

执行器不确定系统鲁棒预测动态控制分配策略

陈 勇, 董新民, 薛建平, 王发威

(空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038)

摘要: 针对多操纵面级联飞行控制结构中执行器存在多面体不确定的问题, 提出了一种基于鲁棒预测控制理论的动态控制分配策略. 考虑位置约束和速率约束, 建立了多面体不确定冗余执行器的增广控制模型; 以执行器状态和虚拟指令跟踪误差为增广变量构造二次型李亚普诺夫函数, 将无穷时域Min-Max非线性规划转化为线性矩阵不等式凸优化问题, 设计了保守性小的鲁棒预测控制律. 各个控制指令汇集到一个混合优化控制分配器, 由它分派控制指令, 以最优地补偿执行器的不确定动态特性. 仿真结果表明, 该策略可综合补偿执行器的多面体不确定性, 在操纵面偏转范围内精确地跟踪虚拟指令, 保证了闭环系统的稳定性, 具有较好的鲁棒性.

关键词: 级联飞控系统; 不确定执行器; 动态控制分配; 鲁棒预测控制

中图分类号: TP273; V249.1 **文献标识码:** A

Robust predictive dynamic control allocation for uncertain actuators

CHEN Yong, DONG Xin-min, XUE Jian-ping, WANG Fa-wei

(Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an Shaanxi 710038, China)

Abstract: To deal with the polytopic uncertainties of the actuators in the cascaded multi-effector flight control system, we present a dynamic control allocation scheme based on the robust predictive control theory. An augmented control model for the polytopic uncertain redundant actuator is built in considering the position and rate constraints. The actuator state and the virtual command tracking error are taken as the augmented variables in constructing the quadratic Lyapunov function. The "Min-Max" nonlinear programming in the infinite time domain is converted to a linear matrix inequality convex problem. Thus, we develop an optimal robust predictive controller with less conservativeness. Control commands are integrated into an allocator of mixed optimization, which distributes the control to compensate dynamic uncertainties of actuators. Simulation results show that the proposed scheme compensates the actuator polytopic uncertainties, tracks the virtual commands precisely within the control surface deflections, and guarantees the stability of the closed-loop system with relatively strong robustness.

Key words: cascaded flight control system; uncertain actuators; dynamic control allocation; robust predictive control

1 引言(Introduction)

为提高飞控系统的可靠性和安全性, 先进飞行器常采用冗余执行器的过驱动配置, 以降低传统操纵面的关键系数, 提升故障条件下的重构能力和战场条件下的生存能力. 过驱动执行机构在提高可靠性的同时增强了控制耦合度, 其动态性能将直接影响多操纵面级联飞行控制系统的控制效能和闭环特性^[1]. 如何考虑执行器的物理约束和动态性能, 合理地将主环飞行控制指令分配到各操纵面, 是设计多操纵面先进飞行控制系统面临的关键问题.

控制分配技术是综合考虑各任务指标要求处理多操纵面约束指令分配的有效方法, 广泛应用于战斗机^[2-6]、舰船^[7-8]、航天器^[9-12]、机器人^[13-14]及发动机热管理^[15]等多个过驱动控制领域, 已经成为研究的热点^[5]. 控制分配策略的研究成果可分为静态和动态两类. 静态控制分配策略^[2-5]忽略执行

器的动态特性, 先后发展出广义逆、直接分配、定点分配、截距修正等方法. 而动态特性各异的冗余执行机构将直接影响控制分配的精度和效率^[12, 16], 甚至导致飞行控制系统闭环不稳定^[1]. 值得指出的是, 目前国内外对动态控制分配策略的研究成果相对较少, 且绝大多数^[10-12, 15-16]是以执行器模型精确已知为前提, 当存在模型失配或不确定性建模误差时控制性能将急剧退化. 虽然文献[17]采用子空间预测辨识理论研究了多种故障操纵面模型失配时的动态重构控制分配问题, 文献[18]进一步引入鲁棒最小二乘理论实现了范数有界不确定执行器的鲁棒动态子空间预测控制分配, 但仍需给定执行器的精确参考模型, 对执行器存在多面体不确定性的情形将不再适用.

本文引入鲁棒预测控制理论^[19-23]提出了一种不需精确已知执行器模型的动态控制分配策略, 以实

现冗余执行器多面体不确定动态特性的最优补偿。采用文献[19, 22]的鲁棒预测控制方法处理执行器动态模型的不确定性, 并以执行器状态和虚拟指令跟踪误差为增广变量设计执行器鲁棒预测控制律, 进而通过混合优化控制分配器综合考虑执行器的动态特性和物理约束, 利用线性矩阵不等式求解最优的动态补偿指令, 在实现指令精确跟踪的同时保证不确定系统闭环稳定。

2 问题描述(Problem formulation)

2.1 模块化级联飞行控制结构(Modular cascaded flight control structure)

考虑仿射非线性多操纵面飞行器数学模型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A(\varpi)\mathbf{x}(t) + B_\delta(\varpi)\boldsymbol{\delta}(t), \\ \mathbf{y}(t) = C(\varpi)\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为飞行器状态, $\boldsymbol{\delta}(t) \in \mathbb{R}^m$ 为执行器指令, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ 为输出变量; $A(\varpi)$, $B(\varpi)$ 和 $C(\varpi)$ 为适当维数的矩阵, ϖ 表示高度、马赫数、迎角等影响因素。假设系统(1)是可镇定的, 且 $\text{rank}(B_\delta) = k_p < m$ 。

定义 1 若 $B_\delta(\varpi)$ 可满秩分解为

$$B_\delta(\varpi) = B_v(\varpi)B(\varpi),$$

则称 $B_v(\varpi) \in \mathbb{R}^{n \times k_p}$ 为虚拟控制输入阵, $B(\varpi) \in \mathbb{R}^{k_p \times m}$ 为控制效率映射阵。

由此系统(1)可转化为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A(\varpi)\mathbf{x}(t) + B_v(\varpi)\mathbf{v}(t), \\ \mathbf{v}(t) = B(\varpi)\boldsymbol{\delta}(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^{k_p}$ 为虚拟控制指令。

考虑动态特性和物理约束的执行器模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{\text{act},c}(t) = A_{\text{act},c}(\theta)\mathbf{x}_{\text{act},c}(t) + B_{\text{act},c}(\theta)\mathbf{u}(t), \\ \boldsymbol{\delta}(t) = C_{\text{act},c}\mathbf{x}_{\text{act},c}(t), \quad \boldsymbol{\delta} \in \Omega_\delta, \\ \Omega_\delta = \{\boldsymbol{\delta} | \boldsymbol{\delta}_{\min} \leq \boldsymbol{\delta} \leq \boldsymbol{\delta}_{\max}, \boldsymbol{\rho}_{\min} \leq \dot{\boldsymbol{\delta}} \leq \boldsymbol{\rho}_{\max}\}, \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\mathbf{x}_{\text{act},c}(t) \in \mathbb{R}^{n_{\text{act}}}$ 为执行器状态, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ 为执行器输入; $\boldsymbol{\delta}_{\max}$ 和 $\boldsymbol{\delta}_{\min}$, $\boldsymbol{\rho}_{\max}$ 和 $\boldsymbol{\rho}_{\min}$ 分别为 $\boldsymbol{\delta}(t)$ 和 $\dot{\boldsymbol{\delta}}(t)$ 的上下限; $A_{\text{act},c}$, $B_{\text{act},c}$ 和 $C_{\text{act},c}$ 为适当维数的矩阵; θ 表示执行器动态模型的影响因素。

为便于计算机实现, 建立 k 时刻包含多面体不确定执行器的动态控制分配问题的离散模型

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{\text{act}}(k+1) = \\ A_{\text{act}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda})\mathbf{x}_{\text{act}}(k) + B_{\text{act}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda})\mathbf{u}(k), \\ \mathbf{v}(k) = B(\varpi_k)\boldsymbol{\delta}(k) = B(\varpi_k)C_{\text{act}}(k)\mathbf{x}_{\text{act}}(k), \\ [A_{\text{act}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda}), B_{\text{act}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda})] \in \Omega, \quad \forall k \geq 0, \\ \underline{\boldsymbol{\delta}}(k) \leq \boldsymbol{\delta}(k) \leq \bar{\boldsymbol{\delta}}(k), \\ \bar{\boldsymbol{\delta}}(k) = \min\{\boldsymbol{\delta}_{\max}, \boldsymbol{\delta}(k-1) + T\boldsymbol{\rho}_{\max}\}, \\ \underline{\boldsymbol{\delta}}(k) = \max\{\boldsymbol{\delta}_{\min}, \boldsymbol{\delta}(k-1) + T\boldsymbol{\rho}_{\min}\}. \end{cases} \quad (4)$$

其中: T 为采样周期, $\bar{\boldsymbol{\delta}}$ 和 $\underline{\boldsymbol{\delta}}$ 表示当前时刻执行器偏转的上下限; A_{act} , B_{act} 和 C_{act} 为系统(3)离散化的参数矩阵; ϖ_k 和 θ_k 分别表示 k 时刻参数 ϖ 和 θ 的取值; Ω 是凸多面体集合

$$\Omega = \text{Co}\{[A_{\text{act},1}, B_{\text{act},1}], \dots, [A_{\text{act},L}, B_{\text{act},L}]\},$$

其中: 对 $i \in \Xi = \{i | i=1, \dots, L\}$, $[A_{\text{act},i}, B_{\text{act},i}]$ 是 Ω 的顶点, 存在标量 $\lambda_i \in \Theta = \{\lambda_i | \sum_{i=1}^L \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i \in \Xi\}$, 使得 $\forall k > 0$, 满足

$$A_{\text{act}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^L \lambda_i A_{\text{act},i}(\theta_k),$$

$$B_{\text{act}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^L \lambda_i B_{\text{act},i}(\theta_k).$$

图1为模块化多操纵面级联飞行控制系统结构, 其设计过程可分成两个独立的步骤同时进行:

- 1) 基于虚拟指令 \mathbf{v}_d 设计主环飞行控制律, 以使系统输出 \mathbf{y} 跟踪参考输入指令 \mathbf{y}_r ;
- 2) 在 k 时刻设计满足式(4)要求的参考指令 $\mathbf{u}_r(k)$ 和控制指令 $\mathbf{u}(k)$, 使得 \mathbf{v} 最大量地逼近 \mathbf{v}_d 。

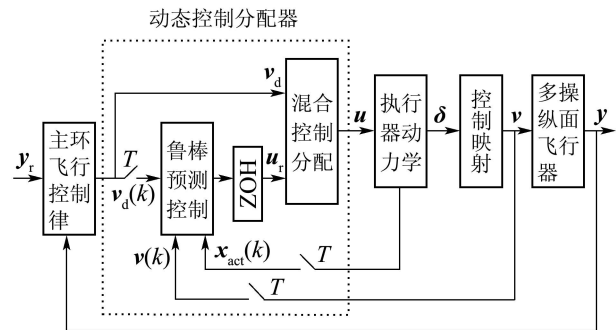


图1 级联飞行控制系统结构框图

Fig. 1 Block diagram of cascaded flight control system

采用级联飞行控制系统结构, 在执行器出现故障时不必更改主环飞行控制律就能利用控制分配器实现控制重构。

2.2 不确定执行器增广模型(Augmented model of uncertain actuators)

引入误差信号

$$\tilde{\mathbf{e}}(k) = \mathbf{v}_d(k) - \mathbf{v}(k).$$

定义

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\text{act}}(k+1) = \mathbf{x}_{\text{act}}(k+1) - \mathbf{x}_{\text{act}}(k),$$

$$\tilde{\mathbf{v}}(k+1) = \mathbf{v}(k+1) - \mathbf{v}(k),$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_r(k+1) = \mathbf{u}_r(k+1) - \mathbf{u}_r(k),$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_d(k+1) = \mathbf{v}_d(k+1) - \mathbf{v}_d(k).$$

选取增广系统状态

$$\tilde{\mathbf{x}}^T(k) = [\tilde{\mathbf{x}}_{\text{act}}^T(k) \quad \tilde{\mathbf{e}}^T(k)],$$

从而不确定执行器离散增广系统模型为

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{x}}(k+1) = \\ \tilde{A}_{\text{act}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda})\tilde{\boldsymbol{x}}(k) + \tilde{B}_{\text{act,u}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda})\tilde{\boldsymbol{u}}_r(k) + \\ \tilde{B}_{\text{act,v}}(\boldsymbol{\lambda})\tilde{\boldsymbol{v}}_d(k+1), \\ \tilde{\boldsymbol{v}}(k) = \tilde{C}_{\text{act}}(\boldsymbol{\lambda})\tilde{\boldsymbol{x}}(k), \end{cases} \quad (5)$$

其中: 下标act,u和act,v所示的矩阵分别表示输入指令变化量 $\tilde{\boldsymbol{u}}_r$ 和虚拟指令变化量 $\tilde{\boldsymbol{v}}_d$ 对增广系统的输入矩阵(下同),

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\text{act}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda}) &= \begin{bmatrix} A_{\text{act}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda}) & 0 \\ -B(\varpi_k)C_{\text{act}}(k)A_{\text{act}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda}) & I \end{bmatrix}, \\ \tilde{B}_{\text{act,u}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda}) &= \begin{bmatrix} B_{\text{act}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda}) \\ -B(\varpi_k)C_{\text{act}}(k)B_{\text{act}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda}) \end{bmatrix}, \\ \tilde{B}_{\text{act,v}}^T(\boldsymbol{\lambda}) &= [0 \quad I], \quad \tilde{C}_{\text{act}}(\boldsymbol{\lambda}) = [B(\varpi_k)C_{\text{act}}(k) \quad 0]. \end{aligned}$$

由 $[A_{\text{act}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda}), B_{\text{act}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda})] \in \Omega$ 可知, 对 $\forall k \geq 0$:

$$\begin{aligned} [\tilde{A}_{\text{act}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda}), \tilde{B}_{\text{act,u}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda}), \tilde{B}_{\text{act,v}}(\boldsymbol{\lambda}), \tilde{C}_{\text{act}}(\boldsymbol{\lambda})] &\in \tilde{\Omega}, \\ \tilde{\Omega} &= \text{Co}\{[\tilde{A}_{\text{act},1}, \tilde{B}_{\text{act,u},1}, \tilde{B}_{\text{act,v},1}, \tilde{C}_{\text{act},1}], \dots, \\ &[\tilde{A}_{\text{act},L}, \tilde{B}_{\text{act,u},L}, \tilde{B}_{\text{act,v},L}, \tilde{C}_{\text{act},L}]\}. \end{aligned}$$

且 $\exists \lambda_i \in \Theta$,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\text{act}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda}) &= \sum_{i=1}^L \lambda_i \tilde{A}_{\text{act},i}(\theta_k), \\ \tilde{B}_{\text{act,u}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda}) &= \sum_{i=1}^L \lambda_i \tilde{B}_{\text{act,u},i}(\theta_k), \\ \tilde{B}_{\text{act,v}}(\boldsymbol{\lambda}) &= \sum_{i=1}^L \lambda_i \tilde{B}_{\text{act,v},i}(k), \\ \tilde{C}_{\text{act}}(\boldsymbol{\lambda}) &= \sum_{i=1}^L \lambda_i \tilde{C}_{\text{act},i}(k). \end{aligned}$$

对 $\forall i \in \Xi$,

$$\begin{cases} \tilde{A}_{\text{act},i}(\theta_k) = \begin{bmatrix} A_{\text{act},i}(\theta_k) & 0 \\ -B(\varpi_k)C_{\text{act}}(k)A_{\text{act},i}(\theta_k) & I \end{bmatrix}, \\ \tilde{B}_{\text{act,u},i}(\theta_k) = \begin{bmatrix} B_{\text{act},i}(\theta_k) \\ -B(\varpi_k)C_{\text{act}}(k)B_{\text{act},i}(\theta_k) \end{bmatrix}, \\ \tilde{B}_{\text{act,v},i}^T(k) = [0 \quad I], \\ \tilde{C}_{\text{act},i}(k) = [B(\varpi_k)C_{\text{act}}(k) \quad 0]. \end{cases} \quad (6)$$

其中: $\tilde{A}_{\text{act},i}, \tilde{B}_{\text{act,u},i}, \tilde{B}_{\text{act,v},i}, \tilde{C}_{\text{act},i}$ 表示凸多面体 $\tilde{\Omega}$ 第*i*个顶点处所对应系统(5)的系统矩阵。

因此, 对于 $[\tilde{A}_{\text{act}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda}), \tilde{B}_{\text{act,u}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda}), \tilde{B}_{\text{act,v}}(\boldsymbol{\lambda}), \tilde{C}_{\text{act}}(\boldsymbol{\lambda})] \in \tilde{\Omega}$ 不确定增广系统(5)鲁棒稳定, 则对于 $[A_{\text{act}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda}), B_{\text{act}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda})] \in \Omega$ 不确定系统(4)鲁棒稳定。

对模块化级联飞行控制系统作如下假设:

假设 1 对 $\forall i \in \Xi$, 系统 $(A_{\text{act},i}, B_{\text{act},i}, C_{\text{act}}, 0)$ 是可镇定的;

假设 2 对 $\forall i \in \Xi$, $[A_{\text{act},i} \quad B_{\text{act},i}; C_{\text{act}} \quad 0]$ 行满秩;

假设 3 主环控制指令 $\boldsymbol{v}_d(k)$ 相对控制分配器

提前两个采样周期已知。

3 主环飞行控制律设计(Main-loop flight control law design)

主环控制的目标是根据飞行性能要求设计合理的虚拟控制指令, 既为外环导航回路提供稳定的内部控制结构, 也为内环动态控制分配提供可靠的参考指令。通常, 虚拟控制指令可选择为三轴控制力或力系数、控制力矩或力矩系数、偏转角加速度等几种类型, 均满足 $p = k_p = 3$ 。考虑以下两种最优二次型控制方案。

方案 1 选择优化目标函数

$$\min_{\boldsymbol{\delta}(t)} \int_0^{\infty} (\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*(t)\|_{Q_1}^2 + \|\boldsymbol{\delta}(t) - \boldsymbol{\delta}^*(t)\|_{R_1}^2) dt, \quad (7)$$

设计 $\boldsymbol{\delta}(t)$ 的最优控制律, 其中: $Q_1 = Q_1^T \geq 0$, $R_1 = R_1^T > 0$, (A, Q_1) 可观测; $\boldsymbol{x}^*(t)$ 和 $\boldsymbol{\delta}^*(t)$ 满足

$$\begin{cases} \min_{\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{\delta}^*(t)} \|\boldsymbol{\delta}^*(t)\|_{R_1}^2, \\ \text{s.t. } A(\varpi)\boldsymbol{x}^*(t) + B_{\delta}(\varpi)\boldsymbol{\delta}^*(t) = 0, \\ C(\varpi)\boldsymbol{x}^*(t) = \boldsymbol{y}_r(t). \end{cases} \quad (8)$$

方案 2 选择优化目标函数

$$\min_{\boldsymbol{v}_d(t)} \int_0^{\infty} (\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*(t)\|_{Q_2}^2 + \|\boldsymbol{v}_d(t) - \boldsymbol{v}^*(t)\|_{R_2}^2) dt, \quad (9)$$

设计 $\boldsymbol{v}_d(t)$ 的最优控制律, 其中: $Q_2 = Q_2^T \geq 0$, $R_2 = R_2^T > 0$, (A, Q_2) 可观测; $\boldsymbol{x}^*(t)$ 和 $\boldsymbol{v}^*(t)$ 满足

$$\begin{cases} A(\varpi)\boldsymbol{x}^*(t) + B_v(\varpi)\boldsymbol{v}^*(t) = 0, \\ C(\varpi)\boldsymbol{x}^*(t) = \boldsymbol{y}_r(t). \end{cases} \quad (10)$$

取 $W_{\delta} = W_{\delta}^T > 0$, 根据加权伪逆法确定最优 $\boldsymbol{\delta}(t)$:

$$\begin{cases} \min_{\boldsymbol{\delta}(t)} \|W_{\delta}\boldsymbol{\delta}(t)\|, \\ \text{s.t. } B(\varpi)\boldsymbol{\delta}(t) = \boldsymbol{v}_d(t). \end{cases} \quad (11)$$

定理 1^[24] 方案1与方案2等价的充分条件是以下任意一个条件成立:

a) 以式(7)为优化目标, 满足

$$Q_2 = Q_1, \quad R_2^{-1} = B(\varpi)R_1^{-1}B^T(\varpi), \quad W_{\delta} = R_1^{0.5}. \quad (12)$$

b) 以式(9)为优化目标, 给定 W_{δ} , 满足

$$\begin{cases} R_1 = W_{\delta}^2 + (B^T(\varpi)R_2 - \\ W_{\delta}(B(\varpi)W_{\delta}^{-1})^{\dagger})B(\varpi), \\ Q_1 = Q_2, \end{cases} \quad (13)$$

其中“ \dagger ”表示Moore-Penrose逆。

进一步可以得到, 若给定 Q_1 和 R_1 , 根据定理1中条件a)确定的最优虚拟控制律为

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_d(t) = L_{r,1}(\varpi)\boldsymbol{y}_r(t) + L_{x,1}(\varpi)\boldsymbol{x}(t), \\ L_{r,1}(\varpi) = -G^{-1}(B_v(\varpi), L_{x,1}(\varpi)), \\ L_{x,1}(\varpi) = -B(\varpi)R_1^{-1}B_{\delta}^T(\varpi)S(\varpi), \end{cases} \quad (14)$$

其中: $G(T_1, T_2) = C(\varpi)(T_1 T_2 + A(\varpi))^{-1} T_1$, $S(\varpi)$ 为以下Riccati方程的解:

$$\begin{aligned} A^T(\varpi)S(\varpi) + S(\varpi)A(\varpi) + Q_1 - \\ S(\varpi)B_\delta(\varpi)R_1^{-1}B_\delta^T(\varpi)S(\varpi) = 0. \end{aligned}$$

若给定 Q_2, R_2 和 W_δ , 根据定理1中条件b)确定的最优虚拟控制律为

$$\begin{cases} \mathbf{v}_d(t) = L_{r,2}(\varpi)\mathbf{y}_r(t) + L_{x,2}(\varpi)\mathbf{x}(t), \\ L_{r,2}(\varpi) = -G^{-1}(B_v(\varpi), L_{x,2}(\varpi)), \\ L_{x,2}(\varpi) = -R_2^{-1}B_v^T(\varpi)S(\varpi). \end{cases} \quad (15)$$

基于式(14)或式(15), 采用加权伪逆控制分配器:

$$\delta(t) = W_\delta^{-1} (B(\varpi)W_\delta^{-1})^\dagger \mathbf{v}_d(t), \quad (16)$$

可以保证二次型(7)或(9)达到最优。

定理1表明了传统的二次型最优控制器与采用控制分配的级联控制结构具有内在的等价关系, 合理地选择 Q_2, R_2 及 W_δ , 可以保证方案二中虚拟控制器达到方案一的控制性能, 而虚拟控制指令只需控制分配器来实现. 方案二所隐含的层级控制结构具有两个独特的优势:

- 1) 能够进一步方便地考虑执行器的物理约束;
- 2) 在执行器故障时只需更新控制效率即可重新分配操纵面指令实现控制重构.

4 鲁棒预测动态控制分配器设计(Robust predictive dynamic control allocator design)

针对离散凸多面体不确定系统(4), 目标是设计鲁棒预测控制器, 使得执行器不确定系统的稳定状态被驱动到 $(\tilde{\mathbf{x}}_{ss}, \tilde{\mathbf{u}}_{ss}) = (0, 0)$, 从而保证无约束控制分配误差 $\tilde{\mathbf{e}}_{ss} \rightarrow 0$.

4.1 鲁棒预测混合优化指标(Mixed optimal objectives for robust prediction)

若直接对增广系统(5)进行设计, 反馈通道将出现 $\tilde{\mathbf{x}}_{act}$ 和 $\tilde{\mathbf{e}}$ 的交叉项, 必然增加鲁棒预测控制器的保守性. 为实现控制器解耦, 不妨定义 k 时刻不确定系统(4)的鲁棒预测性能指标:

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{\mathbf{u}}(k+i|k)=F(k)\tilde{\mathbf{x}}(k+i|k)} \max_{[\tilde{A}_{act}, \tilde{B}_{act,u}, \tilde{B}_{act,v}, \tilde{C}_{act}] \in \tilde{\Omega}} J_\infty(k) = \\ \sum_{i=0}^{\infty} \|\tilde{\mathbf{x}}_{act}(k+i|k)\|_{Q_x}^2 + \|\tilde{\mathbf{e}}(k+i|k)\|_{Q_e}^2 + \\ \|\tilde{\mathbf{u}}_r(k+i|k)\|_{R_u}^2, \end{aligned} \quad (17)$$

其中: $\tilde{\mathbf{x}}_{act}(k+i|k)$ 和 $\tilde{\mathbf{e}}(k+i|k)$ 分别表示在 k 时刻基于系统(5)对 $k+i$ 时刻 $\tilde{\mathbf{x}}_{act}$ 和 $\tilde{\mathbf{e}}$ 的预测值, $\tilde{\mathbf{u}}_r(k+i|k)$ 表示经滚动优化得到的控制序列, $F(k)$ 为鲁棒预测控制器增益矩阵, Q_x, Q_e, R_u 均为正定对称加权矩阵.

式(17)中优化值 J_∞^* 的大小将体现算法的最优性.

不妨定义性能评价函数

$$\tilde{\mathbf{z}}(k) = C_{\tilde{z},\tilde{x}}\tilde{\mathbf{x}}_{act}(k) + C_{\tilde{z},\tilde{e}}\tilde{\mathbf{e}}(k) + D_{\tilde{z},\tilde{u}}\tilde{\mathbf{u}}_r(k), \quad (18)$$

其中:

$$\begin{aligned} C_{\tilde{z},\tilde{x}}^T &= [Q_x^{0.5} \ 0 \ 0], \quad C_{\tilde{z},\tilde{e}}^T = [0 \ Q_e^{0.5} \ 0], \\ D_{\tilde{z},\tilde{u}}^T &= [0 \ 0 \ R_u^{0.5}]. \end{aligned}$$

从而二次型鲁棒预测性能指标转化为

$$J_\infty(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{z}}^T(k+i|k)\tilde{\mathbf{z}}(k+i|k).$$

为保证 $\tilde{\mathbf{v}}_d(k)$ 作用下控制系统的闭环性能, 假设 $\mu > 0$ 为 H_∞ 鲁棒性能上界, 即满足

$$\|T_{\tilde{z}\tilde{v}_d}\|_\infty^2 < \mu. \quad (19)$$

4.2 执行器鲁棒预测动态控制器(Robust predictive dynamic controller for actuators)

引理 1^[1] 对称分块矩阵

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & * \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} > 0,$$

其中: $X_{11} = X_{11}^T, X_{22} = X_{22}^T$. 等价于

$$X_{22} > 0, \quad X_{11} - X_{21}^T X_{22}^{-1} X_{21} > 0.$$

引理 2^[23] 对于正定对称阵 X_1, X_2 和矩阵 X_3 , 如果存在矩阵 X_4 使得

$$\begin{bmatrix} X_2 & * \\ X_4 X_3 & X_4 + X_4^T - X_1 \end{bmatrix} > 0$$

成立, 则 $X_3^T X_1 X_3 - X_2 < 0$.

定理 2 对于执行器多面体不确定系统, 若存在常数 $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$, 矩阵 $G_1 \in \mathbb{R}^{n_{act} \times n_{act}}, G_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}, Y_1 \in \mathbb{R}^{m \times n_{act}}, Y_2 \in \mathbb{R}^{m \times p}$, 以及对称正定矩阵 $Z_1 \in \mathbb{R}^{n_{act} \times n_{act}}, Z_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, 满足凸优化问题:

$$\min_{G_1, G_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2} \gamma_1 + \gamma_2, \quad (20)$$

s.t.

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & * \\ G_1 \tilde{\mathbf{x}}_{act}(k|k) & G_1 + G_1^T - Z_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_2 & * \\ G_2 \tilde{\mathbf{e}}(k|k) & G_2 + G_2^T - Z_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} Z_1 - G_1 - G_1^T & * \\ 0 & Z_2 - G_2 - G_2^T \\ 0 & 0 \\ C_{\tilde{z},\tilde{x}} G_1 & C_{\tilde{z},\tilde{e}} G_2 \\ D_{\tilde{z},\tilde{u}} Y_1 & D_{\tilde{z},\tilde{u}} Y_2 \\ A_{act,i} G_1 + B_{act,i} Y_1 & B_{act,i} Y_2 \\ -BC_{act}(A_{act,i} G_1 + B_{act,i} Y_1) & G_2 - BC_{act} B_{act,i} Y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ -\mu I & * & * & * & * \\ 0 & -I & * & * & * \\ 0 & 0 & -I & * & * \\ 0 & 0 & 0 & -Z_1 & * \\ I & 0 & 0 & 0 & -Z_2 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (23)$$

则存在满足优化指标(17)和(19)的鲁棒预测控制器:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}_r(k+i|k) = \\ Y_1(k)\mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{x}}_{\text{act}}}(k+i|k) + Y_2(k)\mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{e}}}(k+i|k), \\ \mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{x}}_{\text{act}}}(k+i|k) = G_1^{-1}(k)\tilde{\mathbf{x}}_{\text{act}}(k+i|k), \\ \mathbf{g}_{\tilde{\mathbf{e}}}(k+i|k) = G_2^{-1}(k)\tilde{\mathbf{e}}(k+i|k). \end{cases} \quad (24)$$

证 设 $P = \text{diag}\{P_1, P_2\} > 0$, 预选Lyapunov函数

$$V(\tilde{\mathbf{x}}(k)) = \tilde{\mathbf{x}}_{\text{act}}^T(k)P_1(k)\tilde{\mathbf{x}}_{\text{act}}(k) + \tilde{\mathbf{e}}^T(k)P_2(k)\tilde{\mathbf{e}}(k),$$

其中: $P_1 \in \mathbb{R}^{n_{\text{act}} \times n_{\text{act}}}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$.

若存在最优鲁棒预测控制器, 不妨令

$$F_1(k) = Y_1(k)G_1^{-1}(k), F_2(k) = Y_2(k)G_2^{-1}(k),$$

且 $F = [F_1 \ F_2]$, 则对 $i \geq 0$,

$$V(\tilde{\mathbf{x}}(k+i+1|k)) - V(\tilde{\mathbf{x}}(k+i|k)) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k+i|k) \\ \tilde{\mathbf{v}}_d(k+i+1) \end{bmatrix}^T A_1 \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k+i|k) \\ \tilde{\mathbf{v}}_d(k+i+1) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

其中:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\text{cl}}^T P \tilde{A}_{\text{cl}} - P & * \\ \tilde{B}_{\text{act},v}^T(\boldsymbol{\lambda}) P \tilde{A}_{\text{cl}} & \tilde{B}_{\text{act},v}^T(\boldsymbol{\lambda}) P \tilde{B}_{\text{act},v}(\boldsymbol{\lambda}) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_{\text{cl}} = \tilde{A}_{\text{act}}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda}) + \tilde{B}_{\text{act},u}(\theta_k, \boldsymbol{\lambda})F.$$

在系统最终稳定到 $(\tilde{\mathbf{x}}_{\text{ss}}, \tilde{\mathbf{u}}_{\text{ss}})$ 时, 有 $\tilde{\mathbf{x}}(\infty|k) = 0$, $V(\tilde{\mathbf{x}}(\infty|k)) = 0$. 将式(25)从 $i=0$ 叠加到 $i=\infty$, 得

$$-V(\tilde{\mathbf{x}}(k|k)) = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k+i|k) \\ \tilde{\mathbf{v}}_d(k+i+1) \end{bmatrix}^T A_1 \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k+i|k) \\ \tilde{\mathbf{v}}_d(k+i+1) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

由 $\tilde{\mathbf{u}}_r(k+i|k) = F(k)\tilde{\mathbf{x}}(k+i|k)$ 知式(18)可转化为

$$\tilde{\mathbf{z}}(k+i|k) = (C_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{e}}} + D_{\tilde{\mathbf{z}},\tilde{\mathbf{u}}}F(k))\tilde{\mathbf{x}}(k+i|k),$$

其中 $C_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{e}}} = [C_{\tilde{\mathbf{z}},\tilde{\mathbf{x}}} \ C_{\tilde{\mathbf{z}},\tilde{\mathbf{e}}}]$. 明显地存在:

$$C_{\tilde{\mathbf{z}},\tilde{\mathbf{x}}}^T D_{\tilde{\mathbf{z}},\tilde{\mathbf{u}}} = 0, \quad C_{\tilde{\mathbf{z}},\tilde{\mathbf{e}}}^T D_{\tilde{\mathbf{z}},\tilde{\mathbf{u}}} = 0,$$

即 $C_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{e}}}^T D_{\tilde{\mathbf{z}},\tilde{\mathbf{u}}} = 0$. 进而鲁棒预测性能指标

$$J_{\infty}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{z}}^T(k+i|k)\tilde{\mathbf{z}}(k+i|k) = \mu \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{v}}_d^T(k+i+1)\tilde{\mathbf{v}}_d(k+i+1) + \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k+i|k) \\ \tilde{\mathbf{v}}_d(k+i+1) \end{bmatrix}^T A_2 \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k+i|k) \\ \tilde{\mathbf{v}}_d(k+i+1) \end{bmatrix}, \quad (27)$$

其中

$$A_2 = \begin{bmatrix} C_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{e}}}^T C_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{e}}} + F^T D_{\tilde{\mathbf{z}},\tilde{\mathbf{u}}}^T D_{\tilde{\mathbf{z}},\tilde{\mathbf{u}}} F & * \\ 0 & -\mu I \end{bmatrix}.$$

将式(26)和式(27)相加, 得

$$J_{\infty}(k) = V(\tilde{\mathbf{x}}(k)) + \mu \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{v}}_d^T(k+i+1)\tilde{\mathbf{v}}_d(k+i+1) + \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k+i|k) \\ \tilde{\mathbf{v}}_d(k+i+1) \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k+i|k) \\ \tilde{\mathbf{v}}_d(k+i+1) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

其中 $A = A_1 + A_2$.

根据离散系统有界实引理^[25]知, 当且仅当

$$A = A_1 + A_2 \leq 0$$

时, 闭环系统满足 H_{∞} 鲁棒性能指标式(19).

结合式(28)可知, 当满足

$$J_{\infty}(k) \leq V(\tilde{\mathbf{x}}(k)) + \mu \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{v}}_d^T(k+i+1)\tilde{\mathbf{v}}_d(k+i+1)$$

时, 最小化 $J_{\infty}(k)$ 既可保证闭环系统满足 H_{∞} 鲁棒性能指标式(19), 也能实现鲁棒预测性能指标式(17)达到最优.

由于虚拟控制律式(15)作用下的最优调节系统大范围渐近稳定^[26], 则 $\tilde{\mathbf{v}}_d(k)$ 能量必有界, 即满足

$$\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{v}}_d^T(k+i+1)\tilde{\mathbf{v}}_d(k+i+1) \leq \hat{v}^2 < \infty.$$

令

$$Z_1(k) = P_1^{-1}(k), \quad Z_2(k) = P_2^{-1}(k). \quad (29)$$

若 $\tilde{\mathbf{x}}_{\text{act}}^T(k)P_1(k)\tilde{\mathbf{x}}_{\text{act}}(k) \leq \gamma_1$, $\tilde{\mathbf{e}}^T(k)P_2(k)\tilde{\mathbf{e}}(k) \leq \gamma_2$, 则根据引理1可知 $A \leq 0$ 时最小化 $J_{\infty}(k)$ 可转化为

$$\min_{F_1, F_2, Z_1, Z_2} \gamma_1 + \gamma_2 + \mu \hat{v}^2, \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & * \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\text{act}}(k|k) & Z_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \gamma_2 & * \\ \tilde{\mathbf{e}}(k|k) & Z_2 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (31)$$

设 $G_1 \in \mathbb{R}^{n_{\text{act}} \times n_{\text{act}}}$, $G_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, 结合引理2可知式(21)和式(22)成立, 从而问题转化为

$$\begin{aligned} \min_{F_1, F_2, G_1, G_2, Z_1, Z_2} \gamma_1 + \gamma_2, \\ \text{s.t. } A \leq 0, \text{ 式(21)-(22)}. \end{aligned} \quad (32)$$

进一步由 $A \leq 0$, 根据引理1可知, 对 $\forall i \in \Xi$,

$$\begin{bmatrix} -P & * & * & * & * \\ 0 & -\mu I & * & * & * \\ C_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{e}}} & 0 & -I & * & * \\ D_{\tilde{\mathbf{z}},\tilde{\mathbf{u}}}F & 0 & 0 & -I & * \\ \tilde{A}_{\text{act},i} + \tilde{B}_{\text{act},u,i}F & \tilde{B}_{\text{act},v,i} & 0 & 0 & -P^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (33)$$

左右同乘于 $\text{diag}\{P^{-1}, I, I, I, I\}$, 令

$$\bar{Y}_1(k) = F_1(k)Z_1(k), \bar{Y}_2(k) = F_2(k)Z_2(k),$$

则结合式(6)和式(29)知

$$\begin{bmatrix} -Z_1 & * & & & \\ 0 & -Z_2 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ C_{\bar{z},\bar{x}}Z_1 & C_{\bar{z},\bar{e}}Z_2 & & & \\ D_{\bar{z},\bar{u}}\bar{Y}_1 & D_{\bar{z},\bar{u}}\bar{Y}_2 & & & \\ A_{\text{act},i}Z_1 + B_{\text{act},i}\bar{Y}_1 & B_{\text{act},i}\bar{Y}_2 & & & \\ -BC_{\text{act}}(A_{\text{act},i}Z_1 + B_{\text{act},i}\bar{Y}_1) & Z_2 - BC_{\text{act}}B_{\text{act},i}\bar{Y}_2 & & & \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ -\mu I & * & * & * & * \\ 0 & -I & * & * & * \\ 0 & 0 & -I & * & * \\ 0 & 0 & 0 & -Z_1 & * \\ I & 0 & 0 & 0 & -Z_2 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (34)$$

右乘 $G_3 = \text{diag}\{Z_1^{-1}G_1, Z_2^{-1}G_2, I, I, I, I, I\}$, 左乘 G_3^T , 令

$$Y_1(k) = \bar{Y}_1(k)Z_1^{-1}(k)G_1(k),$$

$$Y_2(k) = \bar{Y}_2(k)Z_2^{-1}(k)G_2(k),$$

根据引理1和引理2可知式(23)成立。证毕。

注1 引入变量 G_1, G_2 增加了优化自由度, 一般可增强控制器的最优性^[23]。而当

$$G_1 = G_1^T = Z_1, G_2 = G_2^T = Z_2$$

时, 式(31)和式(34)仍成立, 改进了优化解的可行性。

注2 解耦控制律

$$\begin{cases} g_{\bar{x}\text{act}}(k+i|k) = G_1^{-1}(k)\bar{x}_{\text{act}}(k+i|k), \\ g_{\bar{e}}(k+i|k) = G_2^{-1}(k)\bar{e}(k+i|k) \end{cases}$$

消除了不确定执行器状态与虚拟控制误差两个反馈通道的交叉耦合, 与文献[19, 22]中所设计的鲁棒预测状态反馈控制律相比, 具有更小的保守性。

推论1 对于多面体不确定执行器系统, 如果存在最优鲁棒预测控制器使得 $J_\infty(k)$ 最小, 则^[19]

$$\begin{aligned} \bar{x}^T(k+i+1|k)P\bar{x}(k+i+1|k) &\leq \\ \bar{x}^T(k+i|k)P\bar{x}(k+i|k), & \\ V(\bar{x}(k+1)) &\leq V(\bar{x}(k)). \end{aligned}$$

证 由二次型指标 $J_\infty(k)$ 最小知 $V(\bar{x}(k|k))$ 最小, 根据式(23)可知增广系统状态满足

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{\text{cl}}^T P \tilde{A}_{\text{cl}} - P & * & * & * & * \\ \tilde{B}_{\text{act},v}^T P \tilde{A}_{\text{cl}} & \tilde{B}_{\text{act},v}^T P \tilde{B}_{\text{act},v} & * & * & * \\ 0 & 0 & -\mu I & * & * \\ C_{\bar{x}\bar{e}} & 0 & 0 & -I & * \\ D_{\bar{z},\bar{u}} F & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \leq 0,$$

显然存在

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{\text{cl}}^T P \tilde{A}_{\text{cl}} - P & * \\ \tilde{B}_{\text{act},v}^T P \tilde{A}_{\text{cl}} & \tilde{B}_{\text{act},v}^T P \tilde{B}_{\text{act},v} \end{bmatrix} \leq 0.$$

从而可知

$$\begin{aligned} \bar{x}^T(k+i|k)(\tilde{A}_{\text{cl}}^T P \tilde{A}_{\text{cl}} - P)\bar{x}(k+i|k) &\leq 0, \\ V(\bar{x}(k+i+1|k)) - V(\bar{x}(k+i|k)) &\leq 0. \end{aligned}$$

结合式(5)和式(24)知推论1成立。证毕。

推论2 考虑执行器动态不确定增广系统(5), 假设最优化问题式(20)–(23)在 k 时刻存在最优解 $\gamma_1, \gamma_2, G_1, G_2, Y_1, Y_2, Z_1$ 及 Z_2 , 则集合 $\epsilon = \{z | z^T P z \leq \gamma_1 + \gamma_2\}$ 是不确定系统预测增广状态的椭球不变集。

证 若定理2的优化问题有解, 则满足

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\text{act}}^T(k)P_1(k)\bar{x}_{\text{act}}(k) &\leq \gamma_1, \\ \bar{e}^T(k)P_2(k)\bar{e}(k) &\leq \gamma_2. \end{aligned}$$

根据推论1知 $V(\bar{x}(k|k))$ 单调递减, 因此 $k+1$ 时刻:

$$\bar{x}^T(k+1|k)P(k+1)\bar{x}(k+1|k) \leq \gamma_1 + \gamma_2.$$

证毕。

推论3 若不确定系统(5)存在最优增广状态反馈鲁棒预测控制器式(24), 则

$$\begin{bmatrix} Z & * & * & * \\ \tilde{A}_{\text{act},i}Z + \tilde{B}_{\text{act},u,i}\bar{Y} & Z & * & * \\ C_{\bar{x}\bar{e}}Z & 0 & I & * \\ D_{\bar{z},\bar{u}}\bar{Y} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (35)$$

其中: $Z = \text{diag}\{Z_1, Z_2\}, \bar{Y} = [\bar{Y}_1 \ \bar{Y}_2]$ 。

证 由 $\Lambda \leq 0$ 可得

$$\tilde{A}_{\text{cl}}^T P \tilde{A}_{\text{cl}} - P + C_{\bar{x}\bar{e}}^T C_{\bar{x}\bar{e}} + F^T D_{\bar{z},\bar{u}}^T D_{\bar{z},\bar{u}} F \leq 0.$$

根据引理1可知推论3成立。证毕。

4.3 混合控制分配器(Mixed control allocator)

以最优二次型虚拟控制律 $\mathbf{v}_d(t)$ 为跟踪目标, 以鲁棒预测控制器 $\mathbf{u}_r(t)$ 为执行器动态补偿的参考目标, 综合考虑虚拟指令跟踪误差和执行器物理约束, 建立混合控制分配模型

$$\min_{\mathbf{u}(t)} J = \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_r(t)\|_{W_1}^2 + \eta \|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_d(t)\|_{W_2}^2, \quad (36)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{v}(t) = B(\varpi)\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t) \in \Omega_\delta, \quad (37)$$

其中: $W_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}, W_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 为非奇异对称加权矩阵, $\eta > 0$ 为松弛因子。

定理3 混合优化目标(36)等价于

$$J_s = \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0(t)\|_W^2, \quad (38)$$

其中:

$$\begin{cases} W(\varpi) = W_1 + \eta B^T(\varpi)W_2B(\varpi), \\ u_0(t) = W^{-1}(\varpi)W_1\mathbf{u}_r(t) + \\ \quad \eta W^{-1}(\varpi)B^T(\varpi)W_2\mathbf{v}_d(t). \end{cases} \quad (39)$$

证 将优化目标 J 展开:

$$J = (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_r(t))^T W_1(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_r(t)) + \eta(B(\varpi)\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}_d(t))^T W_2(B(\varpi)\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}_d(t)).$$

由 W_2 对称可知

$$\mathbf{u}^T(t)B^T(\varpi)W_2\mathbf{v}_d(t) = \mathbf{v}_d^T(t)W_2B(\varpi)\mathbf{u}(t),$$

因此 J 可转化为

$$J = \mathbf{u}^T(t)(W_1 + \eta B^T(\varpi)W_2B(\varpi))\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}_r^T(t)W_1\mathbf{u}_r(t) + \eta\mathbf{v}_d^T(t)W_2\mathbf{v}_d(t) - 2\mathbf{u}^T(t)(W_1\mathbf{u}_r(t) + \eta B^T(\varpi)W_2\mathbf{v}_d(t)).$$

将优化目标 J_s 展开, 即

$$J_s = \mathbf{u}^T(t)W(\varpi)\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}_0^T(t)W(\varpi)\mathbf{u}_0(t) - 2\mathbf{u}^T(t)W(\varpi)\mathbf{u}_0(t),$$

根据式(39)可知 J 与 J_s 仅相差常数项. 证毕.

定理4 定义 e_i 为单位阵 $I \in \mathbb{R}^m$ 的第 i 行, 对于约束控制分配问题(36)–(37), 总是存在 $\gamma > 0$ 满足

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{u}(k)} \gamma, \\ \begin{bmatrix} \gamma & * \\ \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}_0(k) & W^{-1}(\varpi) \end{bmatrix} > 0, \\ e_i\mathbf{u}(k) - e_i\bar{\boldsymbol{\delta}}(k) > 0, \quad i=1, 2, \dots, m, \\ e_j\bar{\boldsymbol{\delta}}(k) - e_j\mathbf{u}(k) > 0, \quad j=1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (40)$$

证 总是存在 $\gamma > 0$, 使得

$$J_s < \gamma \Leftrightarrow (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0(t))^T W(\varpi)(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0(t)) < \gamma.$$

结合引理1和定理3可知式(40)成立. 证毕.

5 仿真验证(Simulation experiment)

5.1 仿真模型(Simulation model)

以瑞典防卫机构开发的六自由度多操纵面战斗机仿真模型为对象, 选择虚拟控制 $\mathbf{v}^T = [\dot{p} \ \dot{q} \ \dot{r}]$ 分别表示滚转、俯仰和偏航角加速度, 控制量 $\boldsymbol{\delta}^T = [\delta_c \ \delta_{le} \ \delta_{re} \ \delta_r]$ 分别表示鸭翼、左升降副翼、右升降副翼和方向舵. 操纵面相互独立, 位置约束为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}_{\max}^T &= [25 \ 30 \ 30 \ 30], \\ \boldsymbol{\delta}_{\min}^T &= -1 \times [55 \ 30 \ 30 \ 30]. \end{aligned}$$

相应的速率约束为

$$\boldsymbol{\rho}_{\max}^T = -\boldsymbol{\rho}_{\min}^T = 50 \times [1 \ 1 \ 1 \ 1].$$

考虑 δ_c 和 δ_r 的执行器模型为一阶形式, 即

$$T_s\dot{\delta}_c(t) = -\delta_c(t) + u_c(t), \quad T_s\dot{\delta}_r(t) = -\delta_r(t) + u_r(t),$$

δ_{le} 和 δ_{re} 的执行器为二阶模型:

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{act},c}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{act},c}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} u_{le}(t),$$

$$\delta_{le}(t) = [1 \ 0]\mathbf{x}_{\text{act},c}(t),$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{act},c}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{act},c}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} u_{re}(t),$$

$$\delta_{re}(t) = [1 \ 0]\mathbf{x}_{\text{act},c}(t),$$

其中: $\mathbf{x}_{\text{act},c}^T = [\delta_i \ \dot{\delta}_i]$, $\omega_n = 20$. 假设模型中参数存在摄动: $\xi \in [0.69 \ 0.73]$, $T_s \in [1/25, 1/15]$.

设计以下3种控制方案进行对比仿真:

1) 鲁棒预测动态控制分配(RPDCA)方案: 选择 $Q_{\bar{x}} = I_6$, $Q_{\bar{e}} = 2I_6$, $R_{\bar{u}} = 10^{-5}I_4$, 按式(20)–(24)设计多面体不确定执行器动态的参考指令, 再按式(40)进行控制分配;

2) 未加补偿的混合控制分配(UCMCA)方案^[5]: 给定期望指令 $\mathbf{u}_d = 0$, 忽略执行器动态直接进行控制分配.

3) 动态耦合补偿控制分配(DCCCA)方案^[16]: 补偿采用的执行器精确模型为: $T_s = 1/20$, $\xi = 0.707$.

5.2 开环仿真(Open-loop simulation)

为了验证鲁棒预测动态控制分配方案的有效性, 首先进行开环仿真实验, 以分析算法对执行器参数存在不确定性时的分配效能和鲁棒性能. 给定速率随时间变快的三轴角加速度指令:

$$\mathbf{v}_d = \begin{bmatrix} 35 \sin(0.15\pi t^2 + 0.5\pi t) \\ 50 \sin(0.15\pi t^2 + 0.5\pi t) \\ 20 \sin(0.15\pi t^2 + 0.5\pi t) \end{bmatrix} (\text{°})/s^2.$$

图2所示为虚拟控制指令的动态跟踪过程.

由图2可知, 由于存在多面体不确定性, 执行器动态特性对UCMCA方案影响最大, 在第10个周期时跟踪指令已不足期望值的1/4, 控制性能明显低于RPDCA方案和DCCCA方案. 虽然动态耦合补偿使得幅值在初始阶段损失不多, 但DCCCA方案采用与实际模型不匹配的补偿模型, 使得补偿指令不足以遏制虚拟指令快变时跟踪性能急剧下降的趋势. 同时UCMCA方案和DCCCA方案均随着指令的变快出现了较大的滞后. RPDCA方案在慢变指令时较好地抑制了执行器动态不确定对控制分配的影响, 而虚拟指令快变时因执行器的速率约束表现出一点滞后, 但指令损失少, 分配效率高.

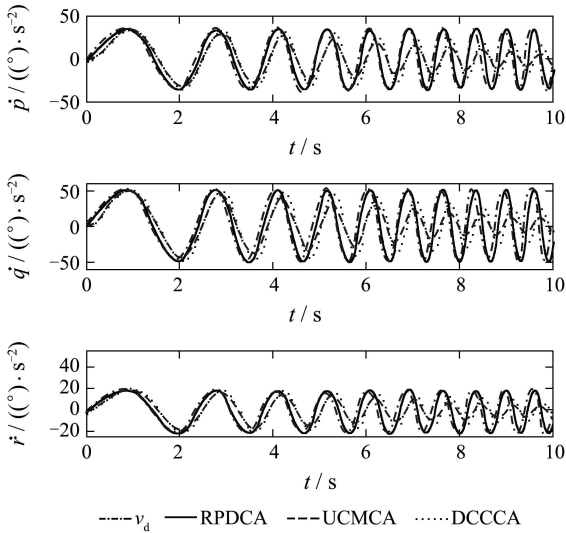


图2 虚拟控制指令的响应过程
Fig. 2 The response of virtual controls

图3所示为操纵面指令的动态过程。

由图3可见, 操纵面指令信号随着虚拟指令周期性变化, 而UCMCA方案和DCCCA方案的指令信号均逐渐降低. 3种方案都未出现位置饱和现象, 但出现了不同程度的速率饱和. 其中RPDCA方案生成的右升降副翼和方向舵指令饱和较明显, 而UCMCA方案和DCCCA方案生成的左升降副翼指令最小, 尚未充分发挥所有操纵面的控制效能。

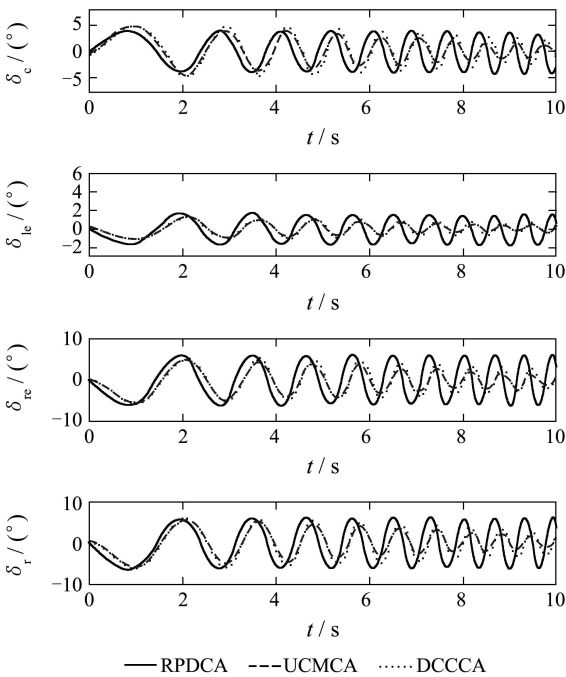


图3 操纵面指令的响应过程
Fig. 3 The response of effectors

总体来看, 当执行器动态存在不确定时, RPDCA方案在开环控制上具有较好的鲁棒性, 更好地发挥了操纵面的控制效能, 控制性能优于UCMCA方案和DCCCA方案。

5.3 闭环仿真(Closed-loop simulation)

为了考察执行器动态不确定性对多操纵面飞行控制系统闭环稳定性的影响, 采用图1所示的模块化级联控制结构, 按定理1设计基于虚拟控制指令的最优控制律. 选取迎角 α 、侧滑角 β 、滚转角速度 p 、俯仰角速度 q 和偏航角速度 r 为状态量, 参考指令(REF)为 $\mathbf{y}_r = [\alpha \ \beta \ p]$, 分别对RPDCA方案、UCMCA方案和DCCCA方案进行仿真实验。

图4所示为闭环系统的状态响应过程. 图5所示为相应的操纵面动态过程。

结合图4和图5可以看出, UCMCA方案使得飞机状态出现了明显的发散, 操纵面同时发生位置饱和和速率饱和. 而DCCCA方案在执行器模型不确定时补偿效果受到抑制, 导致闭环系统响应出现了较大的超调量, 在参考指令不为零时有一定的稳态误差, 收敛较慢. 相比之下, RPDCA方案较好地跟踪了给定的指令, 超调量和稳态误差均很小, 控制效果基本没有受到执行器不确定的影响, 避免了因模型摄动导致的闭环不稳定现象, 对不同特性的执行器实现了动态指令的合理分配. 闭环仿真表明, RPDCA方案较DCCCA方案和UCMCA方案具有更好的鲁棒性能, 提高了包含不确定执行器的闭环级联系统的稳定性。

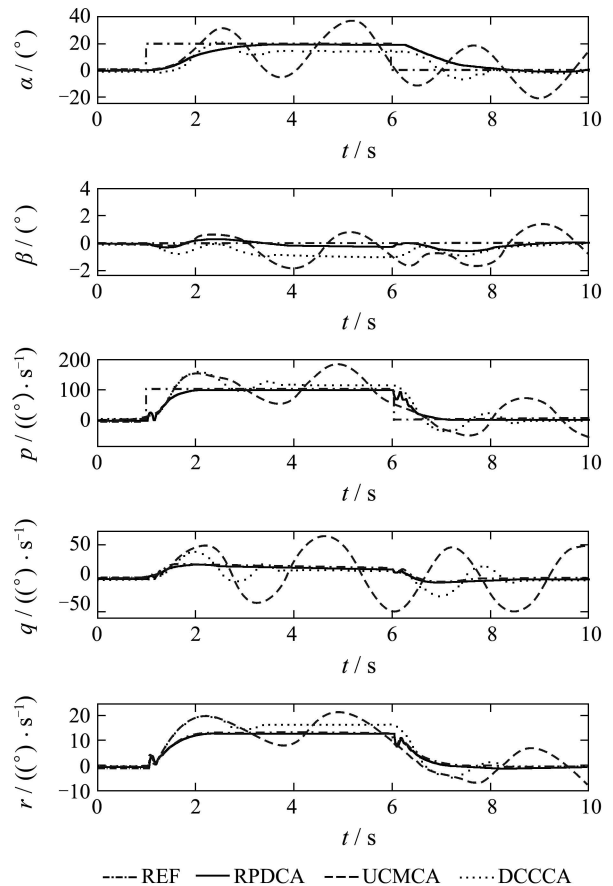


图4 闭环系统的状态响应过程
Fig. 4 The states response of closed-loop system

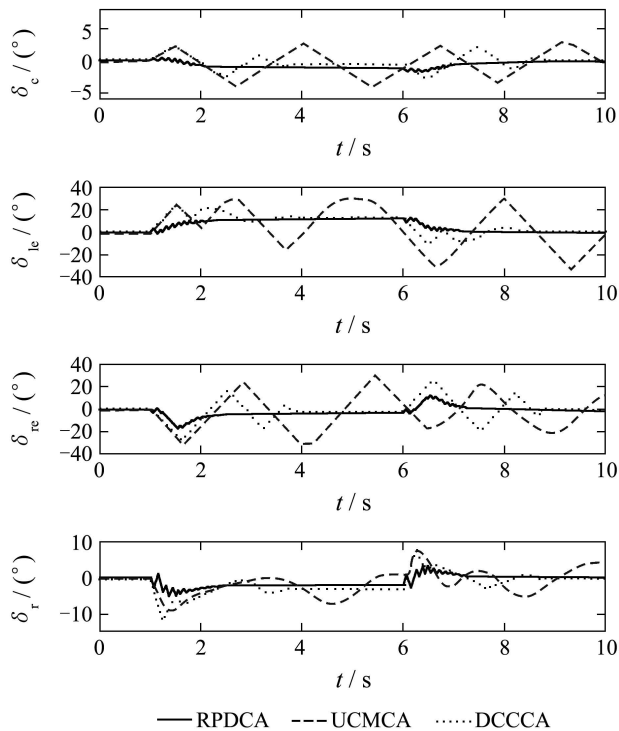


图5 闭环系统操纵面指令的响应过程

Fig. 5 The effectors response of closed-loop system

6 结论(Conclusions)

基于鲁棒预测控制理论, 本文研究了多操纵面级联飞行控制系统结构中执行器存在多面体不确定性时的动态控制分配问题. 采用变量变换的思想, 将无限时域“Min-Max”鲁棒预测控制优化问题转化为线性矩阵不等式凸优化问题, 并使不确定执行器状态与虚拟控制误差两个反馈通道相互解耦, 降低了鲁棒模型预测控制器的保守性. 基于线性矩阵不等式建立了混合优化控制分配器, 在满足执行器位置约束和速率约束的前提下兼顾不确定执行器动态, 完成虚拟指令的有效分配. 最后与两个精确依赖执行器模型的控制分配方案进行了对比仿真, 结果表明该方案是有效的. 下一步将对本文方案开展工程应用研究.

参考文献(References):

[1] KISHORE W C, SEN S, RAY G. Dynamic control allocation for tracking time-varying control demand[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2008, 31(4): 1150 – 1157.

[2] ZHANG Y, SURESH V S, JIANG B, et al. Reconfigurable control allocation against aircraft control effector failures[C] // *16th IEEE International Conference on Control Applications*. Piscataway, NJ: IEEE, 2007: 1197 – 1202.

[3] 马建军, 李文强, 郑志强, 等. 不确定条件下控制分配问题的鲁棒优化方法[J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(6): 731 – 744. (MA Jianjun, LI Wenqiang, ZHENG Zhiqiang, et al. Control of allocation under uncertainty based on robust optimization[J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(6): 731 – 744.)

[4] ALWI H, EDWARDS C. Fault tolerant control using sliding modes with on-line control allocation[J]. *Automatica*, 2008, 44(4): 1859 – 1866.

[5] CHEN Y, DONG X M, CHEN Y L, et al. Cascaded control allocation in overactuated aircraft via mixed optimization[C] // *2010 International Conference on Electrical Engineering and Automatic Control*. Piscataway, NJ: IEEE, 2010: 644 – 647.

[6] LIAO F, LUM K Y, WANG J L. Constrained control allocation for linear systems with internal dynamic[C] // *Proceedings of the 17th World Congress the International Federation of Automatic Control*. Amsterdam: Elsevier, 2008: 3092 – 3097.

[7] JOHANSEN T A. Optimizing nonlinear control allocation[C] // *The 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Piscataway, NJ: IEEE, 2004: 3435 – 3440.

[8] JOHANNES T, JOHANSEN T A. Adaptive control allocation[J]. *Automatica*, 2008, 44(11): 2754 – 2765.

[9] KISHORE W C, SEN S, RAY G. Disturbance rejection and control allocation of over-actuated systems[C] // *IEEE International Conference on Industrial Technology*. Piscataway, NJ: IEEE, 2006: 1054 – 1059.

[10] LUO Y, SERRANI A, YURKOVICH S, et al. Dynamic control allocation with asymptotic tracking of time-varying control input commands[C] // *Proceedings of American Control Conference*. Piscataway, NJ: IEEE, 2005: 2098 – 2103.

[11] LUO Y, SERRANI A, YURKOVICH S, et al. Model predictive dynamic control allocation scheme for reentry vehicles[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2007, 30(1): 100 – 113.

[12] OPPENHEIMER M, DOMAN D. A method for compensation of interactions between second-order actuators and control allocators[C] // *2005 IEEE Aerospace conference*. Piscataway, NJ: IEEE, 2005: 1 – 8.

[13] 俞建成, 张艾群, 王晓辉. 7000米载人潜水器推进器故障容错控制分配研究[J]. *机器人*, 2006, 28(5): 519 – 524. (YU Jiancheng, ZHANG Aiqun, WANG Xiaohui. Research on thruster fault tolerant control allocation of a 7000 m manned submarine[J]. *Robot*, 2006, 28(5): 519 – 524.)

[14] SCHOFIELD B, HAGGLUND T. Optimal control allocation in vehicle dynamics control for rollover mitigation[C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Piscataway, NJ: IEEE, 2008: 3231 – 3236.

[15] VERMILLION C, SUN J, BUTTS K. Model predictive control allocation for overactuated systems-stability and performance[C] // *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*. Piscataway, NJ: IEEE, 2007: 1251 – 1256.

[16] 陈勇, 董新民, 薛建平, 等. 舵机动态系统耦合补偿控制分配策略[J]. *仪器仪表学报*, 2010, 31(7): 1495 – 1500. (CHEN Yong, DONG Xinmin, XUE Jianping, et al. Coupling compensation control allocation of dynamic actuator system[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2010, 31(7): 1495 – 1500.)

[17] HALLOUZI R, VERHAEGEN M. Reconfigurable fault tolerant control of a Boeing 747 using subspace predictive control[C] // *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*. South Carolina, USA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc, 2007: 1 – 18.

[18] 马建军, 郑志强, 胡德文. 包含执行器动力学的子空间预测动态控制分配方法[J]. *自动化学报*, 2010, 36(1): 130 – 138. (MA Jianjun, ZHENG Zhiqiang, HU Dewen. Subspace predictive dynamic control allocation for overactuated system with actuator dynamics[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(1): 130 – 138.)

[19] KOTHARE M V, BALAKRISHNAN V, MORARI M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities[J]. *Automatica*, 1996, 32(10): 1361 – 1379.

- [20] FENG L, SUI D, HOVD M. On further optimizing prediction dynamics for robust model predictive control[C] // *Proceedings of the 2008 American Control Conference*. Piscataway, NJ: IEEE, 2008: 3572 – 3576.
- [21] 李德伟, 席裕庚. 有界扰动高效鲁棒预测控制器设计[J]. 控制理论与应用, 2009年, 26(5): 535 – 539.
(LI Dewei, XI Yugeng. Design of efficient robust model predictive controller for systems with bounded disturbances[J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(5): 535 – 539.)
- [22] FENG L, WANG J L, POH E, et al. Multi-objective robust model predictive control: trajectory tracking problem through LMI formulation[C] // *Proceedings of the 2007 American Control Conference*. New York, USA: IEEE, 2007: 5589 – 5594.
- [23] 丁宝苍, 杨鹏. 基于标称性能指标的离线鲁棒预测控制器综合[J]. 自动化学报, 2006, 32(2): 304 – 310.
(DING Baocang, YANG Peng. Synthesizing off-line robust model predictive controller based on nominal cost[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2006, 32(2): 304 – 310.)
- [24] HARKEGARD O, GLAD S T. Resolving actuator redundancy- optimal control vs control allocation[J]. *Automatica*, 2005: 137 – 144.
- [25] BOGDAN D. Bounded real lemma for FIR MIMO systems[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2005, 12(7): 496 – 499.
- [26] STEVENS B L, LEWIS F L. *Aircraft Control and Simulation*[M]. Canada: John Wiley & Sons, 2003.

作者简介:

陈勇 (1984—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为控制分配、故障诊断、容错控制, E-mail: chen_y_043@163.com;

董新民 (1963—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为飞行器控制理论及应用, E-mail: dongxinmin@139.com;

薛建平 (1968—), 男, 副教授, 硕士生导师, 主要研究方向为航空设备检测、智能故障诊断, E-mail: xue_jianping@163.com;

王发威 (1987—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为操纵面故障检测与诊断、故障重构, E-mail: wangfawei11@sina.com.