

文章编号: 1000-8152(2010)01-0000-00

基于极值搜索算法的一类 MIMO 非仿射型非线性系统输出跟踪控制

左 斌¹, 李 静²

(1. 海军航空工程学院 控制工程系, 山东 烟台 264001;

2. 海军航空工程学院 战略导弹工程系, 山东 烟台 264001)

摘要: 针对一类状态不可测的多输入多输出非仿射型非线性系统, 提出了基于极值搜索算法的输出跟踪控制方法. 此方法无需设计系统状态观测器, 仅利用系统的输出量和极值搜索向量形成控制律. 应用平均化理论分析平均化系统的稳定性, 然后利用奇异值扰动方法, 证明了所提出的控制方法可以保证闭环系统的稳定性和输出跟踪误差的收敛性. 仿真结果验证了本文方法的有效性.

关键词: 极值搜索算法; 非仿射非线性; 多输入多输出系统; 平均化理论; 奇异值扰动方法

中图分类号: TP273.23 **文献标识码:** A

Output tracking control for a class of MIMO non-affine nonlinear systems based on extremum seeking algorithm

ZUO Bin¹, LI Jing²

(1. Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University,
Yantai Shandong 264001, China;

2. Department of Strategic Missile Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University,
Yantai Shandong 264001, China)

Abstract: An output tracking control method based on extremum seeking algorithm is presented for a class of multiple-input and multiple-output (MIMO) non-affine nonlinear systems with unmeasured states. The control method doesn't use the state observer, but only applies the system output and the output of extremum seeking algorithm to designing the control law. The averaging theory is employed to analyze the stability of the average system. Then the proofs of stability of the closed-loop control system and convergence of the output tracking error are provided by using the singular perturbation method. Simulation results validate the effectiveness of the proposed method.

Key words: extremum seeking algorithm; non-affine nonlinear; MIMO system; averaging theory; singular perturbation method

1 引言 (Introduction)

非线性系统的输出跟踪控制问题具有重要的理论意义和实际意义, 其中 MIMO 非仿射型非线性系统的输出跟踪控制一直是控制理论研究的热点和难点问题之一. 文献 [1 ~ 2] 针对 MIMO 非线性系统, 分别提出了直接和间接自适应模糊控制方法. 文献 [3 ~ 4] 通过引入“主导输入”的概念, 提出了直接和间接模糊自适应控制方法. 这些非线性系统的控制方法都是基于系统的状态是完全可测的条件. 文献 [5 ~ 6] 针对状态不完全可测的 MIMO 仿射型非线性系统, 提出了基于观测器的自适应模糊控制方法, 但这些方法不能适用于非仿射型非线性系统. 文献 [7] 针对一类 MIMO 仿射型非线性互连系统, 提出一种自适应模糊控制算法, 通过设计观测器来

估计系统的状态, 保证闭环系统的所有信号是一致有界的, 然而此方法也无法直接应用于 MIMO 非仿射型非线性系统. 文献 [8] 针对一类 MIMO 仿射型非线性系统, 提出了一种神经网络输出反馈跟踪控制方法, 虽然此方法无需设计状态观测器或低通滤波器使得估计误差动态满足严格正实条件, 但是神经网络的设计需要一定的经验, 而且此方法不适用于 MIMO 非仿射型非线性系统. 文献 [9] 针对一类具有未知子系统模型的 MIMO 非线性大系统, 研究了一种分散自适应输出反馈神经网络控制方法, 虽然该方法适用于 MIMO 非仿射型非线性系统, 但需要借助于神经网络方法, 导致控制系统设计复杂, 且神经网络的权值调节需要大量经验.

目前, 有关 MIMO 非仿射型非线性系统的研究

文献相对较少. 在实际应用中, MIMO 非仿射型非线性系统代表一类广泛存在的实际系统, 因此有必要对 MIMO 非仿射型非线性系统进行深入地研究.

针对一类状态完全不可测的 MIMO 非仿射型非线性系统, 本文提出了一种基于极值搜索算法的非线性系统输出跟踪方法, 应用平均化理论分析平均化系统的稳定性, 同时采用奇异值扰动分析方法, 证明了闭环系统的稳定性和输出跟踪误差的收敛性. 仿真结果也验证了应用极值搜索算法控制 MIMO 非仿射型非线性系统的有效性.

2 问题描述 (Problem statement)

考虑如下一类 MIMO 非仿射型非线性系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ \mathbf{y} = h(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T \in R^n$ 为系统状态向量, 且均不可测量; $\mathbf{y} \in R^m$ 和 $\mathbf{u} \in R^p$ 分别为系统的输出向量和输入向量, 其中 \mathbf{y} 为可测量; $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 和 $h(\mathbf{x})$ 为未知的连续可导函数.

本文控制目标: 针对 MIMO 非仿射型非线性系统 (1), 在系统状态完全不可测的条件下, 无需利用状态观测器, 基于极值搜索算法设计输出反馈控制律 \mathbf{u} , 使得闭环控制系统稳定, 并使输出向量 \mathbf{y} 收敛至期望输出向量 $\mathbf{y}_r \in R^m$ 的有界邻域内.

为了能够利用极值搜索算法, 要求被控系统的输出量具有极大值或者极小值, 而系统 (1) 的输出向量 \mathbf{y} 并不符合此条件, 故而需要对系统 (1) 进行一定的变换. 重新定义系统的输出量为

$$\bar{\mathbf{y}} = -(\mathbf{y} - \mathbf{y}_r)^T (\mathbf{y} - \mathbf{y}_r) = -(h(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_r)^T (h(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_r) \quad (2)$$

显然, 当 $\mathbf{y} = \mathbf{y}_r$ 时, 输出量 $\bar{\mathbf{y}}$ 具有极大值 $\bar{\mathbf{y}}_{\max} = 0$.

构建新的多输入单输出 (multiple-input and single-output, MISO) 非仿射型非线性系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ \bar{\mathbf{y}} = \bar{h}(\mathbf{x}) = -(h(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_r)^T (h(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_r). \end{cases} \quad (3)$$

此时, 控制目标为: 针对 MISO 非仿射型非线性系统 (3), 在系统状态完全不可测的条件下, 基于极值搜索算法设计输出反馈控制律 \mathbf{u} , 使得闭环控制系统稳定, 并使系统 (3) 的输出量 $\bar{\mathbf{y}}$ 收敛至极大值 $\bar{\mathbf{y}}_{\max}$ 的有界邻域内.

3 基于极值搜索算法的控制方法设计及稳定性分析 (Design of the control method based on extremum seeking algorithm and stability analysis)

针对系统 (3), 采用极值搜索算法^[11]设计 MISO 闭环控制系统结构图如图 1 所示.

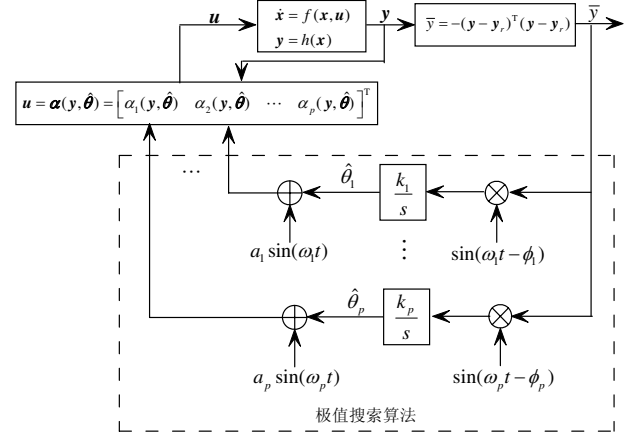


图 1 基于极值搜索算法的 MISO 闭环控制系统结构图
Fig. 1 Scheme of MISO closed-loop control system using extremum seeking algorithm

图 1 中, $\frac{k_i}{s}$ 为比例积分环节, $a_i \sin(\omega_i t)$ 和 $\sin(\omega_i t - \phi_i)$ 为系统的激励信号, 其中参数 k_i ($i = 1, 2, \dots, p$), 满足如下条件

$$k_i = \omega_i \delta K = O(\omega_i \delta) \quad (4)$$

式中, δ 是较小的正常数, K 是更小的正常数.

针对系统 (3), 设计控制律 \mathbf{u} 为:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = [\alpha_1(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \ \alpha_2(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \ \cdots \ \alpha_p(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\theta}})]^T \quad (5)$$

式中, 函数 $\alpha_i(\cdot)$ ($i = 1, 2, \dots, p$) 均为光滑函数, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\theta}_1 \ \hat{\theta}_2 \ \cdots \ \hat{\theta}_p]^T \in R^p$ 表示极值搜索向量.

为了便于问题的分析, 假设系统 (3) 满足:

假设 1 针对系统 (3), 存在渐近稳定的光滑函数 $x_i = l_i(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ ($l_i: R^p \rightarrow R, i = 1, 2, \dots, p$), 使得

$$f(\mathbf{l}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \boldsymbol{\alpha}(h(\mathbf{l}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), \hat{\boldsymbol{\theta}})) - \dot{\mathbf{x}}_r = 0 \quad (6)$$

成立. 式中, $\mathbf{x} = \mathbf{l}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = [l_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \ l_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \ \cdots \ l_n(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^T$, $\mathbf{x}_r = \mathbf{l}(\boldsymbol{\theta}^*)$ 为系统期望的状态变量, $\dot{\mathbf{x}}_r = \frac{d\mathbf{l}(\boldsymbol{\theta}^*)}{dt}$ 为期望状态变量 \mathbf{x}_r 的微分值, $\boldsymbol{\theta}^* = [\theta_1^* \ \theta_2^* \ \cdots \ \theta_p^*]^T \in R^p$ 为极值搜索向量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的最优值, 且 $\boldsymbol{\theta}^*$ 对应于期望的状态变量 \mathbf{x}_r , 输出量 $\mathbf{y} = h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{l}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$.

将光滑函数 $\mathbf{x} = \mathbf{l}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ 代入输出量 $\bar{\mathbf{y}} = \bar{h}(\mathbf{x})$ 中, 则有 $\bar{\mathbf{y}} = \bar{h} \circ \mathbf{l}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, 其中 $\bar{h} \circ \mathbf{l}(\cdot)$ 为函数 $\bar{h}(\cdot)$ 与函数 $\mathbf{l}(\cdot)$ 的复合函数形式. 对于输出量 $\bar{\mathbf{y}} = \bar{h} \circ \mathbf{l}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, 当 $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}^*$ 时, 输出量 $\bar{\mathbf{y}}$ 具有极大值 $\bar{\mathbf{y}}_{\max}$, 故有

$$\bar{\mathbf{y}} = \bar{h} \circ \mathbf{l}(\boldsymbol{\theta}^*) = \bar{\mathbf{y}}_{\max} = 0 \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial(\bar{h} \circ \mathbf{l})(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\theta}_i} \right|_{\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}^*} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial^2(\bar{h} \circ \mathbf{l})(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \hat{\theta}_i^2} \right|_{\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}^*} < 0 \quad (9)$$

假设 2 针对闭环控制系统如图 1 所示, 极值搜索过程的动态变化与系统的状态变量 \boldsymbol{x} 之间满足时标分离条件.

针对闭环控制系统的结构图 1, 可得

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = f(\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{\alpha}(h(\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x}_r), \hat{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{A})) - \dot{\boldsymbol{x}}_r \quad (10)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = k_i \bar{y} \sin(\omega_i t - \phi_i) \quad (11)$$

式中, $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_r$ 为误差状态变量, $\boldsymbol{A} = [a_1 \sin(\omega_1 t) \ a_2 \sin(\omega_2 t) \ \cdots \ a_p \sin(\omega_p t)]^T$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\theta}_1 \ \hat{\theta}_2 \ \cdots \ \hat{\theta}_p]^T \in R^p, i = 1, 2, \dots, p$.

已知当 $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}^*$ 时, 输出量 $\bar{y} = \bar{y}_{\max}$, 则最优极值搜索向量 $\boldsymbol{\theta}^* = [\theta_1^* \ \theta_2^* \ \cdots \ \theta_p^*]^T$ 的变化率为

$$\dot{\theta}_i^* = k_i \bar{y}_{\max} \sin(\omega_i t - \phi_i) \quad (12)$$

根据式 (2) 的定义可知 $\bar{y}_{\max} = 0$, 那么有 $\dot{\theta}_i^* = 0$. 定义新的误差向量 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ 为

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^* \quad (13)$$

式中, $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = [\tilde{\theta}_1 \ \tilde{\theta}_2 \ \cdots \ \tilde{\theta}_p]^T \in R^p$.

根据式 (4)、式 (11) 和式 (13), 可得

$$\dot{\tilde{\theta}}_i = \omega_i \delta K \bar{h}(\boldsymbol{x}) \sin(\omega_i t - \phi_i) \quad (14)$$

针对如图 1 所示的基于极值搜索算法的闭环控制系统, 同时考虑被控对象的状态误差动态方程式 (10) 和极值搜索向量误差动态方程式 (14), 应用平均化方法和奇异值扰动方法, 分析系统的稳定性.

注 1 在应用极值搜索算法的实际控制系统中, 通过选取较小的参数 δ 、 K 和 $a_i (i = 1, 2, \dots, p)$, 可使搜索向量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的动态变化比状态变量 \boldsymbol{x} 的变化慢得多. 当搜索向量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 缓慢变化时, 状态变量 \boldsymbol{x} 趋于平衡点的动态过程可以被忽略.

3.1 基于平均化方法的收敛性分析 (Convergence analysis based on the averaging method)

基于假设 2, 当搜索向量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 变化时, 可认为式 (10) 中的状态变量 \boldsymbol{x} 处于下点固定不动, 此时

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l}(\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{A}) \quad (15)$$

将式 (15) 代入式 (14), 可得简化后的数学模型

$$\dot{\tilde{\theta}}_{i,r} = \omega_i \delta K \bar{h} \circ \boldsymbol{l}(\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r + \boldsymbol{A}) \sin(\omega_i t - \phi_i) \quad (16)$$

式中, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_r = [\tilde{\theta}_{1,r} \ \tilde{\theta}_{2,r} \ \cdots \ \tilde{\theta}_{p,r}]^T \in R^p$ 为简化模型的极值搜索向量误差.

定义新的时间尺度为 $\tau_i = \omega_i t$, 则可得

$$\frac{d\tilde{\theta}_{i,r}}{d\tau_i} = \delta K \varphi(\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r + \boldsymbol{A}) \sin(\omega_i t - \phi_i) \quad (17)$$

式中, 函数 $\varphi(\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r + \boldsymbol{A}) = \bar{h} \circ \boldsymbol{l}(\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r + \boldsymbol{A})$.

针对式 (17), 应用平均化方法, 可得其对应的平

均化模型为

$$\frac{d\tilde{\theta}_{i,r}^{ave}}{d\tau_i} = \frac{\delta K}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{ave} + \boldsymbol{A}) \sin(\sigma_i - \phi_i) d\sigma_i \quad (18)$$

将函数 $\varphi(\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{ave} + \boldsymbol{A})$ 在 $(\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{ave})$ 处进行泰勒展开, 可得

$$\begin{aligned} & \varphi(\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{ave} + \boldsymbol{A}) \\ &= \varphi(\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{ave}) + \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{ave})}{\partial(\theta_1^* + \tilde{\theta}_{1,r}^{ave})} a_1 \sin(\omega_1 t) + \cdots \\ &+ \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{ave})}{\partial(\theta_p^* + \tilde{\theta}_{p,r}^{ave})} a_p \sin(\omega_p t) + O\left(\sum_{q=1}^p a_q^2\right) \end{aligned} \quad (19)$$

当 $i \neq j (i, j \in [1, 2, \dots, p])$ 时, 存在

$$\int_0^{2\pi} a_j \sin\left(\frac{\omega_j}{\omega_i} \sigma_i\right) \sin(\sigma_i - \phi_i) d\sigma_i = a_j b_{ij} \quad (20)$$

式中, $b_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{\omega_i}{\omega_j + \omega_i} \sin\left(2\pi \frac{\omega_j}{\omega_i} - \phi_i\right) + \frac{1}{2} \frac{\omega_i}{\omega_j - \omega_i} \sin\left(2\pi \frac{\omega_j}{\omega_i} + \phi_i\right) - \frac{\omega_i \omega_j}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \sin(\phi_i)$.

当 $i = j$ 时, 存在

$$\int_0^{2\pi} a_i \sin(\sigma_i) \sin(\sigma_i - \phi_i) d\sigma_i = a_i b_{ii} \quad (21)$$

式中, $b_{ii} = \pi \cos(\phi_i)$.

将式 (19) 中函数 $\frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{ave})}{\partial(\theta_i^* + \tilde{\theta}_{i,r}^{ave})}$ 在 $\theta_i^* (i = 1, 2, \dots, p)$ 处进行泰勒展开, 可得

$$\frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{ave})}{\partial(\theta_i^* + \tilde{\theta}_{i,r}^{ave})} = \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\theta}^*)}{\partial(\theta_i^*)} + \frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{\theta}^*)}{\partial(\theta_i^*)^2} \tilde{\theta}_{i,r}^{ave} + O(\delta a_i^4) \quad (22)$$

针对平均化模型式 (18), 选取 Lyapunov 函数为

$$V(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{ave}) = \frac{1}{2} (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{ave})^T (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{ave}) \quad (23)$$

将式 (23) 对时间求微分, 可得

$$\frac{dV(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{ave})}{dt} = \omega_1 \tilde{\theta}_{1,r}^{ave} \frac{d\tilde{\theta}_{1,r}^{ave}}{d\tau_1} + \cdots + \omega_p \tilde{\theta}_{p,r}^{ave} \frac{d\tilde{\theta}_{p,r}^{ave}}{d\tau_p} \quad (24)$$

通过选取合适的参数 a_i 、 ω_i 和 $\phi_i (i, j = 1, 2, \dots, p)$, 保证 $a_i > 0$ 、 $\omega_i > 0$ 和 $b_{ii} > 0$, 且由式 (9) 可知 $\frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{\theta}^*)}{\partial(\theta_i^*)^2} < 0$. 如果存在

$$\begin{aligned} & \frac{2}{p} \sqrt{a_i \omega_i b_{ii} a_j \omega_j b_{jj} \frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{\theta}^*)}{\partial(\theta_i^*)^2} \frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{\theta}^*)}{\partial(\theta_j^*)^2}} \\ & \geq \left| a_j \omega_j b_{ij} \frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{\theta}^*)}{\partial(\theta_j^*)^2} \right| + \left| a_i \omega_i b_{ji} \frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{\theta}^*)}{\partial(\theta_i^*)^2} \right| \end{aligned} \quad (25)$$

将式 (8)、式 (18) ~ 式 (22), 以及式 (25) 代入式 (24), 可得

$$\frac{dV(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{ave})}{dt} \leq 2\lambda V(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{ave}) + O\left(\delta \sum_{q=1}^p a_q^2\right) \quad (26)$$

式中, $\lambda = \max \left\{ \frac{a_1 \omega_1 b_{11}}{p} \frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{\theta}^*)}{\partial(\theta_1^*)^2}, \frac{a_2 \omega_2 b_{22}}{p} \frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{\theta}^*)}{\partial(\theta_2^*)^2}, \dots, \frac{a_p \omega_p b_{pp}}{p} \frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{\theta}^*)}{\partial(\theta_p^*)^2} \right\}$.

根据上述分析,且考虑到文献 [10] 中的平均化理论,可得如下定理.

定理 1 针对满足假设条件 1 ~ 2 的非线性系统 (16), 如果参数 δ 和 a_i 的选取满足 $\delta \in (0, \bar{\delta})$ 和 $a_i \in (0, \bar{a}_i) (i = 1, 2, \dots, p)$, 其中 $\bar{\delta}$ 和 \bar{a}_i 为存在的上限值, 那么系统 (16) 将渐近收敛于唯一的周期解 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{2\pi}$, 解的周期为 2π , 且满足如下不等式

$$\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{2\pi}\| \leq O \left(\delta \sum_{q=1}^p a_q^2 \right).$$

考虑到 $\bar{y} = \varphi(\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^s + \mathbf{A})$, 其中 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^s$ 表示系统 (16) 的所有解. 将其在 $\boldsymbol{\theta}^*$ 处进行泰勒展开, 可得

$$\begin{aligned} \bar{y} = & \varphi(\boldsymbol{\theta}^*) + \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\theta}^*)}{\partial(\theta_1^*)} \left(\tilde{\theta}_{1,r}^s + a_1 \sin(\omega_1 t) \right) + \dots \\ & + \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\theta}^*)}{\partial(\theta_p^*)} \left(\tilde{\theta}_{p,r}^s + a_p \sin(\omega_p t) \right) \\ & + \frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{\theta}^*)}{\partial(\theta_1^*)^2} \left(\tilde{\theta}_{1,r}^s + a_1 \sin(\omega_1 t) \right)^2 \\ & + \dots + \frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{\theta}^*)}{\partial(\theta_p^*)^2} \left(\tilde{\theta}_{p,r}^s + a_p \sin(\omega_p t) \right)^2 \\ & + O \left(\sum_{q=1}^p \left(\tilde{\theta}_{q,r}^s + a_q \sin(\omega_q t) \right)^3 \right) \end{aligned} \quad (27)$$

由于

$$\tilde{\theta}_{i,r}^s + a_i \sin(\omega_i t) = \left(\tilde{\theta}_{i,r}^s - \tilde{\theta}_{i,r}^{2\pi} \right) + \tilde{\theta}_{i,r}^{2\pi} + a_i \sin(\omega_i t) \quad (28)$$

在式 (28) 中, 第一项分式 $\left(\tilde{\theta}_{i,r}^s - \tilde{\theta}_{i,r}^{2\pi} \right)$ 收敛至零点, 第二项分式 $\tilde{\theta}_{i,r}^{2\pi}$ 收敛至零点 $O(\delta a_i^2)$ 邻域内, 第三项分式 $a_i \sin(\omega_i t)$ 处于 $O(a_i)$ 邻域内. 故而, 可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left| \tilde{\theta}_{i,r}^s + a_i \sin(\omega_i t) \right| = O(a_i + \delta) \quad (29)$$

将式 (8) 和式 (29) 代入式 (27), 则有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\bar{y}(t) - \varphi(\boldsymbol{\theta}^*)| = O \left(\delta^2 + \sum_{q=1}^p a_q^2 \right) \quad (30)$$

由此可知, 系统 (3) 的输出量 \bar{y} 将渐近收敛于 \bar{y}_{\max} 的有界邻域 $O \left(\delta^2 + \sum_{q=1}^p a_q^2 \right)$ 内, 为此必须选取较小的参数 δ 和 $a_q (q = 1, 2, \dots, p)$.

注 2 为了确保式 (25) 成立, 可按如下步骤设计参数: 不失一般性可假设 $j > i$, 选取相角 $\phi_i = 0, \phi_j = 0$ 或者 $\phi_i = \pi, \phi_j = \pi$, 频率 $\omega_i = 2^i \omega_0$ 和 $\omega_j = 2^j \omega_0$ (其中 ω_0 为基准频率), 幅值 $a_j \geq 2^{j-i} \omega_0 a_i b_{ji}^2 p^2 \left| \frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{\theta}^*)}{\partial(\theta_i^*)^2} \right| / 4 \left| \frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{\theta}^*)}{\partial(\theta_j^*)^2} \right|$, 那么由式 (21) 可知 $|b_{ii}|$ 和 $|b_{jj}|$ 取得最大值, 由式 (20) 可

知 $b_{ij} = 0$, 且将上述设计参数代入式 (25) 即可.

3.2 奇异值扰动分析 (Singular perturbation analysis)

为了应用奇异值扰动方法, 将式 (10) 和式 (14) 转化为标准的奇异值扰动模型形式, 则有

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} &= f(\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_r, \boldsymbol{\alpha}(h(\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_r), \boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{2\pi} + \mathbf{A})) - \dot{\mathbf{x}}_r \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{z}}}{dt} &= \begin{bmatrix} \omega_1 \delta K \bar{h} \circ l(\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{2\pi} + \mathbf{A}) \sin(\omega_1 t - \phi_1) \\ - \omega_1 \delta K \bar{h} \circ l(\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{2\pi} + \mathbf{A}) \sin(\omega_1 t - \phi_1) \\ \omega_2 \delta K \bar{h} \circ l(\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{2\pi} + \mathbf{A}) \sin(\omega_2 t - \phi_2) \\ - \omega_2 \delta K \bar{h} \circ l(\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{2\pi} + \mathbf{A}) \sin(\omega_2 t - \phi_2) \\ \vdots \\ \omega_p \delta K \bar{h} \circ l(\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{2\pi} + \mathbf{A}) \sin(\omega_p t - \phi_p) \\ - \omega_p \delta K \bar{h} \circ l(\boldsymbol{\theta}^* + \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{2\pi} + \mathbf{A}) \sin(\omega_p t - \phi_p) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

式中, 向量 $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z} - \mathbf{z}^{2\pi} = \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{2\pi}$.

根据文献 [10] 中在无穷区间内的 Tikhonov 理论, 针对式 (32), 当选取足够小的 $a_i (i = 1, 2, \dots, p)$ 时, $\tilde{\mathbf{z}}$ 渐近收敛于零点的 $O \left(\sum_{q=1}^p \frac{1}{\omega_q} \right)$ 邻域内, 而根据关系式 $\tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{2\pi}$ 可知, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ 渐近收敛于 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{2\pi}$ 的 $O \left(\sum_{q=1}^p \frac{1}{\omega_q} \right)$ 邻域内. 根据定理 1 可知, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_r^{2\pi}$ 渐近收敛于零点的 $O \left(\delta \sum_{q=1}^p a_q^2 \right)$ 邻域内, 因此 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ 收敛于零点的 $O \left(\sum_{q=1}^p \left(\delta a_q^2 + \frac{1}{\omega_q} \right) \right)$ 邻域内. 根据上述分析, 由等式 $\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^* = \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{A}$ 可知, 搜索向量 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ 渐近收敛于 $\boldsymbol{\theta}^*$ 的 $O \left(\delta + \sum_{q=1}^p \left(a_q + \frac{1}{\omega_q} \right) \right)$ 邻域内.

针对式 (31), 基于 Tikhonov 理论, 当选取足够小的 $a_q (q = 1, 2, \dots, p)$ 和 δ 时, 存在

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = O \left(\delta + \sum_{q=1}^p \left(a_q + \frac{1}{\omega_q} \right) \right) \quad (33)$$

将 $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_r$ 和 $\mathbf{x}_r = \mathbf{l}(\boldsymbol{\theta}^*)$ 代入式 (33), 可得

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{l}(\boldsymbol{\theta}^*) + O \left(\delta + \sum_{q=1}^p \left(a_q + \frac{1}{\omega_q} \right) \right) \quad (34)$$

因而, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{x}(t) - \mathbf{l}(\boldsymbol{\theta}^*)$ 也将渐近收敛于零点的 $O \left(\delta + \sum_{q=1}^p \left(a_q + \frac{1}{\omega_q} \right) \right)$ 邻域内.

由于 MISO 非仿射型非线性系统 (3) 的输出量 $\bar{y} = \bar{h}(\mathbf{x}) = \bar{h} \circ \mathbf{l}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, 那么 \mathbf{y} 将渐近收敛于 \mathbf{y}_r 的 $O\left(\delta + \sum_{q=1}^p \left(a_q + \frac{1}{\omega_q}\right)\right)$ 邻域内. 显然, δ 和 a_q 取值越小, 且 ω_q 取值越大, 则系统收敛误差将越小. 通过上述分析, 总结得到如下定理.

定理 2 针对满足假设条件 1 ~ 2 的非线性系统 (10) ~ (11), 如果参数 δ 、 ω_i 和 a_i ($i = 1, 2, \dots, p$) 的选取满足 $\delta \in (0, \bar{\delta})$ 、 $\frac{1}{\omega_i} \in \left(0, \frac{1}{\bar{\omega}_i}\right)$ 和 $a_i \in (0, \bar{a}_i)$, 其中 $\bar{\delta}$ 、 $\bar{\omega}_i$ 和 \bar{a}_i 为存在的上限值, 那么向量 $(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ 渐近收敛于 $(\mathbf{l}(\boldsymbol{\theta}^*), \boldsymbol{\theta}^*)$ 的 $O\left(\delta + \sum_{q=1}^p \left(a_q + \frac{1}{\omega_q}\right)\right)$ 有界邻域内, 且输出量 \mathbf{y} 渐近收敛于 \mathbf{y}_r 的 $O\left(\delta + \sum_{q=1}^p \left(a_q + \frac{1}{\omega_q}\right)\right)$ 邻域内.

针对 MIMO 非仿射型非线性系统 (1), 采用控制律 $\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ 时, 可使输出量 \mathbf{y} 渐近收敛于期望输出向量 \mathbf{y}_r 的有界邻域内, 从而实现了控制目标.

4 仿真分析 (Simulation analysis)

考虑如下的 MIMO 非仿射型非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12}, \\ \dot{x}_{12} = 0.1 \cos u_1 - 0.05x_{12}\dot{u}_1 \sin u_1 + 0.1x_{21} \\ \quad + d_1, \\ \dot{x}_{21} = x_{22}, \\ \dot{x}_{22} = 0.1x_{21}^2 + 0.2x_{22} \sin u_2 - \cos u_2 + 0.2x_{11} \\ \quad + d_2, \\ y_1 = x_{11}, \\ y_2 = x_{21}. \end{cases} \quad (35)$$

式中, $\mathbf{x} = [x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}]^T$ 为状态变量, $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^T$ 为输出量, $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$ 为输入量, $d_1 = -0.2 \cos(0.2t) - 0.1$ 和 $d_2 = -0.1 \sin(0.6t)$ 为外界干扰. 控制目的是使输出量 y_1 和 y_2 分别收敛于它们的期望轨迹 $y_{1r} = \sin(0.06t) + 0.8 \cos(0.03t)$ 和 $y_{2r} = 0.1 - 0.1 \sin(0.06t) - 0.3 \cos(0.1t)$.

分别采用本文提出的控制方法和文献 [9] 提出的分散自适应输出反馈控制方法, 对研究对象 (35) 进行仿真对比. 本文设计方法中控制律分别为 $u_1 = y_1 + 0.6\theta_1 - 0.1\theta_2$ 和 $u_2 = 0.25y_2 + 0.15\theta_1 - 0.8\theta_2$, 设计参数分别选取为: $a_1 = 0.6$, $a_2 = 1.6$, $\omega_1 = 25 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 50 \text{ rad/s}$, $\phi_1 = 0^\circ$, $\phi_2 = 0^\circ$, $k_1 = 0.3$, $k_2 = 0.6$. 文献 [9] 中设计参数分别为: $f_1^L = 1.2$, $f_2^L = 1.0$, $\Gamma_{b_1} = \text{diag}\{2.5\}$, $\Gamma_{b_2} = \text{diag}\{3.6\}$, $\Gamma_{c_1} = \text{diag}\{3.0\}$, $\Gamma_{c_2} = \text{diag}\{6.0\}$, $\gamma_{s_1} = 1.6$, $\gamma_{s_2} = 1.2$, $\gamma_{\theta_1} = 0.8$, $\gamma_{\theta_2} = 1.0$, 神

经网络的基函数选择高斯函数, 中心值平均分布于 $[-1, 1]$ 之间, 影响范围为 0.6. 当系统 (35) 的初始状态为 $[x_{11}^0, x_{12}^0, x_{21}^0, x_{22}^0] = [1.6, 0, 0, 0]$ 时, 仿真结果如图 2 ~ 图 7 所示.

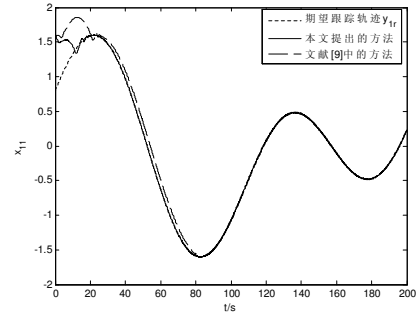


图 2 状态变量 x_{11} 仿真结果

Fig. 2 Results of the state x_{11}

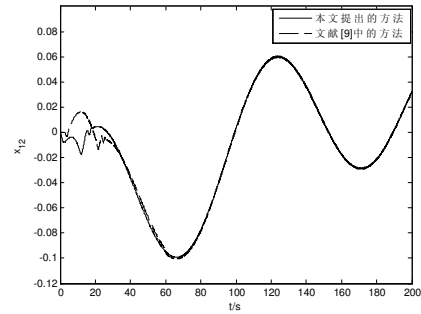


图 3 状态变量 x_{12} 仿真结果

Fig. 3 Results of the state x_{12}

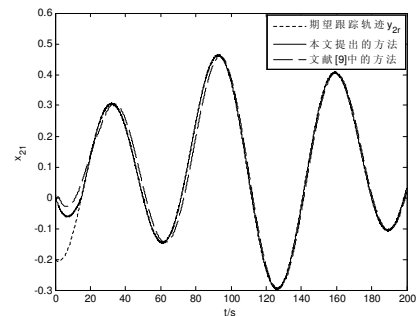


图 4 状态变量 x_{21} 仿真结果

Fig. 4 Results of the state x_{21}

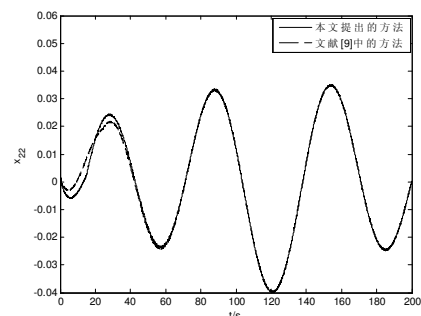
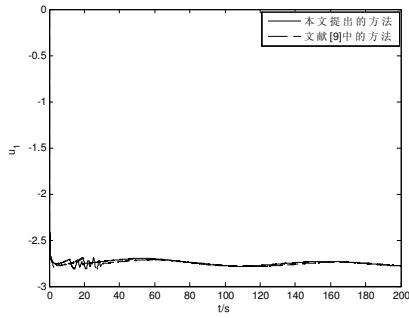
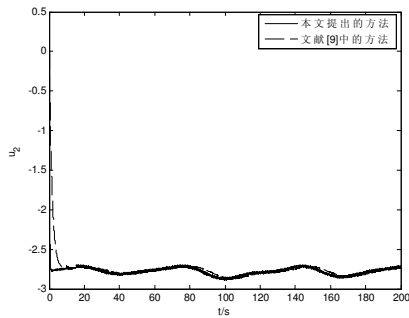


图 5 状态变量 x_{22} 仿真结果

Fig. 5 Results of the state x_{22}

图 6 控制量 u_1 仿真结果Fig. 6 Results of the control input u_1 图 7 控制量 u_2 仿真结果Fig. 7 Results of the control input u_2

在下列仿真结果中, 点线表示期望跟踪轨迹 y_{1r} 和 y_{2r} , 实线表示利用本文的设计方法得到的仿真结果, 虚线表示利用文献 [9] 的方法得到的仿真结果. 根据仿真图 2 和图 4 可知, 在本文设计方法中, 状态变量 x_{11} 和 x_{21} 经过十几秒的搜索后可以较好地跟踪期望轨迹 y_{1r} 和 y_{2r} ; 而在文献 [9] 的方法中, 状态变量 x_{11} 和 x_{21} 在经过二十余秒的运动后可以跟踪期望轨迹 y_{1r} 和 y_{2r} , 但是存在一定的误差, 大约七十秒后才能较好地跟踪期望轨迹. 在文献 [9] 的方法中, 导致状态变量在跟踪期望轨迹的过程中存在误差的原因在于神经网络的权值自学习过程需要一定的时间, 而在学习过程中输出值与期望跟踪值之间会存在一定误差. 由仿真图 3 和图 5 可知, 本文设计方法中 x_{12} 和 x_{22} 的趋近速度在前期稍快于文献 [9] 的方法结果. 由仿真图 6 和图 7 可知, 两种设计方法中控制量 u_1 和 u_2 的情况类似, 取值都在允许范围内. 通过对比两种方法可知, 这两种方法都可有效抑制外界干扰的影响, 使系统的输出量跟踪期望轨迹, 但在动态性能和稳态误差上本文方法要优于文献 [9] 的方法, 且控制系统的设计结构更简单.

5 结论 (Conclusion)

本文针对一类状态完全不可测的 MIMO 非仿射型非线性系统, 提出了基于极值搜索算法的输出跟踪控制方法. 此方法仅需要利用可测量的系统输出量和极值搜索向量形成控制律, 无需引入系统状态

观测器, 简化了控制系统的结构. 应用平均化理论和奇异值扰动方法, 证明了所提出的控制方法可以保证闭环系统的稳定性和输出跟踪误差的收敛性. 仿真结果表明, 在 MIMO 非仿射型非线性系统中应用本文的方法可以获得期望的控制效果.

参考文献 (References):

- [1] Zhang H G, Bien Z G. Adaptive fuzzy control of MIMO nonlinear systems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 115(2): 191 – 204.
- [2] Chang Y C. Robust tracking control for nonlinear MIMO systems via fuzzy approaches[J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 1535 – 1545.
- [3] Liu Guorong, Wan Baiwu. Direct adaptive fuzzy robust control for a class of nonlinear MIMO systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(5): 693 – 698.
(刘国荣, 万百五. 一类非线性 MIMO 系统的直接自适应模糊鲁棒控制. 控制理论与应用 [J]. 2003, 20(5): 693 – 698.)
- [4] Liu Guorong, Wan Baiwu. Indirect adaptive fuzzy robust control for a class of nonlinear MIMO systems[J]. *Control and Decision*, 2002, 17(S): 676 – 680.
(刘国荣, 万百五. 一类非线性 MIMO 系统的间接自适应模糊鲁棒控制. 控制与决策 [J]. 2002, 17(S): 676 – 680.)
- [5] Tong Shaocheng, Chai Tianyou. Adaptive fuzzy output feedback control for a class of MIMO nonlinear systems[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2005, 33(6): 987 – 990.
(佟绍成, 柴天佑. 一类 MIMO 非线性系统的自适应模糊输出反馈控制. 电子学报 [J]. 2005, 33(6): 987 – 990.)
- [6] Tong Shaocheng, Qu Lianjiang. Fuzzy adaptive output feedback control for nonlinear MIMO systems[J]. *Control and Decision*, 2005, 20(7): 789 – 793.
(佟绍成, 曲连江. 一类非线性 MIMO 系统的模糊自适应输出反馈控制. 控制与决策 [J]. 2005, 20(7): 789 – 793.)
- [7] Kang Qiang, Wang Wei. Observer-based adaptive fuzzy control for a class of nonlinear interconnected systems[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(7): 966 – 972.
(康强, 王伟. 基于观测器的非线性互连系统的自适应模糊控制. 控制与决策 [J]. 2009, 24(7): 966 – 972.)
- [8] Hu Hui, Liu Guorong, Liu Dongbo, Guo Peng. Output feedback tracking control for a class of uncertain nonlinear MIMO systems using neural network[J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(3): 382 – 386.
(胡慧, 刘国荣, 刘洞波, 郭鹏. 一类不确定非线性 MIMO 系统的神经网络输出反馈跟踪控制. 控制理论与应用 [J]. 2010, 27(3): 382 – 386.)
- [9] Bahram K, Mohammad B M, Masoud K G, Iman S. Decentralized adaptive control of large-scale affine and nonaffine nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2009, 58(8): 2459 – 2467.
- [10] Khalil H K. *Nonlinear systems*(2nd edition)[M]. Englewood Cliffs, American: Prentice Hall, 1996.
- [11] Tan Y, Netic D, Mareels I. On stability properties of a simple extremum seeking scheme[C] // *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control*. San Diego: IEEE, 2006: 2807 – 2812.

作者简介:

左 斌 (1979—), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为自适应控制、智能控制和非线性控制, E-mail: zuobin97117@163.com;

李 静 (1977—), 女, 博士, 讲师, 目前研究方向为飞行器制导与控制、非线性控制, E-mail: lijing19772006@yahoo.com.cn.