

# 非线性时变时滞FAST TCP系统低保守全局稳定性

陈晓龙<sup>1,2</sup>, 章云<sup>1</sup>, 刘治<sup>1</sup>

(1. 广东工业大学 自动化学院, 广东 广州 510090;

2. 广东石油化工学院 计算机与电子信息学院, 广东 茂名 525000)

**摘要:** 研究了非线性、时变时滞的FAST TCP系统的全局稳定性. 首先, 利用其时滞变化与源端发送窗口变化成比例关系和其非线性函数是严格单调递减函数这两个特性, 计算每个振荡周期的解轨迹界, 建立了解轨迹界的迭代关系, 得到了和已有结论相同的全局稳定性条件. 然后, 改进了计算每个振荡周期解轨迹界方法, 得到了比已有结论更低保守的全局稳定性条件. 最后, 通过NS-2仿真实例验证了改进的全局稳定性条件的有效性.

**关键词:** 非线性; 时变时滞; 全局稳定性; 解轨迹界

**中图分类号:** TP202      **文献标识码:** A

## Less conservative global stability for nonlinear FAST TCP system with time-varying time-delay

CHEN Xiao-long<sup>1,2</sup>, ZHANG Yun<sup>1</sup>, LIU Zhi<sup>1</sup>

(1. School of Automation, Guangdong University of Technology,  
Guangzhou Guangdong, 510090 China;

2. School of Computer and Electronics Information, Guangdong University of Petrochemical Technology,  
Maoming Guangdong, 525000 China)

**Abstract:** In this paper, the global stability of nonlinear FAST TCP system with time-varying time-delay is studied. Firstly, by capturing the characters that the time-delay variation is proportional to the TCP source's sending window variation and the nonlinear function is strictly monotone decreasing, the trajectory bounds of the FAST TCP system in each oscillating period are calculated and the iterative formulas of the trajectory bounds are acquired, then the same global stability condition as the existing conclusions is obtained. Secondly, the calculation method for the trajectory bounds is improved and the less conservative global stability condition of the FAST TCP system in contrast to the existing conclusions is acquired. Finally, the NS-2 simulation results validate the effectiveness of this improved global stability condition.

**Key words:** nonlinear; time-varying time-delay; global stability; trajectory bounds

### 1 引言(Introduction)

FAST TCP (Fast Active queue management Scalable Transmission Control Protocol, 简称FAST)<sup>[1,2]</sup>是针对下一代高速网络提出的一种新型传输控制协议. 在高速网络环境中, 与基于分组丢失作为拥塞反馈信号的其他改进TCP协议相比, FAST协议采用排队延时信息计算FAST连接留在链路缓冲区的分组个数, 以期望留在链路缓冲区分组的个数为平衡点, 根据实际留在链路缓冲区的分组个数距离平衡点位置的远近, 非线性地调整发送窗口大小变化的快慢, 不需要网络层中间节点参与, 主动控制留在链路缓冲区队列长度, 从而主动避免了缓冲区队列溢出和拥塞现象的出现, 取得了更好的稳定性和更充分的链路使用效率<sup>[1]</sup>, 但其存在如何选择合适的

协议参数, 使FAST系统表现出良好的稳定性这个公开问题<sup>[1~3]</sup>.

FAST系统本质上是时变时滞、非线性的复杂系统. 文献[4~7]用平均的往返延时近似FAST系统时变时滞, 并将FAST系统在平衡点线性化, 应用pade近似式替换该时滞系统特征方程的指数项, 然后分别采用赫尔维兹稳定判据和乃奎斯特稳定性判据研究了其局部稳定性. 文献[8~10]研究了单源单链路FAST系统的全局稳定性. 文献[8]用最大的往返延时近似FAST系统时变时滞项, 应用Lyapunov-Krasovskii稳定性定理分析了其全局稳定性. 文献[9]应用Lyapunov-Razumikhin稳定性定理分析了其全局稳定性, 但在该文献的主要定理数学推导过程中忽略了其时变时滞的特征, 用常数的时滞

项替换了其时变时滞项. 文献[10]采用Lyapunov-Razumikhin 稳定性定理和LMI 方法, 考虑了其时变时滞的特征, 修改了上述定理推导过程中出现的数学错误, 降低了文献[9]中FAST系统全局稳定性条件的保守性.

文献[11]采用解轨迹界方法分析了文献[12]提出的网络拥塞控制时滞模型的全局稳定性, 但在分析过程中没有考虑其时滞的时变特性, 用平均的往返延时近似其时变时滞.

本文在文献[8~10]给出的非线性、时变时滞FAST系统的基础上, 充分利用其非线性函数是严格单调递减函数, 其时滞变化与源端发送窗口变化成比例关系, 分析了该系统解轨迹界<sup>[11]</sup>的变化规律, 获得了比文献[10]更低保守的FAST系统全局稳定性条件.

## 2 FAST系统描述和预备知识(FAST system formulation and preliminaries)

### 2.1 非线性时变时滞FAST系统(Nonlinear FAST system with time-varying time-delay)

考虑如下的单源单链路非线性、时变时滞的FAST拥塞控制系统<sup>[8~10]</sup>:

$$\dot{w}(t) = \frac{\gamma}{T} \left( \alpha - \frac{w(t)}{d + q(t)} q(t) \right) \quad (1)$$

$$\frac{w(t - R(t))}{d + q(t)} = c \quad (2)$$

其中 $\gamma$ 为源端控制律增益参数;  $T$ 为源端窗口更新周期(s);  $\alpha$ 为源端协议参数(packet/s);  $c$ 为链路带宽(packet/s);  $d$ 为传播延时(s);  $w(t)$ 为源端在 $t$ 时刻发送窗口(packet/s);  $q(t)$ 为源端在 $t$ 时刻估计的排队延时(s);  $R(t)$ 为源端在 $t$ 时刻估计的往返延时(s), 其中 $R(t) = d + q(t)$ , 由式(2)得 $R(t) = w(t - R(t))/c$ , 表明其时滞 $R(t)$ 的变化与源端发送窗口变化成比例关系<sup>[8~10]</sup>.

由文献[8~10]知, 当FAST系统处于拥塞状态时, 有 $q(t) > 0$ 和 $w(t) > cd$ .

$$\text{由式(2)得: } q(t) = \frac{w(t - R(t))}{c} - d.$$

将上式代入式(1)得非线性、时变时滞FAST拥塞控制系统:

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= f(w(t), w(t - R(t))) \\ &= r \left( \alpha - w(t) \left( 1 - \frac{cd}{w(t - R(t))} \right) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$w(t) = \phi_0 > cd, t \in (-\max(R(t)), 0]$$

其中 $r = \gamma/T$ ,  $\phi_0$ 为初始条件<sup>[13]</sup>. 由文献[1,8~10]知, 系统(3)存在唯一平衡点 $w_0$ , 且 $w_0 = cd + \alpha$ .

### 2.2 预备知识(Preliminaries)

FAST系统的全局稳定性和式(3)右边的非线性函数 $f(w(t), w(t - R(t)))$ 的性质、时滞 $R(t)$ 的变化规律有关. 因此, 先给出如下有关该非线性函数和时滞变化性质的引理.

**引理 1** (a) 若 $w(t) = w_0$ 和 $w(t - R(t)) = w_0$ , 则 $f(w(t), w(t - R(t))) = 0$ .

(b)  $\dot{f}_{w(t)}(w(t), w(t - R(t))) < 0$ ,  $\dot{f}_{w(t-R(t))}(w(t), w(t - R(t))) < 0$ , 即非线性函数 $f(w(t), w(t - R(t)))$ 为严格单调递减函数.

(c) 若 $w(t) \geq w_0$ 且 $w(t - R(t)) > w_0$ 或 $w(t) > w_0$ 且 $w(t - R(t)) \geq w_0$ , 则 $f(w(t), w(t - R(t))) < 0$ . 若 $w(t) \leq w_0$ 且 $w(t - R(t)) < w_0$ 或 $w(t) < w_0$ 且 $w(t - R(t)) \leq w_0$ , 则 $f(w(t), w(t - R(t))) > 0$ .

证明:

(a) 将 $w(t) = w_0, w(t - R(t)) = w_0$ 代入式(3)得:

$$\begin{aligned} f(w(t), w(t - R(t))) &= r \left( \alpha - w_0 \left( 1 - \frac{cd}{w_0} \right) \right) \\ &= r(\alpha - w_0 + cd) = 0 \end{aligned}$$

(b) 当FAST系统处于拥塞状态时, 总有 $w(t) > cd$ <sup>[8~10]</sup>, 对 $f(w(t), w(t - R(t)))$ 求偏导得:  $\dot{f}_{w(t)}(w(t), w(t - R(t))) = -r \left( 1 - \frac{cd}{w(t - R(t))} \right)$ , 由各参数物理意义知, 其取值均大于0, 因此得 $\dot{f}_{w(t)}(w(t), w(t - R(t))) < 0$ . 同理得 $\dot{f}_{w(t-R(t))}(w(t), w(t - R(t))) = -\frac{rcdw(t)}{w^2(t - R(t))} < 0$ . 该函数为严格单调递减函数. 由(a)、(b)可推出(c)成立. 证毕.

**引理 2**<sup>[8]</sup>: FAST系统(3)的解 $w(t)$ 有界, 往返延时 $R(t)$ 有界.

下面利用时滞 $R(t)$ 的变化与源端窗口变化成比例关系给出 $t - R(t)$ 与 $t$ 的关系.

**引理 3** (a) 给定时间变量 $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ , 若 $\tau_1 < \tau_2$ 和 $\tau_1 < \tau_3$ , 且 $\tau_2 - R(\tau_2) = \tau_3 - R(\tau_3) = \tau_1$ , 则 $\tau_2 = \tau_3$ .

(b) 给定时间变量 $\tau_1, \tau_2$ , 若 $\tau_1 < \tau_2$ , 则有:  $\tau_1 - R(\tau_1) < \tau_2 - R(\tau_2)$ .

证明: (a): 由式(2)知:  $R(\tau_2) = w(\tau_2 - R(\tau_2))/c, R(\tau_3) = w(\tau_3 - R(\tau_3))/c$ ,

因此有:  $R(\tau_2) = R(\tau_3) = w(\tau_1)/c$ , 所以有 $\tau_2 = \tau_3$ .

(b): 反证法, 假设 $\tau_2 - R(\tau_2) \leq \tau_1 - R(\tau_1)$ , 由(a)知,  $\tau_1 - R(\tau_1) = \tau_2 - R(\tau_2)$ 不成立, 因此有 $\tau_2 - R(\tau_2) < \tau_1 - R(\tau_1)$ . 由引理2知,  $R(t)$ 有界. 故一定存在一个 $\tau_3$ , s.t.  $\tau_1 - R(\tau_1) < \tau_2 < \tau_3 - R(\tau_3) < \tau_3$ .

由式(2)知,  $t - R(t)$ 是连续函数, 因此当 $t$ 从 $\tau_2 \rightarrow \tau_3$ 时,  $t - R(t)$ 则从 $(\tau_2 - R(\tau_2)) \rightarrow (\tau_3 - R(\tau_3))$ . 由于 $\tau_2 - R(\tau_2) < \tau_1 - R(\tau_1) < \tau_3 - R(\tau_3)$ , 因此一定存在一个 $\tau_4 \in (\tau_2, \tau_3)$ , s.t.  $(\tau_1 - R(\tau_1)) = (\tau_4 - R(\tau_4))$ . 由(a)得:  $\tau_1 = \tau_4$ , 这与 $\tau_1 < \tau_2 < \tau_4$ 矛盾, 因此(b)成立. 证毕.

### 2.3 轨迹特征(Trajectory characteristic)

根据引理1中非线性函数的性质、引理2和引理3的结论, 可估计出系统(3)的解轨迹的变化特征:

**定理 1** (a)若存在 $t = t_0$ , 有 $w(t_0) = w_0, \dot{w}(t_0) > 0$ , 则一定存在 $t = t_2 > t_0$ , 有 $w(t_2) = w_0, \dot{w}(t_2) \leq 0$ .

(b)若存在 $t = t_0$ , 有 $w(t_0) = w_0, \dot{w}(t_0) < 0$ , 则一定存在 $t = t_2 > t_0$ , 有 $w(t_2) = w_0, \dot{w}(t_2) \geq 0$ .

证明: (a)

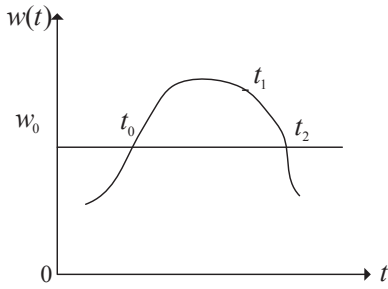


图1 系统(3)的部分解轨迹

Fig. 1 Part trajectories of system (3)

如图1所示, 假设系统(3)的解轨迹 $w(t)$ 在 $t_0$ 时刻有 $w(t_0) = w_0, \dot{w}(t_0) > 0$ , 即由下至上穿越平衡点 $w_0$ .

由式(1)和 $R(t) = w(t - R(t))/c$ 知,  $w(t), R(t)$ 和时间变量 $t$ 是连续函数变化的, 故存在 $t_1 = t_0 + R(t_1)$ , s.t.  $R(t_1) = w(t_1 - R(t_1))/c = w(t_0 + R(t_1) - R(t_1))/c = w(t_0)/c = w_0/c$ .

1)若 $t \in (t_0, t_1]$ , 存在 $w(t) < w_0$ 情况, 由于该解轨迹是连续的, 则一定存在 $t = t_2 \in (t_0, t_1]$ , 有 $w(t_2) = w_0, \dot{w}(t_2) \leq 0$ , 结论 (a) 成立.

下面考虑若 $t \in (t_0, t_1]$ , 不存在 $w(t) < w_0$ 情况, 即对 $t \in (t_0, t_1]$ , 有 $w(t) \geq w_0$ .

2)若 $w(t_1) = w_0$ , 且对 $t \in (t_0, t_1]$ , 有 $w(t) = w_0$ , 则由引理3(b)知, 对 $t \geq t_1, w(t) = w(t - R(t)) = w_0$ . 因此, 由引理1(a)知, 对 $t \geq t_1$ , 有 $\dot{w}(t) = 0$ , 系统收敛到平衡点.

3)若 $w(t_1) = w_0$ , 且对 $t \in (t_0, t_1)$ , 存在 $w(t) > w_0$ 的情况, 则由引理3(b)知, 对 $t \geq t_1$ , 存在 $w(t - R(t)) > w_0$ 和 $w(t) = w_0$ 的情况. 因此, 由引理1(c)知, 对 $t \geq t_1$ , 存在 $w(t) = w_0, \dot{w}(t) \leq 0$ 情况, 解轨迹会向下穿越平衡点, 结论 (a) 成立.

4). 若 $w(t_1) > w_0$ , 且对 $t \in (t_0, t_1)$ , 有 $w(t) \geq w_0$ , 由引理1(c)知 $\dot{w}(t_1) < 0$ .

若该解轨迹不下穿该平衡点, 则对于 $t > t_1$ , 有 $w(t) > w_0$ . 则由引理3(b)知,  $t - R(t) > t_1 - R(t_1) = t_0$ , 因此有 $w(t - R(t)) \geq w_0$ . 由引理1(c)知, 对于 $t > t_1, \dot{w}(t) < 0$ . 由引理2知, 系统(3)的解有界, 则该解轨迹不可能总是出现在 $w(t) > w_0$ 的区域. 一定存在 $t = t_2 > t_0$ , 有 $w(t) = w_0$ . 由本定理证明过程2)、3)知结论(a)成立. 同理, 可证明结论(b)成立. 证毕.

由定理1可估计系统(3)解 $w(t)$ 轨迹如图2所示. 因此, 将图2中轨迹每一次上下穿越平衡点定义为一个振荡周期, 通过研究其每个振荡周期轨迹界、及前后周期轨迹界的关系来研究系统(3)的稳定性.

### 2.4 振荡周期轨迹界(Trajectory bounds of oscillating period)

根据图2, 定义第 $i$ 个振荡周期区间:  $I_i = \bar{I}_i \cup \underline{I}_i$ , 其中 $I_0 = \bar{I}_0 = \underline{I}_0 = [-\max(R(t)), t_1]$ ,  $\bar{I}_i = \{t | w(t) \geq w_0, t \in [t_{k_i}, t_{k_{i+1}}]\}$ ,  $\underline{I}_i = \{t | w(t) \leq w_0, t \in [t_{k_{i+1}}, t_{k_{i+2}}]\}$ ,  $k_i = 2i - 1, i = 1, 2, \dots$

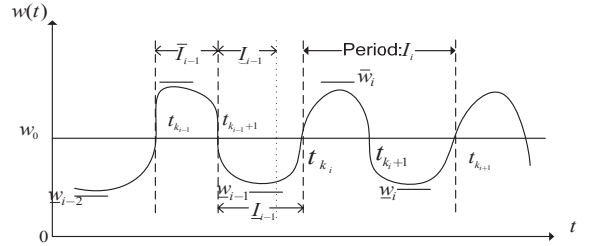


图2 系统(3)的解轨迹

Fig. 2 Trajectories of system (3)

对每个振荡周期 $i$ , 存在:

$$\begin{aligned} w(t_{k_i}) &= w(t_{k_{i+1}}) = w_0, \\ \dot{w}(t_{k_i}) &> 0, \dot{w}(t_{k_{i+1}}) < 0 \end{aligned} \quad (4)$$

定义每个振荡周期 $i$ 轨迹上、下界:

$$\begin{aligned} \bar{w}_i &\in \bar{W}_i = \{w | w \geq \max_{t \in \bar{I}_i}(w(t))\}, \\ \underline{w}_i &\in \underline{W}_i = \{w | cd \leq w \leq \min_{t \in \underline{I}_i}(w(t))\} \end{aligned} \quad (5)$$

由文献 [8~10]知, 当系统处于拥塞状态时, 总有 $w(t) > cd$ , 因此有 $\underline{w}_0 = cd$ .

对每个振荡周期 $i$ , 定义如下区间:

$$\begin{aligned} \bar{I}_i^+ &= \{t | \dot{w}(t) > 0, t \in \bar{I}_i\} \\ \underline{I}_i^- &= \{t | \dot{w}(t) < 0, t \in \underline{I}_i\} \\ \hat{I}_i &= [t_{k_i}, t_{k_i} + t'), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\underline{I}_i = [t_{k_i+1}, t_{k_i+1} + t'] \quad \text{其中 } t' = w_0/c \quad (7)$$

由式(3)得:  $w(t) = w(t_{k_i}) + \int_{t_{k_i}}^t \dot{w}(t)dt, t \in \bar{I}_i$

由上式和式(6)知要求其上界, 只需对  $\dot{w}(t) > 0$  的区间求积分即可. 因此有:  $w(t) \leq w_0 + \int_{\bar{I}_i^+} \dot{w}(t)dt, t \in \bar{I}_i$ . 由于函数  $f(w(t), w(t - R(t)))$  是严格单调递减函数. 为了求出上界, 可用最小值  $\min_{t \in \bar{I}_i} (w(t)) = w_0$  替换整个积分区间上  $w(t)$  得:

$$w(t) \leq w_0 + \int_{\bar{I}_i^+} rcd \left( \frac{w_0}{w(t - R(t))} - 1 \right) dt, t \in \bar{I}_i \quad (8)$$

同理得:

$$w(t) \geq w_0 + \int_{\underline{I}_i^-} rcd \left( \frac{w_0}{w(t - R(t))} - 1 \right) dt, t \in \underline{I}_i \quad (9)$$

由式(8)和式(9)知, 如果能够准确界定时滞项  $w(t - R(t))$  的界和相应的积分区间  $\bar{I}_i^+, \underline{I}_i^-$  长度, 可依次计算每个振荡周期的界. 而要界定时滞项  $w(t - R(t))$  的界, 则需要研究  $t - R(t)$  与相应的积分区间  $\bar{I}_i^+, \underline{I}_i^-$  的变化关系, 界定出  $t - R(t)$  的取值范围.

下面定理给出了  $t - R(t)$  与相应的积分区间  $\bar{I}_i^+, \underline{I}_i^-, \bar{I}_i$  和  $\underline{I}_i$  的变化关系, 界定出  $t - R(t)$  的取值范围和相应积分区间的长度:

**定理 2** 对每个周期  $i$ , 有:

(a) 若  $t \in \bar{I}_i^+$ , 则  $t - R(t) \in \underline{I}_{i-1}$ ;

(b) 若  $t \in \underline{I}_i^-$ , 则  $t - R(t) \in \bar{I}_i$ ;

(c)  $\bar{I}_i^+ \subseteq \bar{I}_i, \underline{I}_i^- \subseteq \underline{I}_i$ ;

(d) 若  $t \in \bar{I}_i$ , 则  $t - R(t) \in \underline{I}_{i-1} \cup \bar{I}_i$ ; 若  $t \in \underline{I}_i$ , 则  $t - R(t) \in \bar{I}_i$ ;

(e) 若  $t \in \bar{I}_i$ , 则  $t - R(t) \in \underline{I}_{i-1}$ ; 若  $t \in \underline{I}_i$ , 则  $t - R(t) \in \bar{I}_i$ .

证明: (a)、(b)采用归纳法:

当  $i$  为 1 时, 若  $t \in \bar{I}_1^+$ , 由式(6)知  $w(t) \geq w_0$ , 由引理 1(c) 知, 此时要保证  $\dot{w}(t) > 0$ , 则要求  $w(t - R(t)) < w_0$ , 因此有  $t - R(t) \in \underline{I}_0$ .

同理, 若  $t \in \underline{I}_1^-$ , 则必有  $w(t - R(t)) > w_0$ , 因此有  $t - R(t) \in \bar{I}_1$ , 结论成立.

假设  $i - 1 (i > 1)$  时成立, 即:

若  $t \in \bar{I}_{i-1}^+$ , 则  $t - R(t) \in \underline{I}_{i-2}$ ;

若  $t \in \underline{I}_{i-1}^-$ , 则  $t - R(t) \in \bar{I}_{i-1}$ , 即  $t - R(t) > t_{k_{i-1}}$ .

由式(4)知, 此时  $w(t - R(t)) \geq w_0$ , 由式(2)得  $R(t) = w(t - R(t))/c \geq w_0/c, t \in \underline{I}_{i-1}$ .

因此有:

$$t_{k_i} - t_{k_{i-1}} > t - t_{k_{i-1}} > R(t) \geq w_0/c \quad (10)$$

现证明  $i (i > 2)$  时成立.

先证(a), 若  $t \in \bar{I}_i^+$ , 则  $t - R(t) \in \underline{I}_{i-1}$  成立.

由式(6)知, 当  $t \in \bar{I}_i^+$  有  $\dot{w}(t) > 0$  和  $w(t) \geq w_0$ . 由引理 1(c) 知, 要保证  $\dot{w}(t) > 0$ , 则要求  $w(t - R(t)) < w_0$ .

反证法, 假设  $t - R(t) \in \underline{I}_{i-1}$  不成立.

则可向前取一个 s.t.  $w(t - R(t)) < w_0$  的区间:

即假设  $t - R(t) \in \underline{I}_{i-2}$  成立, 则有  $w(t - R(t)) < w_0$ , 其中  $t \in \bar{I}_i^+$ . 由式(2)知, 当  $t - R(t) \in \underline{I}_{i-2}$ , 有  $R(t) = w(t - R(t))/c < w_0/c$ . 由于  $t \in \bar{I}_i^+$ ,  $t - R(t) \in \underline{I}_{i-2}$ , 则有  $t > t_{k_i}, t_{k_{i-1}} > t - R(t)$ , 因此有  $t_{k_i} - t_{k_{i-1}} < t - (t - R(t)) \leq w_0/c$ , 这与式(10)  $t_{k_i} - t_{k_{i-1}} > w_0/c$  矛盾.

同理可证再向前取一个 s.t.  $w(t - R(t)) < w_0$  的区间也会与式(10)矛盾. 因此结论成立.

再证明(b): 若  $t \in \underline{I}_i^-$ , 则  $t - R(t) \in \bar{I}_i$ .

由式(6)知当  $t \in \underline{I}_i^-$  有  $\dot{w}(t) < 0$  和  $w(t) \leq w_0$ . 由引理 1(c) 知, 要保证  $\dot{w}(t) < 0$ , 则要求  $w(t - R(t)) > w_0$ .

反证法, 假设  $t - R(t) \in \bar{I}_i$  不成立.

则向前取一个 s.t.  $w(t - R(t)) > w_0$  的区间,

即假设  $t - R(t) \in \bar{I}_{i-1}$ ,  $w(t - R(t)) > w_0$ , 其中  $t \in \underline{I}_i^-$

即存在:

$$\tau_2 \in \underline{I}_i^-, \tau_2 - R(\tau_2) \in \bar{I}_{i-1} \quad (11)$$

由本定理(a)得  $t \in \bar{I}_i^+$ , 则  $t - R(t) \in \underline{I}_{i-1}$  知, 存在:

$$\tau_1 \in \bar{I}_i^+, \tau_1 - R(\tau_1) \in \underline{I}_{i-1} \quad (12)$$

由式(11)和式(12)可得存在  $\tau_1 < \tau_2, \tau_2 - R(\tau_2) < \tau_1 - R(\tau_1)$  情况, 这与引理 3(b) 矛盾.

同理可证再向前取一个 s.t.  $w(t - R(t)) > w_0$  的区间也会与引理 3(b) 矛盾. 因此结论(a)、(b)成立.

(c) 先证  $\bar{I}_i^+ \subseteq \bar{I}_i$

设  $\tilde{I}_i = [\tilde{t} - R(\tilde{t}), \tilde{t}]$ , 其中  $t_{k_i} = \tilde{t} - R(\tilde{t})$ , 由式(2)知  $R(\tilde{t}) = w(\tilde{t} - R(\tilde{t})) = w(t_{k_i}) = w_0/c$ , 因此有  $\tilde{t} = t_{k_i} + w_0/c$ , 由式(7)得  $\tilde{I}_i = \bar{I}_i$ . 若  $\tilde{t} \geq t_{k_i+1}$ , 则可得:  $\bar{I}_i^+ \subseteq \bar{I}_i \subseteq \tilde{I}_i = \bar{I}_i$ . 若  $\tilde{t} < t_{k_i+1}$ , 由式(4)和式(6)知  $w(\tilde{t}) > w_0, w(\tilde{t} - R(\tilde{t})) = w_0$ , 则由引理 1(c) 知  $\dot{w}(\tilde{t}) < 0$ . 进一步, 由引理 3(b) 知, 对所有  $t \in [\tilde{t}, t_{k_i+1}]$ , 均 s.t.  $w(t) > w_0$  和  $w(t - R(t)) \geq w_0$ , 由引理 1(c) 知, 对  $t \in [\tilde{t}, t_{k_i+1}]$  有  $\dot{w}(t) < 0$ , 因此有  $\bar{I}_i^+ \subseteq \tilde{I}_i = \bar{I}_i$ . 同理可证  $\underline{I}_i^- \subseteq \underline{I}_i$ .

(d) (e): 先证明若  $t \in \underline{I}_i$ , 则  $t - R(t) \in \bar{I}_i$ .

由(b)知, 存在  $t_{k+1}$  和  $t_{k_i+1} - R(t_{k_i+1}) \in [t_{k_i}, t_{k_i+1}]$ , 则由引理 3(b) 知若  $t \in \underline{I}_i$ , 有  $t - R(t) \geq t_{k_i+1} -$

$R(t_{k_i+1}) \geq t_{k_i}$ , 即若  $t \in \underline{I}_i$ , 有  $t - R(t) \in \underline{I}_i$ . 同理可证(d) (e)中其它结论. 证毕.

利用定理2的结论和单调递减的非线性函数的性质, 由式(8)、式(9)可计算出每个振荡周期*i*的解轨迹上下界及前后周期的解轨迹界的迭代关系:

**引理 4** 对每个振荡周期*i*:

$$\bar{w}_i = w_0 + rcd\left(\frac{w_0}{\underline{w}_{i-1}} - 1\right) \cdot \frac{w_0}{c} \quad i = 1, 2, \dots \quad (13)$$

$$\underline{w}_i = w_0 + rcd\left(\frac{w_0}{\bar{w}_i} - 1\right) \cdot \frac{w_0}{c} \quad i = 1, 2, \dots \quad (14)$$

其中, 对  $t \in I_0$ , 有  $\underline{w}_0 = cd$ .

证明: 由式(8)和定理2(c)得:

$$w(t) \leq w_0 + \int_{\bar{I}_i} rcd\left(\frac{w_0}{w(t-R(t))} - 1\right) dt \quad t \in \bar{I}_i \quad (15)$$

由定理2(e)和式(5)可得:  $\min_{t \in \bar{I}_i} w(t - R(t)) \geq \min_{(t-R(t)) \in \underline{I}_{i-1}} w(t - R(t)) = \underline{w}_{i-1}$ .

由式(7)得  $\bar{I}$  的区间长度为  $w_0/c$ , 由式(15)和非线性函数是严格单调递减函数, 将最小的下界值  $\underline{w}_{i-1}$  替换了时滞项  $w(t - R(t))$  在整个积分区间  $\bar{I}_i$  内的轨迹得其上界  $\bar{w}_i$ :

$$\begin{aligned} w(t) &\leq w_0 + \int_{\bar{I}_i} rcd\left(\frac{w_0}{w(t-R(t))} - 1\right) dt \\ &\leq w_0 + rcd\left(\frac{w_0}{\underline{w}_{i-1}} - 1\right) \cdot \frac{w_0}{c} \quad t \in \bar{I}_i \end{aligned}$$

上式右边即如式(13)的  $\bar{w}_i$ , 同理可求出  $\underline{w}_i$ , 如式(14). 证毕.

### 3 稳定性分析(Stability analysis)

由引理4的式(13)和式(14)的上下界的迭代关系知, 只要相关参数设置能够满足:

$$\underline{w}_1 > \underline{w}_0 \quad (16)$$

则有:  $\lim_{i \rightarrow \infty} \underline{w}_i = w_0$ ,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{w}_i = w_0$ <sup>[11]</sup>, 由式(5)得  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = w_0$ .

将  $\underline{w}_0 = cd$  代入式(13)得:

$$\bar{w}_1 = w_0 + rcd\left(\frac{w_0}{\underline{w}_0} - 1\right) \cdot \frac{w_0}{c} = w_0(1 + r\alpha/c) \quad (17)$$

将式(17)代入式(14)得:

$$\underline{w}_1 = w_0 + rcd\left(\frac{w_0}{\bar{w}_1} - 1\right) \cdot \frac{w_0}{c} = w_0 - \frac{r^2\alpha dw_0}{c + r\alpha} \quad (18)$$

将  $\underline{w}_0 = cd$ ,  $w_0 = cd + \alpha$  和式(18)代入式(16)得:

$$r(1 - rd)\alpha > c(r^2d^2 - 1)$$

由各协议参数物理意义知, 其取值均大于0, 因此得:

$$\text{若 } 1 - rd > 0 \text{ 则有: } \alpha > -c(rd + 1)/r \quad (19)$$

$$\text{若 } 1 - rd < 0 \text{ 则有: } \alpha < -c(rd + 1)/r \quad (20)$$

由式(19)、式(20)和各参数的物理意义知, 若取  $rd < 1$ ,  $\alpha > 0$ , 即  $\gamma d/T < 1$ , 可设置  $\alpha > 0$ , 则由式(3)描述的FAST系统全局稳定.

上述稳定性结论和文献<sup>[10]</sup>采用Lyapunov-Razumikhin定理证明的结论完全一致. 由引理4的证明知, 在计算上界  $\bar{w}_i$  时, 都是用一个最小的下界值  $\underline{w}_{i-1}$  替换了时滞项  $w(t - R(t))$  在整个积分区间  $\bar{I}_i$  内的轨迹, 因此求出的上界具有较大的保守性. 如图3所示, 为了降低求上界的保守性, 将式(8)的积分区间  $\bar{I}_i$  拆分成  $n + 1$  个小区间, 每个小区间分别用更准确的下界值替换, 从而求出更准确的上界, 降低文献<sup>[10]</sup>的全局稳定性条件的保守性. 为了和式(13)、式(14)的上、下界区标记分开, 定义如下的上、下界变量:  $\bar{w}'_i \in \bar{W}_i$ ,  $\underline{w}'_i \in \underline{W}_i$ . 积分区间  $\bar{I}_i$  与  $n + 1$  个小区间的关系表示如下:

$$\bar{I}_i = \bigcup_{j=0}^n \bar{I}_{i,j},$$

其中  $\bar{I}_{i,0} = [t_{k_i}, t_{k_i} + w_0/c - n\Delta)$ ,  $\bar{I}_{i,j} = [t_{k_i} + w_0/c - j\Delta, t_{k_i} + w_0/c - (j-1)\Delta)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $\Delta = d/m$ .

上式中  $n, m$  为可选参数,  $n$  决定拆分区间数量,  $m$  决定了拆分区间的长度  $\Delta = d/m$ . 为了保证上述拆分的第一个小区间  $\bar{I}_{i,0}$  长度  $w_0/c - n\Delta$  为正值,  $n, m$  的选择需 s.t.  $n\Delta < w_0/c$ , 即  $nd/m < w_0/c$ .

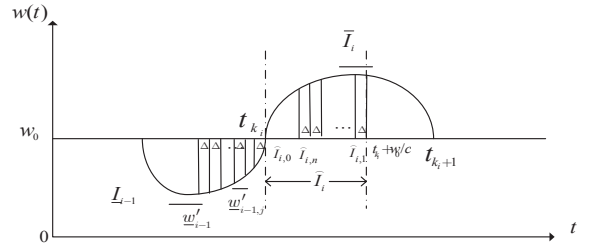


图3 积分区间的划分

Fig. 3 Subdivision of integral interval

为了获得每一个小区间所对应的时滞项  $w(t - R(t))$  的下界, 给出如下引理:

**引理 5** (a) 若  $t \in \bar{I}_{i,j}$  和  $j > 0$ , 则  $t - R(t) > t_{k_i} - j\Delta$ ;

(b)  $\max_{t \in \bar{I}_i} (\dot{w}(t)) \leq r(w_0 - \underline{w}'_i)$ ;

(c)  $\min_{t \in \bar{I}_{i,j}} (w(t - R(t))) \geq w_0 - j\Delta r(w_0 - \underline{w}'_{i-1})$ .

证明: (a) 由定理2(e), 若  $t \in \bar{I}_{i,j}$  和  $j > 0$ , 则  $t - R(t) \in \underline{I}_{i-1}$ , 由式(2)得  $R(t) = w(t - R(t))/c < w_0/c$ . 由  $\bar{I}_{i,j}$  的定义知  $t - R(t) > t_{k_i} + w_0/c - j\Delta - R(t) > t_{k_i} - j\Delta$ .

(b) 由定理2(d)得  $\min_{t \in \bar{I}_i} (w(t - R(t))) = \underline{w}'_i$ ; 由

式(6)得 $\min_{t \in \underline{I}_i}(w(t)) = \underline{w}'_i$ , 由引理1(c)得:

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= r(\alpha - w(t)(1 - \frac{cd}{w(t-R(t))})) \\ &\leq r(\alpha - \underline{w}'_i(1 - \frac{cd}{\underline{w}'_i})) \\ &= r(\alpha - \underline{w}'_i + cd) = r(w_0 - \underline{w}'_i), t \in \underline{I}_i \end{aligned}$$

因此有:  $\max_{t \in \underline{I}_i}(\dot{w}(t)) \leq r(w_0 - \underline{w}'_i)$ .

(c) 由式(2)知, 当 $t - R(t) = t_{k_i}$ , 有 $R(t) = w_0/c$ 和 $t = t_{k_i} + w_0/c$ .

由本引理(a)知, 当 $t \in \widehat{I}_{i,j}$ 和 $j > 0$ , 有 $t - R(t) > t_{k_i} - j\Delta$ .

由本引理(b)知, 在间隔 $j\Delta$ 内,  $w(t-R(t))$ 增大不会超过 $j\Delta r(w_0 - \underline{w}'_{i-1})$ , 而 $w(t_{k_i}) = w_0$ ,

因此可得  $\min_{t \in \widehat{I}_{i,j}}(w(t-R(t))) \geq w_0 - j\Delta r(w_0 - \underline{w}'_{i-1})$ .

上式给出了每一个小区间 $\widehat{I}_{i,j}$ 对应的时滞项 $w(t-R(t))$ 的下界.

根据上式定义

$$\underline{w}'_{i-1,j} = \max(\underline{w}'_{i-1}, w_0 - j\Delta r(w_0 - \underline{w}'_{i-1})) \quad (21)$$

在s.t.  $rd < m/n$ 的情况下, 可将上式简化为:

$$\underline{w}'_{i-1,j} = w_0 - j\Delta r(w_0 - \underline{w}'_{i-1})$$

由式(8)和引理1(b)得:

$$\begin{aligned} w(t) &\leq w_0 + \int_{\widehat{I}_{i,0}} rcd(\frac{w_0}{\underline{w}'_{i-1}} - 1)dt \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_{\widehat{I}_{i,j}} rcd(\frac{w_0}{\underline{w}'_{i-1,j}} - 1)dt \quad (22) \end{aligned}$$

由引理4的推导过程和上式可计算出每个周期更准确的上下界:

### 引理 6

$$\bar{w}'_i = w_0 + rcd(\frac{w_0}{\underline{w}'_{i-1}} - 1)(w_0/c - n\Delta)$$

$$+ \sum_{j=1}^n rcd(\frac{w_0}{\underline{w}'_{i-1,j}} - 1)\Delta \quad (23)$$

其中 $\underline{w}'_{i-1,j} = \max(\underline{w}'_{i-1}, w_0 - j\Delta r(w_0 - \underline{w}'_{i-1}))$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $\Delta = d/m$ .

$$\underline{w}'_i = w_0 + rcd(\frac{w_0}{\underline{w}'_i} - 1)(w_0/c), \underline{w}'_0 = cd \quad (24)$$

比较引理6和引理4得:  $\bar{w}'_i \leq \bar{w}_i, \underline{w}'_i \geq \underline{w}_i$ , 因此引理6获得了更低保守的轨迹上、下界. 因此, 根据引理6, 得到如下改进的全局稳定性条件:

### 定理 3 若

$$\alpha + rcd(\frac{w_0}{\bar{w}'_1} - 1)(w_0/c) > 0 \quad (25)$$

其中 $r = \gamma/T, \bar{w}'_1 = w_0 + r\alpha(w_0/c - n\Delta) + \sum_{j=1}^n rcd(\frac{j\Delta r\alpha}{w_0 - j\Delta r\alpha})\Delta$ ,  $\Delta = d/m$ ,  $n, m$ 选取需满足 $nd/m < w_0/c, rd < m/n$ 这两个条件, 则由式(3)描述的FAST系统全局稳定.

证明: 由引理6知, 只要相关参数设置能够s.t.  $\underline{w}'_1 > \underline{w}'_0$ , 则FAST系统全局稳定.

由 $rd < m/n$ 和 $\Delta = d/m$ 知:  $r\Delta < 1/n$ , 因此有 $w_0 - j\Delta r(w_0 - \underline{w}'_{i-1}) > \underline{w}'_{i-1}$ , 式(21)可简化为: $\underline{w}'_{i-1,j} = w_0 - j\Delta r(w_0 - \underline{w}'_{i-1})$ .

将 $\underline{w}'_0 = cd$ 和 $\underline{w}'_{0,j} = w_0 - j\Delta r\alpha$ 代入式(23)得:

$$\bar{w}'_1 = w_0 + r\alpha(w_0/c - n\Delta) + \sum_{j=1}^n rcd(\frac{j\Delta r\alpha}{w_0 - j\Delta r\alpha})\Delta \quad (26)$$

将式(26)代入式(24)得:

$$\underline{w}'_1 = w_0 + rcd(\frac{w_0}{\bar{w}'_1} - 1)(w_0/c) \quad (27)$$

将 $\underline{w}'_0 = cd, w_0 = cd + \alpha$ 和式(27)代入到 $\underline{w}'_1 > \underline{w}'_0$ , 得定理结论, 证毕.

由定理3推导过程也可看出, 在s.t.  $nd/m < w_0/c$ 和 $rd < m/n$ 情况下, 可任意设置拆分区间数 $n$ 和决定拆分间隔的长度的参数 $m$ 的值. 若 $n = 0$ , 则定理3的全局稳定性条件式(25)退化到文献<sup>[10]</sup>全局稳定性条件.

表 1 定理3计算结果

Table 1 The calculated result of theory 3

序号	$d(s)$	$\gamma$	T(s)	$\gamma \cdot d/T$	$\alpha$	$n$ 为8时式(25) 左边值	$n$ 为6时式(25) 左边值	$n$ 为4时式(25) 左边值	平衡点(packets)
1	0.008	1.15	0.008	1.15	300	17.95	9.10	-12.60	1300
2	0.008	1.0	0.008	1.0	300	93.26	80.61	59.68	1300
3	0.008	1.4	0.008	1.4	300	-136.78	-132.14	-150.95	1300
4	0.1	1.2	0.1	1.2	300	23.10	14.60	-14.06	12800
5	0.1	1.0	0.1	1.0	300	128.24	113.40	86.90	12800
6	0.2	0.6	0.1	1.2	300	25.01	16.44	-12.57	25300
7	0.15	0.8	0.1	1.2	300	24.37	15.82	-13.07	19050
8	0.1	1.4	0.1	1.4	300	-116.69	-110.92	-137	12800

## 4 算例与仿真(The numeric example and simulation)

### 4.1 算例(The numeric example)

由文献 [10] 的全局稳定性结论知, 若  $\frac{\gamma d}{T} < 1, \alpha > 0 > -c(rd+1)/r$ , 则  $\alpha + rcd(\frac{w_0}{w_1} - 1) \cdot \frac{w_0}{c} > 0$ .

由引理6知  $\bar{w}'_1 \leq \bar{w}_1$ , 因此有  $\alpha + rcd(\frac{w_0}{\bar{w}'_1} - 1) \cdot \frac{w_0}{c} \geq \alpha + rcd(\frac{w_0}{\bar{w}_1} - 1) \cdot \frac{w_0}{c} > 0$ .

由以上推导可以看出, 若文献 [10] 全局稳定性条件成立, 则定理3的全局稳定性条件式(25)成立. 即定理3的全局稳定性条件包含了文献 [10] 的全局稳定性条件.

由定理3的稳定性条件式(25)可知, 在已知参数  $n, m, c, d, \gamma, T, \alpha$  的情况下, 可计算式(25)左边的值. 若该值大于0, 则满足定理3稳定性条件. 下面, 我们通过实例计算可以找到一组参数, 这些参数满足本文定理3的稳定性条件, 但不满足文献 [10] 的全局稳定性条件.

在  $s.t. nd/m < w_0/c$  和  $rd < m/n$  的条件下, 我们选取  $m = 10$ , 分别设置  $n$  为 8、6、4 三种情况, 设置  $c = 125000(\text{packets/s})$ , 根据表1中参数  $d, \gamma, T, \alpha$  计算定理3的全局稳定性条件式(25)左边值, 检验其是否满足稳定性条件 (其中平衡点  $w_0 = cd + \alpha$ ). 由表1的8组数据运算结果可知, 随着拆分区数  $n$  的增大, 式(25)左边值增大. 由表1的第1,4,6,7组可知, 当  $n$  为 4 时, 式(25)左边值小于 0, 不满足定理3的全局稳定性条件, 而当  $n$  为 8 时, 式(25)左边值均大于 0, 满足定理3的全局稳定性. 因此在满足  $nd/m < w_0/c$  和  $rd < m/n$  的条件下,  $n$  取值越大, 会在一定程度上增加其计算工作量, 但可获得更低保守性的全局稳定性条件.

由表1的第1-2, 4-7组的计算结果可知, 存在  $\gamma d/T \geq 1$  和  $\alpha > 0$  的参数设置情况, 能够满足定理3的稳定性条件, 但无法满足文献 [10] 的全局稳定性条件  $\gamma \cdot d/T < 1$ .

上述的理论推导表明若满足文献 [10] 的稳定性条件, 则一定满足定理3的稳定性条件; 而表1的计算结果表明, 确实存在满足定理3的稳定性条件但不满足文献 [10] 的全局稳定性参数设置情况, 从而说明了定理3取得了比文献 [10] 更低保守的全局稳定性条件.

### 4.2 仿真验证(Simulation verification)

仿真环境为 UBUNTU7.04+NS2.31<sup>[1,9,10]</sup>, 采用单源单链路的网络拓扑结构. 假设链路端缓冲区大小为 80000(packets), 链路采用丢尾算法(DropTail), 每个分组的大小为 1000(bytes),

$c = 125000(\text{packets/s}), \alpha = 300$ .

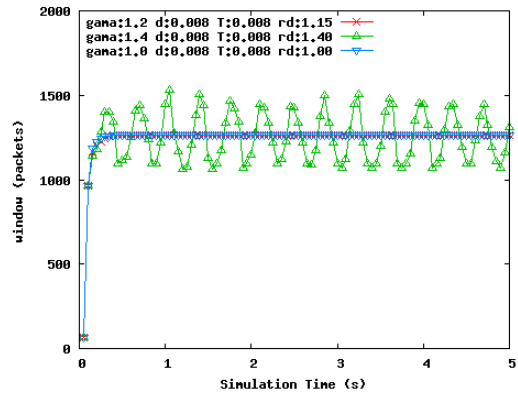


图4 窗口轨迹

Fig. 4 The window trajectories

图4是在参数  $\gamma, d, T$  根据表1中的1-3组数据设置的仿真环境下得到的仿真结果, 图4中标注  $\text{gama: } 1.2 \text{ d: } 0.008 \text{ T: } 0.008 \text{ rd: } 1.15$  表示的是所设置仿真环境参数  $\gamma = 1.2, d = 0.008(s), T = 0.008(s), \gamma d/T = 1.15$ , 由图4可知, 表1中1-2组参数满足定理3的全局稳定性条件, 但不满足文献 [10] 的全局稳定性条件  $\gamma d/T < 1$ , 系统能够稳定到平衡点  $w_0$ .

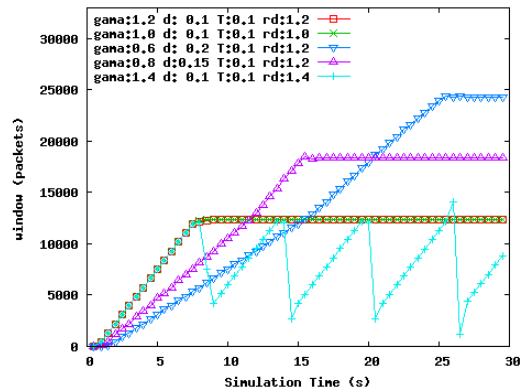


图5 窗口轨迹

Fig. 5 The window trajectories

图5是在参数  $\gamma, d, T$  根据表1中的4-8组数据设置的仿真环境下得到的仿真结果, 由图5可知, 4-7组数据设置满足定理3的全局稳定性条件, 但不满足文献 [10] 的全局稳定性条件  $\gamma d/T < 1$ , 系统能够稳定到平衡点  $w_0$ .

从表1中第3、8组数据可知, 当设置参数  $\gamma d/T = 1.4$  时, 不满足定理3的全局稳定性条件, 图4和图5中这两组数据所对应的仿真结果也表明系统无法收敛到平衡点  $w_0$ .

由表1的第1,4,6,7组数据可以看出, 在满足定理3的全局稳定条件下, 可置参数  $\gamma d/T = 1.2$ , 远

大于文献[10]的全局稳定性条件 $\gamma d/T < 1$ , 系统仍能稳定到平衡点, 进一步表明了定理3的低保守全局稳定性.

## 5 结论(Conclusion)

FAST系统本质上是时变时滞、非线性的复杂系统. 本文利用其时滞变化规律和其非线性函数是单调递减的性质, 估算出其解轨迹振荡的上、下界及其变化规律, 给出了FAST系统的全局稳定性条件. 理论推导、实例计算和NS-2仿真结果表明本文的全局稳定性条件具有更低的保守性.

## 参考文献(References):

- [1] David X.Wei, Cheng Jin, S. H. Low. FAST TCP: motivation, architecture, algorithms, performance [J]. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 2006, 14(6): 1246 – 1259.
- [2] JianTao Wang, David X.Wei, S.H.Low. Modeling and stability of FAST TCP [C] // *Proceeding of IEEE INFOCOM*. Miami:IEEE, 2005: 938 – 948.
- [3] 黄小猛, 林闯, 任丰源. 高速传输协议研究进展[J]. 计算机学报, 2006, 29(11): 111 – 120.  
Huang Xiao-Meng, Ling Chuang, Ren Feng-Yuan. Recent development of high speed transport protocol[J]. *Chinese Journal of Computer*, 2006, 29(11): 111 – 120.
- [4] Liansheng Tan, Wei Zhang, Cao Yuan. On parameter tuning for FAST TCP[J]. *IEEE Communications Letters*, 2007, 11(5): 1 – 3.
- [5] Ao Tang, S.H.Low. An accurate link model and its application to stability analysis of FAST TCP[C]. // *Proceeding of IEEE INFOCOM*. Anchorage:IEEE, 2007: 161 – 169.
- [6] Krister Jacobsson, Lachlan L, Steven H.Low. An improved link model for window flow control and its application to FAST TCP[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(3): 551 – 564.
- [7] Krister Jacobsson. Dynamic modeling of internet congestion control [D]. *Royal Institute of Technology (KTH)*, Sweden, 2008.
- [8] J-Y Choi, K Koo, J.S.H.Low. Global stability of FAST TCP in single-link single-source network[C]// *Proceeding of 44th IEEE Conference on Decision and Control*. Seville:IEEE, 2005: 12 – 15.
- [9] Kyungmo Koo, Joon-Young Choi, Lee, J.S. Parameter conditions for global stability of FAST TCP [J]. *IEEE Communications Letters*, 2008, 12(2):155 – 157.
- [10] Yun Jong Choi, Jeong Wan Ko, Sung Wook. Improved global stability conditions of the tuning parameter in FAST TCP[J]. *IEEE Communications Letters*, 2009, 13(3):202 – 205.
- [11] Z.K. Wang, F Paganini. Boundedness and global Stability of a nonlinear congestion control with delay[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006,51(9):1514 – 1519.
- [12] F. Paganini, J. C. Doyle, and S. H. Low. Scalable laws for stable network congestion control[C]// *Proceeding of 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando:IEEE, 2001,12,:185 – 190.
- [13] 王新梅, 魏武, 裘海龙. 一类具有区间时变多状态时滞系统的稳定性分析[J]. 控制理论与应用, 2010, 27(6): 0786 – 0792.  
Wang Xing-Mei, Wei Wu, Qiu Hai-Long. Stabilization analysis for systems with multiple interval time-varying time-delays[J]. *Control Theory and Applications*, 2010, 27(6): 0786 – 0792.

## 作者简介:

陈晓龙 (1971—), 男, 副教授, 博士, 从事网络拥塞控制, 非线性控制等研究, E-mail: xlycx1@126.com;

章云 (1963—), 男, 教授, 博导, 从事智能控制, 非线性控制等研究, E-mail: yz@gdut.edu.cn;

刘治 (1977—), 男, 教授, 从事模糊系统、非线性控制等研究, E-mail: lz@gdut.edu.cn.