{\det(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + R)}{\det(R)}. \quad (14)$$

将式(14)代入式(13)再代入式(10)可得

$$H(\tilde{\mathbf{x}}(k)) = \frac{n}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{2} \ln \det(P(k|k-1)) +$$

$$\frac{1}{2} \ln \det(R) - \frac{1}{2} \ln \det(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + R), \quad (15)$$

因为 $p(k|k-1)$ 只与 $C(k-1)$ 有关,而与 $C(k)$ 无关,所以式(15)中与 $C(k)$ 有关的只有最后一项,则

$$\min_{C(k)} H(\tilde{\mathbf{x}}(k)) \Leftrightarrow \max_{C(k)} \ln \det(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + R). \quad (16)$$

综上所述,本文问题转化为在信道功率受限的情况下,寻找降维矩阵 $C(k)$ 使得 $\det(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + R)$ 取得最大值.

根据Kalman滤波算法,有

$$\tilde{\mathbf{y}}(k|k-1) = C(k)\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{v}(k). \quad (17)$$

式(17)代入式(8)可得

$$\begin{aligned} \text{tr}(\tilde{\mathbf{y}}(k|k-1)\tilde{\mathbf{y}}^T(k|k-1)) = \\ \text{tr}(C(k)P(k|k-1)C^T(k)) + \text{tr}(R) \leq pF. \end{aligned} \quad (18)$$

记 $pF - \text{tr} R = F'$ ,  $F' \geq 0$ , 则式(18)等价于

$$\text{tr}(C(k)P(k|k-1)C^T(k)) \leq F', \quad (19)$$

则本文的问题(9)可转化为求解如下的问题:

$$\begin{aligned} \max_{C(k)} \ln \det(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + R), \\ \text{s.t. } \text{tr}(C(k)P(k|k-1)C^T(k)) \leq F'. \end{aligned} \quad (20)$$

上述问题的求解方法可以采用信息论中求解带有相关高斯噪声的平行信道的信道容量的常用方法<sup>[14-15]</sup>.

首先,将矩阵 $R$ 对角化,存在矩阵 $S$ 使 $R = SAS^T$ , 其中:  $A = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ ,  $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示对角矩阵,  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ 为矩阵 $R$ 的特征值,并假设 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p$ ,  $S$ 为单位正交矩阵,满足 $SS^T = I$ . 则

$$\begin{aligned} \det(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + R) = \\ \det(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + SAS^T) = \\ \det(S^T C(k)P(k|k-1)C^T(k)S + A) = \\ \det(\bar{C}(k)P(k|k-1)\bar{C}^T(k) + A), \end{aligned} \quad (21)$$

其中 $\bar{C}(k) = S^T C(k)$ . 又

$$\begin{aligned} \text{tr}(\bar{C}(k)P(k|k-1)\bar{C}^T(k)) = \\ \text{tr}(C(k)P(k|k-1)C^T(k)), \end{aligned} \quad (22)$$

因此,问题(20)进而可以转化为

$$\begin{aligned} \max_{\bar{C}(k)} \ln \det(\bar{C}(k)P(k|k-1)\bar{C}^T(k) + A), \\ \text{s.t. } \text{tr}(\bar{C}(k)P(k|k-1)\bar{C}^T(k)) \leq F'. \end{aligned} \quad (23)$$

显然,  $\bar{C}(k)P(k|k-1)\bar{C}^T(k)$ 是非负定对称矩阵,假设 $\bar{C}(k)P(k|k-1)\bar{C}^T(k)$ 对角线上的元素为 $\rho_1, \rho_2,$

$\dots, \rho_p$ ,  $\rho_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, p)$ 满足

$$\det(\bar{C}(k)P(k|k-1)\bar{C}^T(k) + A) \leq \prod_{i=1}^p (\rho_i + \lambda_i), \quad (24)$$

其中当且仅当 $\bar{C}(k)P(k|k-1)\bar{C}^T(k)$ 为对角阵时等号成立,即当 $\bar{C}(k)P(k|k-1)\bar{C}^T(k)$ 为

$$\bar{C}(k)P(k|k-1)\bar{C}^T(k) = \text{diag}\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p\} \quad (25)$$

时,  $\ln \det(\bar{C}(k)P(k|k-1)\bar{C}^T(k) + A)$ 可取得最大值.

接下来,用拉格朗日乘子法求

$$\ln \prod_{i=1}^p (\rho_i + \lambda_i) = \sum_{i=1}^p \ln(\rho_i + \lambda_i) \quad (26)$$

的最大值. 设 $\theta$ 为拉格朗日乘子,目标函数为

$$J = \sum_{i=1}^p \ln(\rho_i + \lambda_i) + \theta(\sum_{i=1}^p \rho_i - F'). \quad (27)$$

由 $\frac{\partial J}{\partial \rho_i} = 0 (i = 1, 2, \dots, p)$ 可得

$$\frac{1}{\rho_i + \lambda_i} + \theta = 0. \quad (28)$$

由式(28)可知

$$\rho_1 + \lambda_1 = \rho_2 + \lambda_2 = \dots = \rho_p + \lambda_p = -\frac{1}{\theta}. \quad (29)$$

又知

$$\sum_{i=1}^p \rho_i + \lambda_i = pF', \quad (30)$$

则 $-\frac{1}{\theta} = F'$ . 记 $-\frac{1}{\theta} = \nu$ , 则 $\rho_i = \nu - \lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ . 当 $F'$ 较小,  $\rho_i (i = 1, 2, \dots, p)$ 可能会出现小于零的情况. 又根据上面的分析,  $\rho_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, p)$ 采用与求信道容量相同的处理方法<sup>[14-15]</sup>对解作一修正,令 $\rho_i = (\nu - \lambda_i)_+$ , 其中正函数 $(x)_+$ 定义为

$$(x)_+ = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (31)$$

利用

$$\sum_{i=1}^p (\nu - \lambda_i)_+ = F' \quad (32)$$

确定 $\nu$ , 然后求出 $\rho_i$ . 确定 $\nu$ 以及 $\rho_i$ 的过程称为灌水法<sup>[14-15]</sup>.

事实上,上述的灌水过程是一个功率分配的过程,首先把功率分配给噪声最小也就是测量误差最小的传感器所对应的信道,然后分配给测量误差第二小的信道,就像灌水一样进行,直到水涨到一定的水平 $\nu$ ,使总的灌水量等于 $F'$ . 从上述过程可知,在分配功率时总是先满足噪声较小的传感器所对应的信道,传感器受到的噪声越小表明它测得的数据

越准确,因而也就越有利于接收端的滤波估计.当 $\rho_i = 0$ 时,该传感器所测得有效信息完全被湮没在噪声之中,这时或许可以考虑将该传感器从系统中移走从而进一步降低维数.是否应该保留该传感器涉及多方面的因素,本文暂不讨论,下文就保留该传感器的情况进行分析讨论.

从上述灌水过程可知,分配给每个输出分量的功率是不同的,本文设计方法的着眼点是接收端状态估计的整体性能.由分析可知,灌水准则可以使状态估计的整体性能达到最优,即估计误差熵达到最小.

最后求降维矩阵.设 $P(k|k-1)$ 的特征值为 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ ,所对应的单位正交特征向量为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ .受文献[5]中模型降阶的最小条件信息损失方法的启发,当选择

$$\bar{C}(k) = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\rho_1}{\sigma_1}} & \mathbf{0} \\ & \ddots \\ \mathbf{0} & \sqrt{\frac{\rho_p}{\sigma_p}} \end{bmatrix} [\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p]^T \quad (33)$$

时,满足式(25),那么

$$C(k) = S\bar{C}(k). \quad (34)$$

至此,已经得出了最小估计误差熵准则下的降维矩阵.

进一步考察新息 $\tilde{\mathbf{y}}(k|k-1) = C(k)\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{v}(k)$ 的熵

$$\begin{aligned} H(\tilde{\mathbf{y}}(k|k-1)) &= \\ \frac{n}{2} \ln(2\pi e) &+ \frac{1}{2} \ln \det(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + R). \end{aligned} \quad (35)$$

从式(35)及式(16)可知

$$\max H(\tilde{\mathbf{y}}(k|k-1)) \Leftrightarrow \min H(\tilde{\mathbf{x}}(k)). \quad (36)$$

式(36)进一步说明了本文采用DPCM的系统结构的合理性.进一步,

$$\begin{aligned} H(Y^k) &= H(Y^{k-1}, \mathbf{y}(k)) = \\ H(Y^{k-1}) &+ H(\mathbf{y}(k)|Y^{k-1}) = \\ H(Y^{k-1}) &+ H(\tilde{\mathbf{y}}(k|k-1)) = \\ H(Y^{k-2}) &+ H(\tilde{\mathbf{y}}(k-1|k-2)) + H(\tilde{\mathbf{y}}(k|k-1)) = \\ H(\mathbf{y}(0)) &+ H(\tilde{\mathbf{y}}(1|0)) + H(\tilde{\mathbf{y}}(2|1)) + \cdots + \\ H(\tilde{\mathbf{y}}(k-1|k-2)) &+ H(\tilde{\mathbf{y}}(k|k-1)). \end{aligned} \quad (37)$$

对于本文问题,当 $H(\tilde{\mathbf{y}}(1|0)), H(\tilde{\mathbf{y}}(2|1)), \dots, H(\tilde{\mathbf{y}}(k-1|k-2)), H(\tilde{\mathbf{y}}(k|k-1))$ 均取得最大值时, $H(Y^k)$ 达到最大.因此,由式(37)可知最小估计误差熵方法可以使传输功率约束下 $H(Y^k)$ 达到最大. Kalman估计是基于过去所有时刻的观测值进行估计的,若过去所有观测值所包含的关于状态的信息量越大,则越有利于估计.这进一步说明了本文

设计方法的优越性.

### 3.3 算法(Algorithm)

**Step 1** 初始化,设置迭代次数 $i = 0$ ,估计误差协方差矩阵 $P(0)$ ,期望的精度 $\delta$ ,相邻两次迭代所得估计误差熵的差 $d = \infty$ .

**Step 2** 令 $i = i+1$ ,依据式(33)–(34)和式(10)分别计算 $C(i)$ 以及相邻两次迭代所得估计误差熵的差 $d = H(i-1) - H(i)$ .

**Step 3** 若相邻两次迭代所得估计误差熵的差 $d \leq \delta$ ,迭代停止;否则转到Step 2.

参数 $\delta$ 表征了算法的收敛程度, $\delta$ 越小,则估计误差熵越接近于最小值,这时,算法收敛的时间也相对较长.当系统为定常系统时,可以离线计算降维矩阵,这时,更关注的是算法的收敛精度, $\delta$ 可以取很小的值.

以上迭代算法收敛后所得 $C(i)$ 即为所求的定常降维矩阵 $C$ .

## 4 可估计性分析(Estimability analysis)

从上文的分析中可知,在信道接收端需要对系统的状态进行估计,自然地,希望这种估计是有效的,有意义的.为评估系统状态估计的可行性和有效性,文献[22]基于最小均方误差估计提出系统可估计性定义:若一个系统是可估计的,则该系统状态的后验估计误差 $P(k) = E\{\tilde{\mathbf{x}}(k)\tilde{\mathbf{x}}^T(k)\}$ 严格小于先验误差 $\Pi(k) = E\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\}$ .文献[23]从信息论的角度对可估计性问题进行了进一步研究.本文的方法是在功率约束下寻找降维矩阵使得估计误差熵最小,但所设计的系统是否满足状态估计(解码)的有效性要求,是一个需要进一步考察的问题.下面将借助可估计性概念对图1所示系统进行分析.

**引理 1**<sup>[23]</sup> 在线性随机系统(1)–(2)中,系统状态为可估计的,当且仅当

$$I(\mathbf{x}(k); Y^k) > 0, \forall k \geq n-1. \quad (38)$$

由引理1可以得出如下的定理:

**定理 1** 对图1所示系统(1)–(2)在功率约束(8)条件下,系统是可估计的,当且仅当

$$F > \frac{p_1}{p} \sqrt{\frac{\prod_{i=1}^{p_1} \lambda_i \cdot \det(P(k|k-1))}{\det(\Pi(k))}} + \frac{\sum_{i=p_1+1}^p \lambda_i}{p}, \quad \forall k \geq n-1. \quad (39)$$

特别地,当系统是稳定系统时, $\Pi(k), P(k|k-1)$ 分别收敛到一个定常矩阵 $\Pi, P$ ,则可估计性的充要条件为

$$F > \frac{p_1}{p} \sqrt{\frac{\prod_{i=1}^{p_1} \lambda_i \cdot \det(P)}{\det(\Pi)}} + \frac{\sum_{i=p_1+1}^p \lambda_i}{p}. \quad (40)$$

上式中, 当 $p_1 = p$ 时,  $\sum_{i=p_1+1}^p \lambda_i = 0$ ;  $\Pi$ 与 $P$ 分别可通过求解Lyapunov方程和代数Riccati方程得到.

**证** 由信息论可知

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}(k); Y^k) &= H(\mathbf{x}(k)) - H(\tilde{\mathbf{x}}(k)) = \\ &= \frac{1}{2} \ln \det(\Pi(k)) - \\ &= \frac{1}{2} \ln \det(P(k|k-1)) - \frac{1}{2} \ln \det(R) + \\ &= \frac{1}{2} \ln \det(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + R). \end{aligned} \quad (41)$$

根据上文中的求解过程可知

$$\begin{aligned} \det(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + R) &= \\ &= pF - \sum_{i=p_1+1}^p \lambda_i \\ &= \left(\frac{pF - \sum_{i=p_1+1}^p \lambda_i}{p_1}\right)^{p_1} \cdot \prod_{i=p_1+1}^p \lambda_i, \end{aligned} \quad (42)$$

其中 $p_1$ 表示 $\rho_i (i=1, 2, \dots, p)$ 中不为零的个数. 将式(42)代入式(41)可得

$$I(\mathbf{x}(k); Y^k) = \frac{1}{2} \ln \frac{pF - \sum_{i=p_1+1}^p \lambda_i}{p_1} \frac{\det(\Pi(k))}{\det(P(k|k-1)) \prod_{i=1}^{p_1} \lambda_i}. \quad (43)$$

由引理1可知, 系统是可估计的, 当且仅当

$$\frac{pF - \sum_{i=p_1+1}^p \lambda_i}{p_1} \frac{\det(\Pi(k))}{\det(P(k|k-1)) \prod_{i=1}^{p_1} \lambda_i} > 1. \quad (44)$$

即得证. 证毕.

**注1** 通过检验式(39)是否成立即可判断用最小估计误差熵方法所设计的系统是否可估计. 由于用最小估计误差熵求得的降维矩阵可以使 $I(\mathbf{x}(k); Y^k)$ 取得最大值, 若该系统是不可估计的, 则表明在这样的功率约束条件下不存在使得系统可估计的降维矩阵, 这时, 必须改善信道条件, 提高其功率约束的上限值. 式(39)不仅提供了一个判断系统是否可估计的手段, 同时对设计系统的降维矩阵具有一定的指导作用. 当希望所设计的系统满足可估计性且稳态预测误差能达到某个期望值 $P$ 时, 可以通过计算式(39)预测出信道所必须提供的功率下限.

进一步考察上文讨论的可估计性与系统能观性之间的联系. 取模型(1)–(2)中 $\mathbf{w}(k) = 0$ ,  $\mathbf{v}(k) = 0$ , 即得随机模型(1)–(2)所对应的确定性模型

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k), \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k). \end{cases} \quad (45)$$

设随机系统(1)–(2)与它所对应的确定性系统(45)均具有离散幅值的初始状态向量 $\mathbf{x}(0)$ , 记 $\mathbf{x}(0) = [x_1(0) \ x_2(0) \ \dots \ x_n(0)]^T$ , 则每一个 $x_i(0) (i=1, 2, \dots, n)$ 随机地取值于一个有限的集合 $\Omega_i$ , 并在每一个 $\Omega_i$ 上定义一个概率测度. 从一般意义上考虑,  $x_i(0)$ 的概率特性是未知的. 根据Jancys的“最大熵”原则<sup>[24–25]</sup>, 设所定义的 $x_i(0)$ 的概率分布使得 $x_i(0)$ 的熵最大, 即在缺乏先验信息的情况下假定 $x_i(0)$ 取值的不确定性最大.

文献[2, 23]讨论了随机系统(1)–(2)的可估计性与它相对应的确定性系统(45)的能观性之间的关系, 有如下结论:

**引理2**<sup>[5]</sup> 若 $\text{rank}(A) = n$ , 则随机系统(1)–(2)是状态可估计的, 当且仅当其相应的确定性系统(45)是能观的.

由引理2可知, 对于本文讨论的系统, 若转移矩阵 $A$ 满秩且所设计的系统是可估计的, 即功率约束 $F$ 、观测噪声协方差矩阵 $R$ 、状态协方差矩阵 $\Pi$ 与预测误差协方差矩阵 $P$ 满足式(39)时, 那么它所对应的确定性系统(45)在相同的通讯约束条件下是能观的. 其中, 观测噪声协方差矩阵 $R$ 是客观存在的, 状态协方差矩阵 $\Pi$ 由对象决定, 而预测误差协方差矩阵 $P$ 必然满足 $P \leq \Pi$ , 因此, 对于任意由状态空间模型描述的研究对象, 信道所能提供的最大功率成为决定随机系统的可估计性以及所对应的确定性系统的能观性的关键因素.

## 5 仿真(Simulation)

大量的MATLAB数值仿真表明, 本文的降维方法对于一般系统都有比较良好的性能. 仿真中利用各个状态估计误差(状态的实际值与估计值的差的平方的时间平均值和估计误差熵(用 $EH$ 表示)来考察算法的性能. 记

$$\Delta x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2,$$

其中:  $x_i$ 为状态的第 $i$ 个分量,  $\hat{x}_i$ 表示状态第 $i$ 个分量的估计值,  $N$ 表示时间. 分别对不同功率限制的情况进行了仿真. 由于状态维数较多和篇幅的限制, 这里只给出信道功率 $F = 3$ 时第一维状态的仿真曲线.

### 5.1 模型1(Model 1)

模型1取自文献[26], 该模型如下:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \Gamma\mathbf{w}(k),$$

其中 $\mathbf{u}(k)$ 表示系统输入项. 由于本文研究的是没有控制作用的随机系统, 则可对原模型作一些修改. 令 $\mathbf{u}(k) = 0$ ,  $\Gamma$ 为噪声输入矩阵, 不失一般性, 令 $\Gamma = B$ , 系统转移矩阵 $A$ 、输入矩阵 $B$ 具体如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0.3718 & -0.3111 & 0.1357 & -0.0557 \\ 0.9575 & 0.1524 & -0.0685 & 0.1043 \\ 0.3408 & -0.3287 & 0.3923 & -0.2060 \\ 0.0529 & -0.2922 & 0.9320 & 0.4835 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.2800 & 1.0400 \\ 1.6400 & 1.4000 \\ 1.0400 & 2.4000 \\ 0.8400 & 2.6000 \end{bmatrix}.$$

降维维数  $p = 2$ . 过程噪声  $\mathbf{w}(k)$ , 观测噪声  $\mathbf{v}(k)$  是不相关的零均值高斯白噪声序列, 其方差分别为

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}.$$

算法中参数  $\delta = 0.00001$ . 分别验证功率限制  $F = 2, 3, 5$  三种情况下所设计的系统, 均是可估计的. 仿真结果如表 1、图 2-4 所示.

表 1 中的数据是不同的功率限制下模型 1 各个状态估计误差平方和的时间平均值以及估计误差熵. 图 2 中的曲线为状态分量  $x_1$  的真实值(用  $Rx_1$  表示)与估计值(用  $Ex_1$  表示), 其中: 实线表示状态的真实值, 虚线表示状态的估计值. 观察可以发现实线与虚线非常接近, 估计误差较小. 图 3 为  $x_1$  的估计误差(用  $x_{1e}$  表示)曲线, 图 4 为估计误差熵(用  $EH$  表示)与功率限制(用  $F$  表示)的关系曲线. 可以发现, 信道功率的上限值越大, 状态估计的平均误差及误差熵就越小, 表明估计越准确, 这与预期是相一致的.

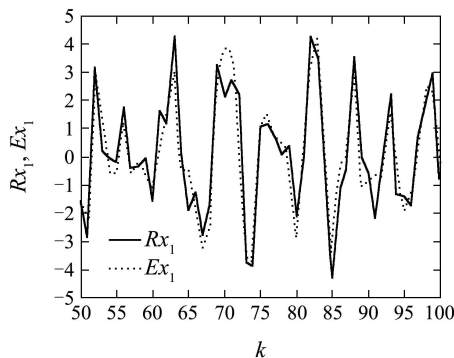


图 2  $F = 3$ , 状态  $x_1$  真实值与估计值  
Fig. 2 Actual value and estimate of  $x_1$  when  $F = 3$

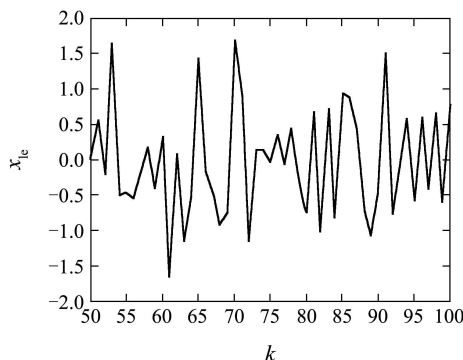


图 3  $F = 3$ , 状态  $x_1$  估计误差  
Fig. 3 Estimation error of  $x_1$  when  $F = 3$

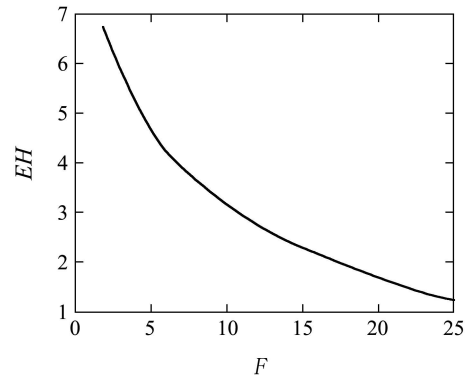


图 4 估计误差熵与功率限制的关系曲线  
Fig. 4 Relationship between estimation error entropy and power constraint

表 1 模型 1 仿真结果  
Table 1 Simulation results of Model 1

	$\Delta x_1$	$\Delta x_2$	$\Delta x_3$	$\Delta x_4$	$EH$
$F = 2$	1.4941	4.8818	4.1514	8.1170	6.7364
$F = 3$	1.0765	2.4509	2.5416	4.2905	5.9027
$F = 5$	0.5212	1.0388	1.4802	1.5856	4.6830

### 5.2 模型 2(Model 2)

模型 2 是一个目标跟踪模型, 来自文献[27]:

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = A(\delta_k)\mathbf{x}(t_k) + B(\delta_k)\mathbf{w}(t_k),$$

其中:  $t_k$  表示采样时刻,  $\delta_k = t_{k+1} - t_k$ , 系统转移矩阵  $A(\delta_k)$ 、输入矩阵  $B(\delta_k)$  具体如下:

$$A(\delta_k) = \begin{bmatrix} 1 & \delta_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \delta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \delta_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B(\delta_k) = \begin{bmatrix} \delta_k^2/2 & 0 & 0 \\ \delta_k & 0 & 0 \\ 0 & \delta_k^2/2 & 0 \\ 0 & \delta_k & 0 \\ 0 & 0 & \delta_k^2/2 \\ 0 & 0 & \delta_k \end{bmatrix}.$$

上式中, 取  $\delta_k = 2$ . 降维维数  $p = 3$ . 过程噪声  $\mathbf{w}(k)$ , 观测噪声  $\mathbf{v}(k)$  是不相关的零均值高斯白噪声序列, 其方差分别为  $Q = R = \text{diag}\{1, 1, 1\}$ , 算法中参数  $\delta = 0.00001$ . 分别验证功率限制  $F = 2, 3, 5$  三种情况下所设计的系统, 均是可估计的. 仿真结果如表 2、图 5-7 所示.

表 2 中的数据是不同的功率限制下模型 2 各个状态估计误差平方和的时间平均值以及估计误差熵. 图 5 中的曲线为状态  $x_1$  的真实值与估计值, 其中实线表示状态的真实值, 虚线表示状态的估计值, 图 6 为状态  $x_1$  的估计误差曲线, 图 7 为估计误差熵与功率限制的关系曲线. 观察模型 2 的仿真结果可以有与模型 1 相似的发现: 随着信道功率的增大, 状态估计的平均误差及误差熵减小, 估计就越准确, 与预期相一致.

注意到,该系统矩阵的特征值均为1,即该模型是非稳定的,这表明本文方法不仅适用于稳定对象,对于非稳定对象也具有良好的性能。

表2 模型2仿真结果

Table 2 Simulation results of Model 2

	$\Delta x_1$	$\Delta x_2$	$\Delta x_3$	$\Delta x_4$	$\Delta x_5$	$\Delta x_6$	$EH$
$F = 2$	124.4	10.4	95.2	5.6	147.6	11.6	18.4
$F = 3$	22.36	4.67	27.44	5.58	17.12	4.84	15.14
$F = 5$	4.13	2.01	5.98	3.25	6.52	3.04	12.12

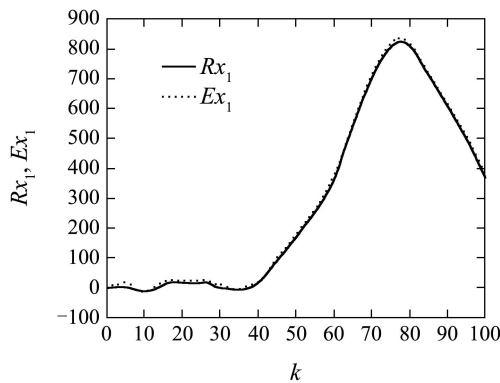


图5  $F = 3$ , 状态 $x_1$ 真实值与估计值

Fig. 5 Actual value and estimate of  $x_1$  when  $F = 3$

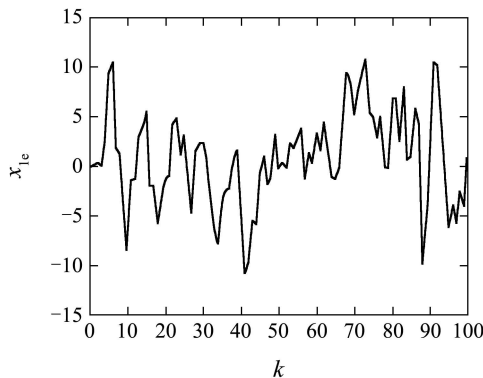


图6  $F = 3$ , 状态 $x_1$ 估计误差

Fig. 6 Estimation error of  $x_1$  when  $F = 3$

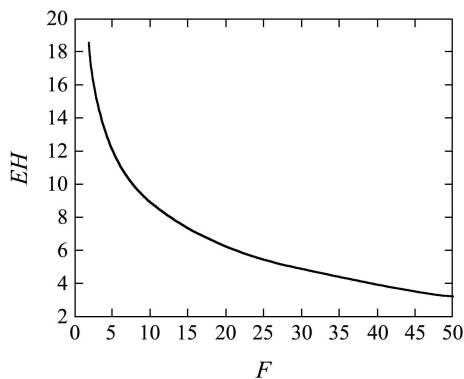


图7 估计误差熵与功率限制的关系曲线

Fig. 7 Relationship between estimation error entropy and power constraint

## 6 结论(Conclusion)

本文研究了在信道功率受限情况下的状态降维问题. 本文的方法是受到文献[6, 8]的启发. 基于最小误差熵估计准则和Kalman滤波算法, 在信道功率约束下, 得出了状态降维方法, 即降维矩阵的计算方法, 并且对所设计系统的可估计性以及它所对应确定性系统的能观性进行了分析. 分析和仿真结果表明, 本文所设计的降维方法可以在传输信号满足功率约束的条件下使得状态估计具有满意的性能; 并且, 当功率约束和系统参数满足一定关系时(式(39)), 系统是可估计的.

由于信道会受到带宽等因素的限制, 难以无限精确地传输连续幅值的信号, 通讯中常采用量化等编解码方法进行处理. 本文的进一步工作是在此基础上研究与系统估计和控制相关的量化问题.

## 参考文献(References):

- [1] HRISTU-VARSAKELIS D, ZHANG L. LQG control of networked control systems with access constraints and delays[J]. *International Journal of Control*, 2008, 81(8): 1266 – 1280.
- [2] 王丽娟, 章辉. 通讯访问约束条件下线性随机系统的状态可估计性[J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(9): 1111 – 1118. (WANG Lijuan, ZHANG Hui. On state estimability of linear stochastic system under communication access constraints[J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(9): 1111 – 1118.)
- [3] KAPUR J N. Application of entropic measures of stochastic dependence in pattern recognition[J]. *Pattern Recognition*, 1986, 19(6): 473 – 476.
- [4] JAIN A K. Image data compression: a review[J]. *Proceedings of the IEEE*, 1981, 69(3): 349 – 389.
- [5] 章辉. 控制系统中的信息描述与方法[D]. 杭州: 浙江大学, 2003. (ZHANG Hui. *Information descriptions and approaches in control systems*[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2003.)
- [6] RAMABADRAN T V, DEEPEN S. On the selection of measurements in least-squares estimation[C] // *Proceedings of the IEEE 1989 International Conference on Systems Engineering*. Piscataway, NJ: IEEE, 1989: 221 – 226.
- [7] RAMABADRAN T V, DEEPEN S. Speech data compression through sparse coding of innovations[J]. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 1994, 2(2): 274 – 284.
- [8] ARILDSEN T, MURTHI M N, ANDERSEN S V, et al. On predictive coding for erasure channels using a Kalman framework[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(11): 4456 – 4466.
- [9] WEIDEMANN H L, STEAR E B. Entropy analysis of estimating systems[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1970, 16(3): 264 – 270.
- [10] PROAKIS J G. 数字通信[M]. 第4版. 张力军, 张宗橙, 郑宝玉, 等译. 北京: 电子工业出版社, 2003: 89 – 91. (PROAKIS J G. *Digital Communications*[M]. 4th edition. ZHANG Lijun, ZHANG Zhongcheng, ZHENG Baoyu, et al, translated. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2003: 89 – 91.)
- [11] CHARLES J, MEADOW J R, FISHER THOMAS R, et al. Optimum rate allocation in quantized control[J]. *Optimal Control Applications & Methods*, 1986, 7(4): 377 – 388.
- [12] FISHER T R, TINNIN D J. Quantized control using differential encoding[J]. *Optimal Control Applications & Methods*, 1984, 5(1): 69 – 83.



- [13] FISHER T R. Quantized control with data compression constraints[J]. *Optimal Control Applications & Methods*, 1984, 5(1): 39 – 55.
- [14] COVER T M, THOMAS J A. *Elements of Information Theory*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003: 12 – 42, 230 – 231, 250 – 256.
- [15] 仇佩亮. 信息论与编码[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003, 43: 153 – 164.  
(QIU Peiliang. *Information Theory and Coding*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2003, 43: 153 – 164.)
- [16] 吕勇哉. 工业过程模型化及计算机控制[M]. 北京: 化学工业出版社, 1986: 193 – 199.  
(LÜ Yongzai. *Modelling of Industrial Process and Computer Control*[M]. Beijing: Chemical Industry Press, 1986: 193 – 199.)
- [17] BETTS J A. 信号处理、调制与噪声[M]. 张志明, 欧阳长月, 译. 北京: 人民邮电出版社, 1985: 85 – 89.  
(BETTS J A. *Signal Processing, Modulation and Noise*[M]. ZHANG Zhiming, OUYANG Changyue, translated. Beijing: Posts & Telecom Press, 1985: 85 – 89.)
- [18] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2001: 149 – 150.  
(SHENG Zhou, XIE Shiqian, PAN Chengyi. *Probability and Statistics*[M]. 3rd edition. Beijing: Higher Education Press, 2001: 149 – 150.)
- [19] AKCAKAYA M, TAROKH V. Shannon-theoretic limits on noisy compressive sampling[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(1): 492 – 504.
- [20] 李树英, 许茂增. 随机系统的滤波与控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991: 85 – 110.  
(LI Shuying, XU Maozeng. *Filtering and Controlling of Stochastic Systems*[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1991: 85 – 110.)
- [21] PAUL K, ROLAND P. Linear prediction, filtering, smoothing: an information-theoretic approach[J]. *Information Sciences*, 1979, 17(1): 1 – 14.
- [22] BARAM Y, KAILATH T. Estimability and regulability of linear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, 33(12): 1116 – 1121.
- [23] 章辉, 孙优贤. 随机系统的可估计性—信息理论方法[J]. 控制理论与应用, 1996, 13(5): 567 – 572.  
(ZHANG Hui, SUN Youxian. Estimability of stochastic systems – an information theory approach[J]. *Control Theory & Applications*, 1996, 13(5): 567 – 572.)
- [24] JAYNES E T. Information theory and statistical mechanics, I [J]. *Physical Review*, 1957, 106(4): 620 – 630.
- [25] JAYNES E T. Information theory and statistical mechanics, II [J]. *Physical Review*, 1957, 108(2): 171 – 190.
- [26] AHMED M S. A new algorithm for state estimation of stochastic discrete systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(8): 1652 – 1656.
- [27] SINHA A, KIRUBARAJAN T, BARSHALOM Y. Tracker and signal processing for the benchmark problem with unresolved targets[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, 42(1): 279 – 300.

#### 作者简介:

沈英 (1987—), 女, 研究方向为通讯约束下的线性动态控制系统, E-mail: yshen@iipc.zju.edu.cn;

章辉 (1967—), 男, 副教授, 研究方向为通讯约束控制系统、控制系统的信息论方法等, E-mail: zhanghui@iipc.zju.edu.cn, 通讯作者.