

# 无轴承永磁同步电机最小二乘支持向量机非线性建模

孙晓东, 朱焜秋, 杨泽斌, 张 涛

(江苏大学 电气信息工程学院, 江苏 镇江 212013)

**摘要:** 无轴承永磁同步电机的磁链特性表现为严重的非线性, 常规的解析法所建立的模型难以准确反映无轴承永磁同步电机的实际特性. 因此, 提出利用最小二乘支持向量机建立无轴承永磁同步电机非线性模型的新方法. 在介绍最小二乘支持向量机回归理论的基础上, 利用有限元法得到的样本建立了无轴承永磁同步电机的最小二乘支持向量机非线性模型, 并与神经网络方法进行了比较. 仿真结果表明, 所建模型具有较好的鲁棒性和预测精度. 最后给出了应用该模型实现无轴承永磁同步电机优化控制的方法.

**关键词:** 无轴承永磁同步电机; 非线性模型; 最小二乘支持向量机; 建模

**中图分类号:** TM346      **文献标识码:** A

## Nonlinear modeling of bearingless permanent magnet synchronous motors with least squares support vector machine

SUN Xiao-dong, ZHU Huang-qiu, YANG Ze-bin, ZHANG Tao

(School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang Jiangsu, 212013, China)

**Abstract:** The flux linkage characteristic of the bearingless permanent magnet synchronous motor (BPMSM) is high nonlinear, and the conventional mathematic model established by analysis method can not reflect the real characteristics of the BPMSM. Therefore, a novel modeling method is proposed for the BPMSM to take into account its nonlinearity more accurately by using the least squares support vector machine (LS-SVM). After the regression theory of the LS-SVM is introduced, the LS-SVM model of the BPMSM is built up by using the sampled data obtained from the experimental prototype with the finite elements method. Moreover, the LS-SVM model is compared with the model based on neural network method. Simulation results show that the proposed model has good robustness and high accuracy. Finally, the optimal controller based on the modeling for the BPMSM is developed.

**Key words:** bearingless permanent magnet synchronous motor; nonlinear model; least squares support vector machine; modeling

### 1 引言(Introduction)

无轴承永磁同步电机(bearingless permanent magnet synchronous motor, BPMSM)根据磁轴承与传统电机结构相似性, 将产生径向悬浮力的磁轴承线圈和永磁同步电机转矩绕组叠压在一起, 使转子同时具有旋转和自悬浮能力, 实现电机的无轴承化. BPMSM不仅具有永磁同步电机体积小、重量轻、效率高、功率因数高、控制特性好等优点, 而且具有磁轴承无摩擦、无磨损、不需润滑、高速高精等优点, 从而使其在航空航天、生物医药、半导体制造等特殊领域具有广泛的应用前景<sup>[1~4]</sup>.

BPMSM是在原有永磁同步电机的转矩绕组气隙磁场的基础上, 由悬浮力绕组激励悬浮力绕组气隙磁场, 这两部分磁场相互叠加, 因此气隙磁场分布十分复杂, 导致BPMSM的磁链呈严重的非线性

特性. 实现BPMSM正常悬浮运行的基础是需要对转矩和径向悬浮力进行实时控制, 而转矩和径向悬浮力都是根据电磁理论虚位移法, 对绕组磁共能求偏导而来, 而磁共能又是通过磁链与绕组的电感矩阵求得. 因此, 求得磁链的非线性关系是准确地描述BPMSM的电磁及力学关系的基础.

支持向量机(support vector machine, SVM)是由Vapnik<sup>[5]</sup>提出的一种新型机器学习算法, 是建立在统计学习理论的VC维理论和结构风险最小原理基础上的, 根据有限的样本信息在模型的复杂性(即对特定训练样本的学习精度)和学习能力(即无错误地识别任意样本的能力)之间寻求最佳折衷, 以期获得最好的推广能力. SVM用于线性、非线性系统的辨识与控制取得了较大的进展<sup>[6~9]</sup>. 与神经网络相比, SVM在经验风险最小化的基础上

同时采用了结构化风险最小化准则,不存在维数灾难和局部极小问题,推广性能较好.最小二乘支持向量机(least squares support vector machine, LS-SVM)<sup>[10,11]</sup>是SVM的一种扩展,利用等式约束替代了不等式约束,避免了求解二次规划问题.与SVM相比,LS-SVM求解速度更快,模型参数确定更为方便.由于上述原因,本文采用LS-SVM建立BPMSM磁链的非线性模型,结果表明该模型十分准确地反映了BPMSM的磁特性,适用于计算机辅助设计软件对BPMSM其他性能指标进行分析和仿真,为实现BPMSM的实时在线控制创造了条件.

## 2 无轴承永磁同步电机的建模分析(Modeling analysis of BPMSM)

BPMSM的磁链方程为(两相旋转坐标系下)

$$\begin{bmatrix} \psi_{4d} \\ \psi_{4q} \\ \psi_{2d} \\ \psi_{2q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_4 & 0 & M\alpha & -M\beta \\ 0 & L_4 & M\beta & M\alpha \\ M\alpha & M\beta & L_2 & 0 \\ -M\beta & M\alpha & 0 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{4d} \\ i_{4q} \\ i_{2d} \\ i_{2q} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中:  $\psi_{4d}, \psi_{4q}, i_{4d}, i_{4q}$  和  $L_4$  分别为悬浮力绕组的磁链, 电流和自感;  $\psi_{2d}, \psi_{2q}, i_{2d}, i_{2q}$  和  $L_2$  分别为转矩绕组的磁链, 电流和自感;  $\alpha$  和  $\beta$  分别为转子径向位移.  $M$  为两套绕组之间的互感系数

$$M = \frac{\mu_0 \pi n_4 n_2 l'}{8} \cdot \frac{r - (l_m + l_g)}{(l_m + l_g)^2}, \quad (2)$$

其中:  $n_4, n_2$  分别为悬浮力绕组和转矩绕组的匝数;  $l'$  为转子长度;  $r$  为定子内圆半径;  $l_m$  为永磁体的厚度;  $l_g$  为气隙厚度.

考虑到转子位置角为  $\theta$ , 转子偏心位移为  $l_0$ , 转矩绕组和悬浮力绕组的电流分别用  $i_M$  和  $i_B$  表示, 以及永磁体效果用其厚度  $l_m$  表示, 可以将磁链的非线性函数表示为

$$\psi = \psi(\theta, i_M, i_B, l_m, l_0), \quad (3)$$

则BPMSM绕组中储存的磁共能可表达为

$$W_m = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i_{4d} & i_{4q} & i_{2d} & i_{2q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{4d} & \psi_{4q} & \psi_{2d} & \psi_{2q} \end{bmatrix}^T. \quad (4)$$

根据虚位移法,  $\alpha, \beta$  方向的径向力  $F_\alpha, F_\beta$  和电磁转矩  $T$  分别为

$$\begin{cases} F_\alpha = \frac{\partial W_m}{\partial \alpha}, \\ F_\beta = \frac{\partial W_m}{\partial \beta}, \\ T = \frac{\partial W_m}{\partial \theta}. \end{cases} \quad (5)$$

由式(5)可见, 磁链的表达式(3)对于BPMSM建模的重要性. 但是磁链是  $\theta, i_M, i_B, l_m, l_0$  的非线性函数, 用一般的解析方法难以精确求得其数学模型. 因此我们将根据输入输出的样本数据, 采用LS-SVM来

建立磁链  $\psi(\theta, i_M, i_B, l_m, l_0)$  的非线性模型.

## 3 最小二乘支持向量机回归原理(Regression theory of LS-SVM)

LS-SVM问题可描述如下, 对于给定的  $l$  个样本的训练集  $(\mathbf{x}_1, y_1), \dots, (\mathbf{x}_i, y_i), \dots, (\mathbf{x}_l, y_l)$ , 其中  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^n$  为输入样本,  $y_i \in \mathbf{R}$  为输出样本,  $i = 1, 2, \dots, l$ . 在特征空间中LS-SVM模型采用如下函数

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \phi(\mathbf{x}) + b, \quad (6)$$

其中:  $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^H$  为权向量,  $b \in \mathbf{R}$  为偏移量, 非线性映射函数  $\phi: \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^H$  将输入空间映射至高维Hilbert空间.

LS-SVM定义优化问题

$$\min J(\mathbf{w}, \xi) = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + \frac{1}{2} \gamma \sum_{i=1}^l \xi_i^2, \quad (7)$$

$$\text{s.t. } y_i = \mathbf{w}^T \phi(\mathbf{x}_i) + b + \xi_i,$$

其中:  $J$  为优化目标函数;  $\gamma$  为惩罚因子;  $\xi$  为松弛因子. LS-SVM定义了与标准SVM不同的损失函数, 并将其不等式约束改为等式约束, 可在对偶空间上取  $\mathbf{w}$ . 为求解(7)的优化问题, 构造如下Lagrange函数

$$L(\mathbf{w}, b, \xi, \mathbf{a}) = J(\mathbf{w}, \xi) - \sum_{i=1}^l a_i [\mathbf{w}^T \phi(\mathbf{x}_i) + b + \xi_i - y_i]. \quad (8)$$

其中  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_l)^T$  为Lagrange乘子.

根据KKT最优条件, 可得

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = 0 \rightarrow \mathbf{w} = \sum_{i=1}^l a_i \phi(\mathbf{x}_i), \\ \frac{\partial L}{\partial b} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^l a_i = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = 0 \rightarrow a_i = \gamma \xi_i, i = 1, 2, \dots, l, \\ \frac{\partial L}{\partial a_i} = 0 \rightarrow \mathbf{w}^T \phi(\mathbf{x}_i) + b + \xi_i - y_i = 0. \end{cases} \quad (9)$$

计算消去  $\xi_i$  和  $\mathbf{w}$ , 则求解的优化问题可转化为求解下列线性方程组问题.

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{\Omega} + \gamma^{-1} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中:  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_l]^T$ ,  $\mathbf{I} = [1, 1, \dots, 1]^T$ ,  $\mathbf{\Omega} = \{\Omega_{ij}\}_{l \times l}$ ,  $\Omega_{ij} = \phi^T(\mathbf{x}_i) \phi(\mathbf{x}_j)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, l$ . 定义核函数  $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) = \phi^T(\mathbf{x}_i) \cdot \phi(\mathbf{x})$ ,  $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})$  为满足Mercer条件的对称函数<sup>[12]</sup>. 常用的核函数形式有: 线性、径向基、多项式等. 由于径向基核函数能获得较好的精度, 故本文选取径向基核函数

$$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) = \exp\left(\frac{-\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\|^2}{2\sigma^2}\right), \quad (11)$$

其中 $\sigma$ 为核宽度. 最后得到LS-SVM回归的决策函数

$$y(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^l a_i K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) + b, \quad (12)$$

其中:  $a_i, b$ 可由式(10)解出. 一般采用预测均方根误差( $\epsilon_{\text{RMSE}}$ )和最大绝对误差( $\epsilon_{\text{MAXE}}$ )来对模型的预测性能指标进行评价, 其定义分别为

$$\epsilon_{\text{RMSE}} = \sqrt{\frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (y_j - \hat{y}_j)^2}, \quad (13)$$

$$\epsilon_{\text{MAXE}} = \max_{j=1}^l |y_j - \hat{y}_j|, \quad (14)$$

其中 $j = 1, 2, \dots, l$ ,  $y_j$ 和 $\hat{y}_j$ 分别为实际值和模型输出值.

#### 4 BPMSM的LS-SVM非线性建模(Nonlinear modeling of BPMSM with LS-SVM)

##### 4.1 LS-SVM建模结果分析(Results analysis of LS-SVM model)

本文使用LS-SVM建立转矩绕组极对数为1, 悬浮力绕组极对数为2, 功率为2kW的BPMSM非线性模型. 受限于试验条件, 由于没有相应的实验设备去测量磁链, 因此在研究BPMSM非线性建模的初期, 使用的是通过有限元方法得到磁链值, 但它为今后实际磁链建模奠定了基础, 所建模型为进一步提高系统性能、实现实时控制创造了条件. BPMSM主要参数见表1.

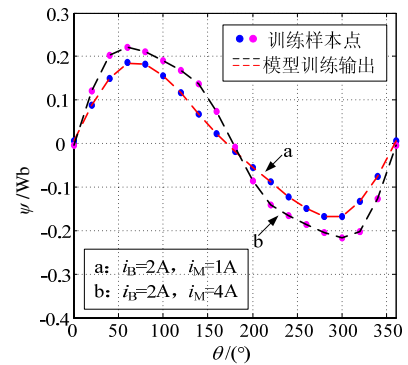
表 1 电机主要参数

Table 1 Main parameters of BPMSM

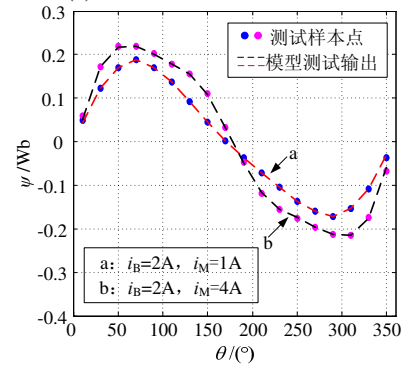
参数	数值	参数	数值
额定转速/(r/min)	8000	转子外径/mm	65
定子外径/mm	120	永磁体厚度/mm	2
定子内径/mm	67	气隙/mm	1
定子槽数	24	铁心长度/mm	85
剩余磁感应强度/T	1.2	悬浮力绕组匝数/n	40
矫顽力/(kA/m)	900	转矩绕组匝数/n	40

在采集有限元数据的时候, 以 $\theta, i_M, i_B, l_m, l_0$ 为输入量,  $\psi$ 为输出量, 构成数据对 $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \{(\theta, i_M, i_B, l_m, l_0)\}\}$ 进行训练学习. 在每隔 $10^\circ$ 的转子位置处, 测得一组数据, 共测得36组数据. 其中, 18组数据用来训练, 另外的18组数据用来测试. 选取 $\gamma = 1200, \sigma = 3.6$ . 由于所建的磁链非线性模型是六维的, 在一个平面坐标中无法表示, 故采用二维坐标平面将各变量与磁链之间的关系表示出来. 图1~图4为模型的训练和测试结果与实际值的比较图, 其中, 圆点为训练或测试样本点, 虚线为训练或测试输出. 图1为 $i_B = 2\text{A}$ 固定不变, 而 $i_M$ 分别为1A和4A时的

磁链变化曲线的对比结果. 图2为 $i_M = 2\text{A}$ 固定不变, 而 $i_B$ 分别为2A和5A时的磁链变化曲线的对比结果. 图3为 $l_m$ 分别为1mm和2mm时的磁链变化曲线的对比结果. 图4为转子不偏心及转子偏心0.9mm时的磁链变化曲线的对比结果. 从图1~图4可以看出, 拟合结果和预测结果与有限元计算得到的数据十分吻合, 测试样本与模型测试输出的均方根误差为0.0017, 最大绝对误差为0.0056, 表明模型具有较好的鲁棒性和预测精度.



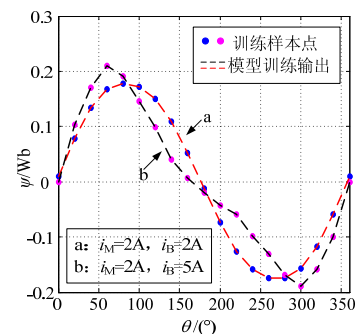
(a) 训练结果与实际值比较



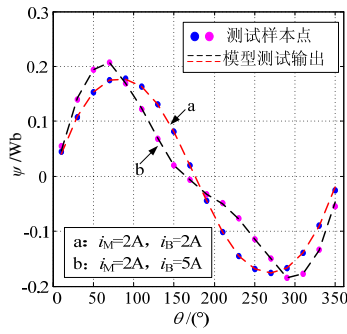
(b) 测试结果与实际值比较

图 1  $i_B$ 固定,  $i_M$ 变化时的结果比较图

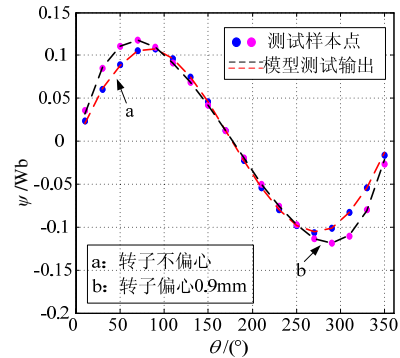
Fig. 1 Result comparison chart with  $i_B$  fixed and  $i_M$  change



(a) 训练结果与实际值比较



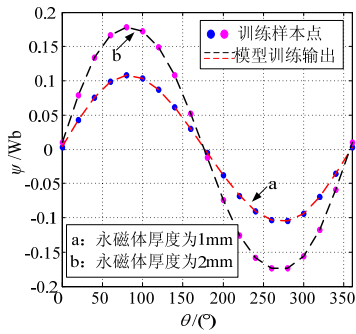
(b) 测试结果与实际值比较

图2  $i_M$ 固定,  $i_B$ 变化时的结果比较图Fig. 2 Result comparison chart with  $i_M$  fixed and  $i_B$  change

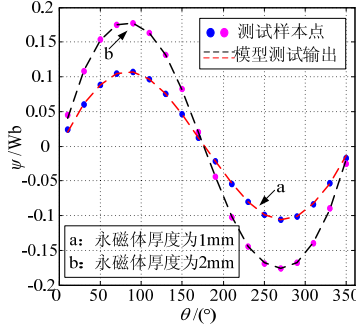
(b) 测试结果与实际值比较

图4 转子偏心时的结果比较图

Fig. 4 Result comparison chart with rotor eccentricity



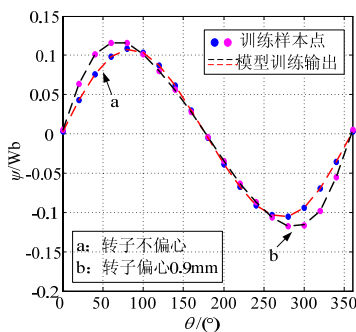
(a) 训练结果与实际值比较



(b) 测试结果与实际值比较

图3 永磁体厚度变化时的结果比较图

Fig. 3 Result comparison chart with change of Permanent magnet's thickness



(a) 训练结果与实际值比较

## 5 LS-SVM建模与径向基神经网络建模效果比较(Comparison of LS-SVM model and REFNN model)

与神经网络相比, LS-SVM在小样本数据集建模上有着很大的优势, 为了进一步比较两种方法建模的效果, 分别采用LS-SVM和径向基神经网络(Radial basis function neural network, RBFNN)建立的模型, 对18组测试样本数据的预测均方根误差和最大绝对误差的结果, 以及CPU运行时间进行了比较, 结果见表2. 由表2可见, 由于所选样本较少, RBFNN的测试误差较大, 说明以经验风险最小化为学习规则的RBFNN出现了过学习现象, 降低了该方法的泛化能力. 而LS-SVM却有着比较好的拟合能力, 没有出现过学习现象, 而且测试误差很小, 计算速度很快, 说明LS-SVM较好地克服了RBFNN的缺点, 具有更强的泛化能力和鲁棒性, 其预报性能明显优于RBFNN预测方法.

表2 LS-SVM与REFNN建模结果对比

Table 2 Comparison of LS-SVM and REFNN models

	LS-SVM	RBFNN
$\epsilon_{RMSE}$	2.9053e-04	0.0118
$\epsilon_{MAXE}$	8.7303e-04	0.0051
$t/s$	0.3260	1.0302

需要指出的是, 在实际情况下, 样机生产完成之后, 永磁体厚度为一定值, 此时的磁链模型应为 $\psi(\theta, i_M, i_B, l_0)$ , 如果试验条件许可, 可以利用测得BPMSM数据来建立磁链的离线模型, 在在线控制过程中, 利用测得的 $\theta, i_M, i_B, l_0$ 作为输入量, 可以得到磁链 $\psi$ 的值, 根据式(5)即得到径向悬浮力和转矩, 从而实现在线控制.

## 6 结论(Conclusion)

本文采用LS-SVM建立了BPMSM磁链 $\psi(\theta, i_M, i_B, l_m, l_0)$ 的非线性模型, 该模型除了

训练样本, 不需要电机的任何磁特性知识, 因此, 它很适用于具有强非线性特性的BPMSM的建模. 与RBFNN建模方法相比, 无论在准确性还是快速性上, 都有很大的提高, 所建模型更能正确反映BPMSM的磁特性. 仿真结果表明, 采用LS-SVM所建非线性模型精度高, 具有较强的预测能力, 为BPMSM的实时在线控制创造了条件, 模型建立过程和思想方法同样适用于其他类型的无轴承电机.

## Reference(References):

- [1] CHIBA A, FUKAO T, ICHIKAWA O, et al. *Magnetic bearings and bearingless drives*[M]. Boston, MA: Elsevier Newnes Press, 2005, 361-374.
- [2] ZHU H Q, CHENG Q L. Bearingless motor's radial suspension force control based on flux equivalent with virtual winding current analysis method[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2009, 54(9):1590-1598.
- [3] OOSHIMA M, CHIBA A, FUKAO T. Characteristics of a permanent magnet type bearingless motor[J]. *IEEE Transactions on Industry Application*, 1996, 32(2): 363-370.
- [4] REICHERT T, NUSSBAUMER T, GRUBER W, et al. Design of a novel bearingless permanent magnet motor for bioreactor applications[C]. *35th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics*, Porto, IEEE, 2009: 1086-1091.
- [5] VAPNIK V N. An overview of statistical learning theory[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1999, 10(5): 988-999.
- [6] SUYKENS, J A K. Support vector machines: a nonlinear modeling and control perspective[J]. *European Journal of Control*, 2001, 7(2): 311-327.
- [7] GAO J B, GUNN S R, HARRIS C J, et al. A probabilistic framework for SVM regression and error estimation[J]. *Machine Learning*, 2002, 46(3): 71-89.
- [8] 李磊, 毛志忠, 贾明兴, 刘芳, 等. 基于支持向量机的电弧炉逆内模控制器[J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(11): 1455-1462.
- (LI Lei, MAO Zhizhong, JIA Mingxing, et al. Support-vector-machine-based inverse internal model controller for electric arc furnace[J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(11): 1455-1462.)
- [9] YUAN X, WANG Y, WU L. SVM-based approximate model control for electronic throttle valve[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2008, 57(5): 2747-2756.
- [10] 刘胜, 王宇超, 傅荟璇. 船舶航向保持变论域模糊-最小二乘支持向量机复合控制[J]. *控制理论与应用*. 2011, 28(4): 485-490. (LIU Sheng, WANG Yuchao, FU Huiquan. Variable universe fuzzy-least squares support-vector-machine compound control for ship course-keeping[J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(4): 485-490.)
- [11] 穆朝絮, 张瑞民, 孙长银. 基于粒子群优化的非线性系统最小二乘支持向量机预测控制方法[J]. *控制理论与应用*. 2010, 27(2): 164-168. (MU Chaoxu, ZHANG Ruimin, SUN Changyin. LS-SVM predictive control based on PSO for nonlinear systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(2): 164-168.)
- [12] BOSER B E, GUYON I M, VAPNIK V N. A training algorithm for optimal margin classifiers[C]. *Proceedings of 5th Annual Workshop on Computational learning theory*, Pittsburgh, ACM, 1992: 144-152.

## 作者简介:

**孙晓东** (1981—), 男, 讲师, 博士研究生, 目前研究方向为无轴承电机, 非线性智能控制等, E-mail: xdsun@ujs.edu.cn;

**朱焜秋** (1964—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为无轴承电机, 磁轴承支撑高速电机传动系统, 特种电机非线性智能控制等, E-mail: zhuhuangqiu@ujs.edu.cn;

**杨泽斌** (1976—), 男, 副教授, 博士研究生, 目前研究方向为无轴承电机, E-mail: zbyang@ujs.edu.cn;

**张涛** (1978—), 男, 讲师, 博士研究生, 目前研究方向为无轴承永磁电机, E-mail: zhangtaohyit@126.com.