

伪多跳中继分布式一致性算法

彭焕新^{1,2}, 戚国庆¹, 盛安冬¹

(1. 南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094; 2. 南京工业职业技术学院 机械系, 江苏 南京 210046)

摘要: 为了提高分布式一致性问题的收敛速度, 减少节点间的通信成本, 本文提出一种分布式一致性算法. 新算法采用单跳通信, 利用非邻接节点的前状态信息进行节点状态更新. 本文证明了在无向通信拓扑下新算法的一致性收敛, 并分析计算了新算法的通信量以及收敛速度的变化. 通过理论分析和仿真验证, 结果表明新算法具有收敛速度快, 通信方式简单, 通信量少, 存在通信延时情况下通信数据不容易丢失等优点.

关键词: 分布式一致性; 多智能体系统; 单跳通信; 多跳中继通信

中图分类号: TP274 **文献标识码:** A

Pseudo multi-hop relay distributed consensus algorithm

PENG Huan-xin^{1,2}, QI Guo-qing¹, SHENG An-dong¹

(1. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China;

2. Department of Mechanical Engineering, Nanjing Institute of Industry Technology, Nanjing Jiangsu 210046, China)

Abstract: In order to accelerate the convergence rate of distributed consensus problems and reduce the communication costs among nodes. A new distributed consensus algorithm with single-hop communication is presented. The new algorithm makes use of the previous information of non-adjacent nodes to update the states of the nodes. We prove that the algorithm is convergent under undirected topology, and calculate the communication volume and convergence rate of the new algorithm. By analyzing and simulating on the new algorithm, the convergence rate of the new algorithm is higher, the communication mode is simpler and the communication overload is less in the new algorithm, and communication data are not easy to lose under communication time-delays.

Key words: distributed consensus; multi-agent system; single-hop communication; multi-hop relay communication

1 引言(Introduction)

多智能体(multi-agent systems)系统在许多领域应用广泛, 例如无人飞行器的协调控制^[1-2]、队形控制^[3-4]、群集^[5-6]、分布式传感器网络等^[7-9]. 因此, 近年来, 多智能体系统的分布式一致性(distributed consensus)问题已经引起许多研究人员的兴趣^[10-16].

多智能体系统的分布式一致性问题, 是指在没有中心协调器(central coordinator)或全局通信下, 每个智能体利用自身的状态和相互通信的邻近智能体的状态进行状态更新, 最后所有智能体状态能达到一个共同的输出值. 通常情况下, 多智能体的分布式一致性是指分布式平均一致性(distributed average consensus), 即所有智能体状态最终达到每个智能体初始状态的平均值.

从多智能体的初始状态开始到达到共同输出状态所需要的时间多少, 即分布式一致性算法的收敛速度, 是分布式一致性问题的一个重要研究内容, 特别是在大规模多智能体系统中. 文献[17]根据谱

图论和拉普拉斯矩阵理论, 指出分布式一致性收敛速度由网络的拓扑结构和局部加权系数确定, 收敛速度取决于网络拓扑图的代数连通性(algebraic connectivity).

提高分布式一致性算法的收敛速度, 关键是提高网络拓扑图的代数连通性. 目前, 提高分布式一致性算法的收敛速度主要有优化网络拓扑结构^[13, 18-19]、优化加权系数^[12]、以及节点间采用不同通信方式^[15, 20]等等^[21-23]方法. 这些方法虽然很大程度上提高了分布式一致性算法的收敛速度, 但是也存在一些不足. 优化网络拓扑结构, 能大大提高网络拓扑图的代数连通性, 但是对于已经给定的通信网络拓扑结构则无能为力, 同时必须事先知道整个网络拓扑结构; 优化加权系数方法必须事先知道整个通信网络拓扑结构; 采用不同的通信方式的缺点是必须采用特定的通信方式.

传统的分布式一致性算法, 采用单跳通信. 节点与邻接节点间在每个采样间隔只通信一次, 通过利

用相互通信的邻接节点的状态来进行自身节点状态的更新. 为了提高分布式一致性算法的收敛速度, 文献[20]提出多跳中继分布式一致性算法(以下简称多跳算法), 该算法采用多跳中继通信(multi-hop relay communication), 利用非邻接节点的状态进行自身节点状态的更新. 由于每个节点获得的其他节点信息增加, 因此这种方法很大程度上提高了分布式一致性算法的收敛速度. 但是, 多跳中继通信方式复杂, 特别是在大规模多智能体系统中. 多跳中继通信要求每个采样间隔进行多次中继通信, 增加了通信要求和通信成本; 对中继节点的通信负载较重; 当存在通信延时(time-delay), 多跳中继通信延时累积, 容易造成通信数据的丢失. 因此多跳算法在提高收敛速度的同时, 也增加了通信的复杂性和成本. 对于智能体间通信存在限制的情况下, 多跳算法的实用性不高.

基于上述分析, 本文提出一种新的分布式一致性算法的离散表达形式, 在不改变网络拓扑结构的基础上, 同传统分布式一致性算法一样采用单跳通信, 同时又像多跳算法一样利用非邻接节点的信息来提高收敛速度. 虽然新算法同传统分布式一致性算法一样都采用单跳通信, 但是由于利用了非邻接节点的信息, 因此收敛速度大大提高. 新算法与多跳算法比较, 虽然都是通过利用非邻接节点的信息来提高收敛速度, 而且收敛速度相当, 但是新算法由于采用单跳通信, 因此减少了通信复杂性和通信成本. 同时通过对两种算法的通信量比较, 发现新算法的通信量大大减少. 新算法在利用非邻接节点信息以及表达形式上与多跳算法有类似之处, 为了方便起见, 本文称这种新算法为伪多跳中继分布式一致性算法(以下简称伪多跳算法).

2 伪多跳中继分布式一致性算法(Pseudo multi-hop relay distributed consensus algorithm)

首先, 介绍本文需要用到的一些相关概念. 无向拓扑图 $G(V, E)$ 代表多智能体系统的通信拓扑, 节点集 V 代表智能体, 边集 E 代表智能体之间的通信连接. 设节点 $i, j \in V$, 用 $(i, j) \in E$ 表示边, 前后节点分别称之为边的头与尾. 同节点 i 相连, 且头为 i 的边数的和, 称为节点 i 的出度; 和节点 i 相连, 且尾为 j 的边数的和, 称为节点 i 的入度. 如果每个节点的出度等于其入度, 则称该图是平衡图. 无向图是平衡图. 路径是指某个有序节点集, 其任意相邻的两个节点所构成的边 $(i, j) \in E$. 如果图 G 的任意两个节点间都存在一条路径相连, 两节点分别为路径的头与尾, 则图 G 是连通的. 对于节点 i , 所有满足 $(i, j) \in E$ 的节点的集合称为 i 的邻接节点集, 用 N_i 表示节点 i 的邻接节点集, 邻接节点集的元素为节点 i 的邻接节

点. $A_1 = \{w_{ij}\}$ (w_{ij} 为边 (i, j) 的权重值), L_1 分别为 $G(V, E)$ 对应的加权邻接矩阵和拉普拉斯矩阵, 设 $\hat{G}(V, \hat{E})$ 为二跳通信拓扑^[20], $A_2 = \{\beta_{il}\}$, L_2 分别为二跳通信拓扑的加权邻接矩阵和拉普拉斯矩阵:

$$L_1 = \Delta_1 - A_1, \quad \Delta_1 = \text{diag}\left\{\sum_{j=1}^n w_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^n w_{nj}\right\},$$

$$A_2 = \{\beta_{il}\}, \quad \beta_{il} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n w_{ij}w_{jl}, & i \neq l, \\ 0, & i = l, \end{cases}$$

$$\Delta_2 = \text{diag}\left\{\sum_{l=1}^n \beta_{1l}, \dots, \sum_{l=1}^n \beta_{nl}\right\}, \quad L_2 = \Delta_2 - A_2.$$

设网络总节点数为 n , N_i 为 i 节点的邻接节点集, 单跳分布式一致性算法^[17]可以写成:

$$\dot{x}_i(t) = - \sum_{j \in N_i} w_{ij}(x_i(t) - x_j(t)), \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -L_1 \mathbf{x}(t), \quad (2)$$

其中 $x_i(t)$ 表示第 i 个智能体的状态:

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ \dots \ x_n(t)]^T.$$

式(1)为第 i 个智能体的状态更新方程, 式(2)为整个网络中智能体的状态更新方程的向量表达形式.

文献[20]根据多跳中继通信提出多跳算法:

$$\dot{x}_i(t) = - \sum_{j \in N_i} w_{ij}\{(x_i(t) - x_j(t)) + \sum_{l \in N_j} w_{jl}\{(x_i(t) - x_l(t)) + \dots\}\}, \quad (3)$$

N_i, N_j 分别为 i 节点、 j 节点的邻接节点集. 式(3)利用多跳中继通信, 使节点 i 获得关于非邻接节点的信息.

本文提出伪多跳算法的一般离散形式, 首先提出伪二跳中继分布式一致性算法(以下简称伪二跳算法), 对于任意节点 i :

$$\begin{aligned} x_i(k+1) = & \\ x_i(k) - \varepsilon \sum_{j \in N_i} w_{ij}\{(x_i(k) - x_j(k)) + & \\ y_j(k) + \sum_{l \in N_j} w_{jl}\{(x_i(k-1) - x_j(k-1))\}\}, & (4) \end{aligned}$$

$$y_i(k+1) = \sum_{j \in N_i} w_{ij}(x_i(k) - x_j(k)), \quad (5)$$

其中 ε 为步长. 从式(4)–(5)可以看出, $\sum_{j \in N_i} x_j(k-1)$ 信息已经在 $k-1$ 时刻传送给节点 i , 并存储在节点 i 中. $\sum_{j \in N_i} w_{ij}, \sum_{j \in N_i} \sum_{l \in N_j} w_{jl}$ 是常数信息, 在整个过程中, 只要传递一次就行. 所以在 k 时刻节点 i 的邻接节点 j 传送给节点 i 的信息只需要 $\sum_{j \in N_i} x_j(k), \sum_{j \in N_i} y_j(k)$ 两信息. 而二跳算法, 需要传输 $\sum_{j \in N_i} x_j(k), \sum_{j \in N_i} \sum_{l \in N_j} x_l(k)$ 信息. 显然, 伪二跳算法的通信量比二跳算法少. 以任意连通拓扑图为例, 设每个节点的度平均为 a , 即每个节点平均有 a 个邻接节点, 则在伪二跳算法中,

每个节点接到的信息包括 a 个邻接节点的状态信息和 a 个邻接节点派生的 y 值信息, 共计 $2a$ 个信息; 而二跳算法中每个节点接收到的信息包括 a 个邻接节点状态信息和 a^2 个二跳邻接节点的状态信息, 共计 $a^2 + a$ 个信息. 设网络节点的度平均为 $a = 2$, 伪二跳算法比二跳算法通信量减少了33%; 当 $a = 5$, 则伪二跳算法比二跳算法通信量减少了67%; 当 $a = 10$, 则伪二跳算法比二跳算法通信量减少了超过80%. 同时, 伪二跳算法中每个节点需要多计算一个量即 y 值, 因此伪二跳算法在通信负担减少的同时, 计算量和存储量有所增加. 以任意连通拓扑图为例, 设每个节点的度平均为 a , 节点状态为 m 维向量, 根据式(3)–(5), 伪二跳算法共计 $a^2m^3 + am$ 次乘法, 二跳算法共计 a^2m^3 次乘法, 当 $a = 2$ 时, 如果 $m = 3$, 则伪二跳算法比二跳算法计算量增加了6%左右, 如果 $m = 5$, 则伪二跳算法比二跳算法计算量增加了2%; 当 $a = 5$, 如果 $m = 3$, 则伪二跳算法比二跳算法计算量增加了2%左右, 如果 $m = 5$, 则伪二跳算法比二跳算法计算量增加了不足1%. 可以看出, 伪二跳算法计算量和存储量增加不多. 多智能体基本上具有一定的计算能力和存储能力, 因此计算量和存储量一定程度的增加, 对多智能体系统的影响可以不考虑.

在上述基础上, 本文提出伪多跳算法:

$$x_i(k+1) = x_i(k) - \varepsilon \sum_{j \in N_i} w_{ij} \{ (x_i(k) - x_j(k)) + y_j(k) + \sum_{l \in N_j} w_{jl} \{ (x_i(k-1) - x_j(k-1)) + y_l(k-1) + \sum_{q \in N_l} w_{lq} \{ (x_i(k-2) - x_l(k-2)) + \dots + y_r(k-m+2) + \sum_{s \in N_r} w_{rs} (x_i(k-m+1) - x_r(k-m+1)) \} \dots \} \}, \quad (6)$$

$$y_i(k+1) = \sum_{j \in N_i} w_{ij} (x_i(k) - x_j(k)). \quad (7)$$

在式(6)–(7)的伪多跳算法中, 每个节点把前 m 时刻接收到的信息和自身信息发送给邻接节点. 根据式(6)–(7)与式(3), 采用上述方法进行同样的分析比较, 可以得出伪多跳算法的通信量比多跳算法大大减少. 同时, 伪多跳算法每个节点需要多计算一个量即 y 值, 因此, 伪多跳算法在通信负担减少的同时, 计算量和存储量有所增加. 但增加量非常小, 对整个多智能体系统影响不大, 可以不予考虑. 当网络存在通信延时的时候, 从式(3)可以看出, 多跳算法中的数据在多跳中继通信中, 延时会累积, 容易造成传输数据的丢失.

3 动态分析(Dynamic analysis)

设图 G 为无向拓扑图. 当图 G 连通, 邻接矩阵

A_1, A_2 为对称矩阵, L_1, L_2 为行和与列和都为0的半正定对称矩阵, 因此有 $0 = \lambda_1(L_1) < \lambda_2(L_1) \leq \dots \leq \lambda_n(L_1)$, $0 = \lambda_1(L_2) \leq \lambda_2(L_2) \leq \dots \leq \lambda_n(L_2)$, 其中 $\lambda_i(L_1), \lambda_i(L_2)$ 为对应矩阵的第 i 特征值. 通过下面定理来证明伪二跳算法的收敛性.

定理 1 当图 G 是无向连通图, 在初始条件 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(-1)$ 下, 如果满足采样间隔

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{1}{\lambda_n(L_2)}, \frac{2}{\lambda_n(L_1) - \lambda_2(L_2)}, \frac{3}{\lambda_n(L_1)} \right\},$$

则伪二跳算法下各节点状态收敛到初始状态的平均值.

证 当图 G 是无向连通图时, 根据式(4)–(5), 伪二跳算法能写成为

$$x_i(k+1) = x_i(k) - \varepsilon \sum_{j \in N_i} w_{ij} \{ (x_i(k) - x_j(k)) + \sum_{l \in N_j} w_{jl} (x_i(k-1) - x_l(k-1)) \}, \quad (8)$$

写成向量形式:

$$\mathbf{x}(k+1) = (I_n - \varepsilon L_1) \mathbf{x}(k) - \varepsilon L_2 \mathbf{x}(k-1), \quad (9)$$

其中 I_n 为 $n \times n$ 单位矩阵, 式子(9)可以写成:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n - \varepsilon L_1 & -\varepsilon L_2 \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}(k-1) \end{bmatrix}.$$

令

$$H = \begin{bmatrix} I_n - \varepsilon L_1 & -\varepsilon L_2 \\ I_n & 0 \end{bmatrix},$$

设 λ 是 H 的特征值, 即满足行列式 $\det(H - \lambda I_{2n}) = 0$. 根据文献[24],

$$\begin{aligned} \det(H - \lambda I_{2n}) &= \det \left(\begin{bmatrix} I_n - \varepsilon L_1 - \lambda I_n & -\varepsilon L_2 \\ I_n & -\lambda I_n \end{bmatrix} \right) = \\ &= \det(\lambda^2 I_n - \lambda(I_n - \varepsilon L_1) + \varepsilon L_2). \end{aligned}$$

由于 L_1, L_2 是实对称矩阵, 因此存在正交矩阵 P (即满足 $P^{-1} = P^T$), 使得 $P^{-1}L_1P = \Lambda_1$, Λ_1 为 L_1 的特征值所构成的某一对角矩阵. 根据相似矩阵的行列式相等, 上式可以写成以下形式:

$$\begin{aligned} \det(\lambda^2 I_n - \lambda(I_n - \varepsilon L_1) + \varepsilon L_2) &= \\ \det(P^{-1}(\lambda^2 I_n - \lambda(I_n - \varepsilon L_1) + \varepsilon L_2)P) &= \\ \det(\lambda^2 P^{-1}I_nP - \lambda(P^{-1}I_nP - \varepsilon P^{-1}L_1P) + \varepsilon P^{-1}L_2P) &= \\ \det(\lambda^2 I_n - \lambda(I_n - \varepsilon \Lambda_1) + \varepsilon P^{-1}L_2P). \end{aligned}$$

由于 $P^{-1}L_2P$ 也是实对称矩阵, 且是 L_2 的相似矩阵, 因此必定存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}P^{-1}L_2PQ = \Lambda_2$, Λ_2 为 L_2 的特征值所构成的某个对角矩阵. 根据

相似矩阵的行列式相等, 上式等于

$$\begin{aligned} & \det(Q^{-1}(\lambda^2 I_n - \lambda(I_n - \varepsilon A_1) + \varepsilon P^{-1} L_2 P)Q) = \\ & \det(\lambda^2 I_n - \lambda(I_n - \varepsilon A_1) + \varepsilon A_2) = \\ & \prod_{i=1}^n (\lambda^2 - \lambda(1 - \varepsilon \lambda_i(L_1)) + \varepsilon \mu_i), \end{aligned}$$

其中 $\mu_1 \cdots \mu_n$ 是 $\lambda_1(L_2) \cdots \lambda_n(L_2)$ 的某一个排列. 从而可以得到 H 的特征值:

$$\begin{cases} \lambda_{2i-1}(H) = \frac{1}{2} [+ \sqrt{((1 - \varepsilon \lambda_i(L_1))^2 - 4\varepsilon \mu_i)} + \\ \quad (1 - \varepsilon \lambda_i(L_1))], i = 1, \dots, n, \\ \lambda_{2i}(H) = \frac{1}{2} [- \sqrt{((1 - \varepsilon \lambda_i(L_1))^2 - 4\varepsilon \mu_i)} + \\ \quad (1 - \varepsilon \lambda_i(L_1))]. \end{cases} \quad (10)$$

由于 L_1, L_2 为行和与列和都为0的对称矩阵, 根据矩阵 H , 可以得出 H 必定存在一个值为1的特征值, 对应一个左特征向量 \mathbf{w}_l 和右特征向量 \mathbf{w}_r , 满足 $H\mathbf{w}_r = \mathbf{w}_r$, 以及 $\mathbf{w}_l^T H = \mathbf{w}_l^T$, $\mathbf{w}_l^T \mathbf{w}_r = 1$. 而根据式(10), 如果 H 有值为1的特征值, 则对应 $\mu_i = -\lambda_i(L_1)$. 由于对于任意连通无向拓扑图 G , 总是有 $\lambda_i(L_1) \geq 0, \lambda_i(L_2) \geq 0$. 因此, 当且仅当 $\mu_1 = \lambda_1(L_2) = \lambda_1(L_1) = 0, \mu_i = -\lambda_i(L_1)$ 成立, 这时 H 有两个相应的特征值: $\lambda_1(H) = 1, \lambda_2(H) = 0$. 根据式(10), 当采样间隔满足:

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{1}{\lambda_n(L_2)}, \frac{2}{\lambda_n(L_1) - \lambda_2(L_2)}, \frac{3}{\lambda_n(L_1)} \right\},$$

则矩阵 H 的其他特征值满足 $|\lambda(H)| < 1$, 因此矩阵 H 存在唯一值为1的特征值. 令 U 为 H 对应的约旦矩阵, S 为对应特征向量矩阵, 即 $H = SUS^{-1}$, 则 $H^k = SU^k S^{-1}$, 所以 $\lim_{k \rightarrow \infty} H^k = \lim_{k \rightarrow \infty} S U^k U^{-1} = \mathbf{w}_r \mathbf{w}_l^T$, 令 $\mathbf{w}_l = (\mathbf{1}^T, \mathbf{0}^T)^T$, 其中向量 $\mathbf{1} = [1 \cdots 1]^T$, 与 $\mathbf{0} = [0 \cdots 0]^T$ 为 n 维列向量, 则 $\mathbf{w}_r = \frac{1}{n} (\mathbf{1}^T, \mathbf{1}^T)^T$. 根据

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} = \mathbf{w}_r \mathbf{w}_l^T \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}(-1) \end{bmatrix},$$

所以得出 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k+1) = \frac{1}{n} \mathbf{1} \sum_{i=1}^n x_i(0)$, 从而在伪二跳算法下, 各个节点状态最终收敛于初始状态的平均值. 证毕.

下面证明伪多跳算法的收敛性. 根据式(6)-(7), 伪 m 跳算法可以写成:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) = & x_i(k) - \varepsilon \sum_{j \in N_i} w_{ij} \{ (x_i(k) - x_j(k)) + \\ & \sum_{l \in N_j} w_{jl} \{ (x_i(k-1) - x_l(k-1)) + \cdots + \\ & \sum_{s \in N_r} w_{rs} \{ x_i(k-m+1) - x_s(k-m+1) \} \cdots \} \}, \end{aligned} \quad (11)$$

上式写成向量形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) = & (I_n - \varepsilon L_1) \mathbf{x}(k) - \varepsilon L_2 \mathbf{x}(k-1) - \\ & \cdots - \varepsilon L_m \mathbf{x}(k-m+1), \end{aligned} \quad (12)$$

推论 1 当图 G 是无向连通图, 在初始条件 $\mathbf{x}(0) = \cdots = \mathbf{x}(-m+1)$ 下, 满足矩阵 $H - J$ 的谱半径 $\rho(H - J) < 1$, 则伪 m 跳算法下各节点状态收敛到初始状态平均值.

$$\text{证 令 } H = \begin{bmatrix} I_n - \varepsilon L_1 & -\varepsilon L_2 & \cdots & -\varepsilon L_m \\ I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

则式(12)为 $X(k+1) = HX(k)$, 其中:

$$X(k+1) = [x(k+1) \cdots x(k-m+2)]^T.$$

令

$$J = \begin{bmatrix} K & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

其中 K 是元素全为1的 $n \times n$ 阶矩阵, J 与 H 是同阶方阵. 根据文献[22]可知, 除了矩阵 H 的1特征值由矩阵 $H - J$ 的零特征值代替外, 矩阵 H 和矩阵 $H - J$ 有相同的特征值, 因此当满足 $\rho(H - J) < 1$, 则对应矩阵 H 有一个特征值为1, 其余特征值 $|\lambda(H)| < 1$. 当图 G 是无向连通时, L_1, L_2 为行和与列和都为0的对称矩阵, 因此根据定理1的证明过程, 可以推出伪 m 跳算法下各节点状态收敛到初始状态平均值. 证毕.

定理 2 当图 G 是无向连通图, 在初始条件 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(-1)$ 下, 如果伪二跳算法收敛, 则伪二跳算法的收敛速度与二跳算法收敛速度相当.

证 根据定理1得知, 当图 G 是无向连通图, 在初始条件 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(-1)$ 下, 如果伪二跳算法收敛, 即 $\mathbf{x}(k+1)$ 收敛, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} (I_n - \varepsilon L_1 - \varepsilon L_2) \mathbf{x}(k)$, 从而 $\mathbf{x}(k+1)$ 的收敛速度由 $(I_n - \varepsilon L_1 - \varepsilon L_2)$ 的第二大特征值决定. 因此, 根据文献[20]可知, 上式收敛速度和二跳算法收敛速度一致. 且快于式(1)的收敛速度(即快于单跳分布式一致性算法收敛速度). 证毕.

推论 2 当图 G 是无向连通图, 在初始条件 $\mathbf{x}(0) = \cdots = \mathbf{x}(-m+1)$ 下, 满足矩阵 $H - J$ 的谱半径 $\rho(H - J) < 1$, 则伪 m 跳算法的收敛速度与 m 跳算法收敛速度相当.

证 根据推论1得知, 当图 G 是无向连通图, 在初始条件 $\mathbf{x}(0) = \cdots = \mathbf{x}(-m+1)$ 下, $\rho(H - J) < 1$ 时伪 m 跳算法收敛, 则有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} (I_n - \varepsilon L_1 - \varepsilon L_2 - \cdots - \varepsilon L_m) \mathbf{x}(k)$, 从而 $\mathbf{x}(k+1)$ 的收敛速度由 $(I_n - \varepsilon L_1 - \cdots - \varepsilon L_m)$ 的第二大特征值决定.

因此, 根据文献 [20] 可知, 上式收敛速度和 m 跳算法收敛速度一致. 且快于式 (1) 的收敛速度 (即快于单跳分布式一致性算法收敛速度). 证毕.

4 仿真分析 (Simulations and analyses)

为了验证伪多跳算法在无向通信拓扑中的一致性收敛以及收敛速度, 采用图 1 和图 2 的无向规则图和无向随机图进行仿真分析比较. 采样间隔 $\varepsilon = 0.02$ s, 每条边的权重值 $\{w_{ij} | (i, j) \in E\}$ 取值为 1, 各个节点初始状态分别取 $1, 2, \dots, 12$. 下面对伪二跳算法和伪多跳算法进行仿真.

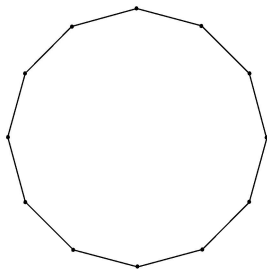


图 1 无向规则图

Fig. 1 Undirected regular graph

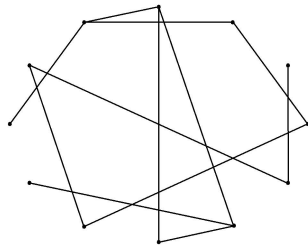


图 2 无向随机图

Fig. 2 Undirected random graph

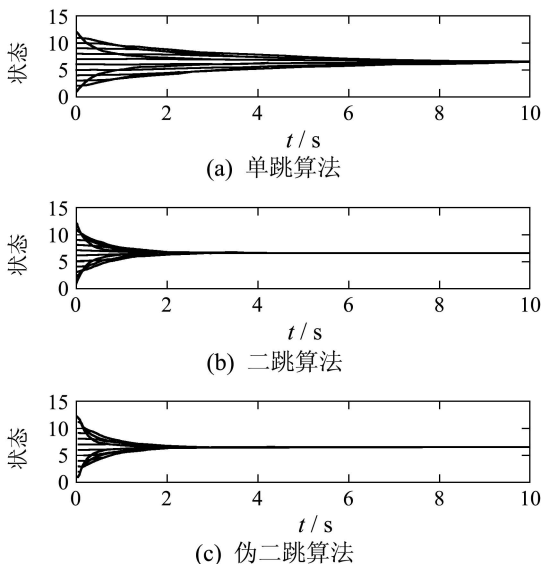


图 3 无向规则图下 3 种算法的收敛速度

Fig. 3 Convergence speed of three algorithms under undirected regular graph

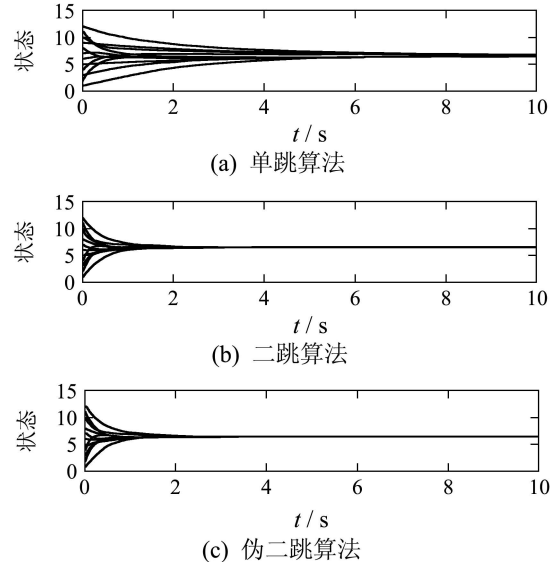


图 4 无向随机图下三种算法的收敛速度

Fig. 4 Convergence speed of three algorithms under undirected random graph

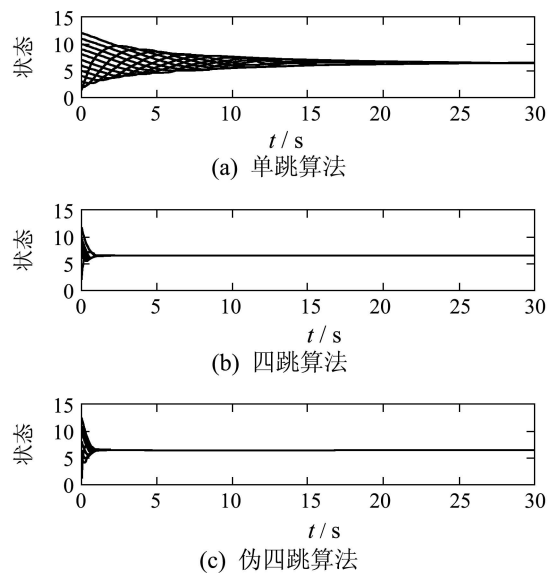


图 5 无向规则图下三种算法的收敛速度

Fig. 5 Convergence speed of three algorithms under undirected regular graph

通过对无向拓扑下的伪二跳 (伪多跳) 算法仿真, 根据图 3-5 的比较, 可以发现, 在满足收敛条件下, 伪二跳 (伪多跳) 算法的收敛速度比单跳分布式一致性收敛速度快, 与二跳 (多跳) 算法的收敛速度相当.

5 结束语 (Conclusions)

在大规模多智能体网络拓扑中, 分布式一致性算法既要求节点状态快速收敛, 同时又希望能有效减少节点间通信的复杂性以及通信负担和成本. 伪多跳算法能有效地利用非邻接节点的前状态信息, 从而大大提高收敛速度; 同时又不需要采用复杂的多跳中继通信方式来完成; 收敛条件没有特别苛求; 通

信负担也大大减少;在存在通信延时情况下,通信数据也不容易丢失.在使用伪多跳算法时,由于通信负担和存储量会随着利用非邻接节点的增加而增加,因此在考虑到收敛速度和通信负担等要求时,应权衡使用采用伪几跳算法为最佳.

参考文献(References):

- [1] SINHA A, KIRUBARAJAN T, BAR-SHALOM Y. Autonomous ground target tracking by multiple cooperative UAVs[C] // *Proceedings of the 2005 IEEE Aerospace Conference*. New York: IEEE, 2005: 1 – 9.
- [2] KOVACINA M A, PALMER D, YANG G, et al. Multi-agent control algorithms for chemical cloud detection and mapping using unmanned air vehicles[C] // *Proceedings of the 2002 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. New York: IEEE, 2002, 3: 2782 – 2788.
- [3] FAX J A, MURRAY R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1465 – 1476.
- [4] CARVALHO E, SILVA M P, CARDEIRA C. Decentralized formation control of autonomous mobile robots[C] // *The 35th Annual Conference of Industrial Electronics*. New York: IEEE, 2009: 1504 – 1509.
- [5] TANNER H G, JADBABAIE A, PAPPAS G J. Flocking in fixed and switching networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(5): 863 – 868.
- [6] OLFATI-SABER R. Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(3): 401 – 420.
- [7] MATHUR R, SHARMA M K, MISRA A, et al. Energy-efficient deployment of distributed mobile sensor networks using fuzzy logic systems[C] // *2009 International Conference on Advances in Computing, Control, and Telecommunication Technologies*. New York: IEEE, 2009: 121 – 125.
- [8] 王林, 彭辉, 朱华勇, 等. 复杂环境下多无人机协作式地面移动目标跟踪[J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(3): 300 – 308.
(WANG Lin, PENG Hui, ZHU Huayong, et al. Cooperative tracking of ground moving target using unmanned aerial vehicles in cluttered environment[J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(3): 300 – 308.)
- [9] 王遵彤, 孙栋, 乔非, 等. 基于多Agent系统的分散发电调度规划[J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(5): 602 – 608.
(WANG Zuntong, SUN Dong, QIAO Fei, et al. Multi-objective scheduling algorithm for distributed elevator group control system[J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(5): 602 – 608.)
- [10] FRANCESCHELLI M, GIUA A, SEATZU C. Distributed averaging in sensor networks based on broadcast gossip algorithms[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2011, 11(3): 808 – 817.
- [11] RAJAGOPAL R, WAINWRIGHT M J. Network-based consensus averaging with general noisy channels[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(1): 373 – 385.
- [12] XIAO L, BOYD S. Fast linear iterations for distributed averaging[C] // *The 42nd Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 2003: 65 – 78.
- [13] JIN Z P, MURRAY R M. Random consensus protocol in large-scale networks[C] // *The 46th Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 2007: 4227 – 4232.
- [14] LI T, FU M, XIE L, ZHANG J F. Distributed consensus with limited communication data rate[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(2): 279 – 292.
- [15] AYSAL T C, YILDIZ M E, SARWATE A D, et al. Broadcast gossip algorithms for consensus[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(7): 2748 – 2761.
- [16] ZHANG Y, TIAN Y P. Consensus of data-sampled multi-Agent systems with random communication delay and packet loss[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 939 – 943.
- [17] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [18] OLFATI-SABER R. Ultra-fast consensus in small-world networks[C] // *Proceedings of the American Control Conference*. New York: IEEE, 2005: 2371 – 2378.
- [19] KIM Y, MESBAHI M. On maximizing the second smallest eigenvalue of a state-dependent graph laplacian[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(1): 116 – 120.
- [20] JIN Z P, MURRAY R M. Multi-hop relay protocols for fast consensus seeking[C] // *The 45th Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 2006: 1001 – 1006.
- [21] AYSAL T C, ORESHKIN B N, COATES M J. Accelerated distributed average consensus via localized node state prediction[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(4): 1563 – 1576.
- [22] XIONG G, KISHORE S. Linear high-order distributed average consensus algorithm in wireless sensor networks[C] // *The 15th Workshop on Statistical Signal Processing*. Piscataway: IEEE, 2009: 529 – 532.
- [23] SEMSAR-KAZEROONI E, KHORASANI K. Optimal consensus seeking in a network of multiagent systems: an LMI approach[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2010, 40(2): 540 – 547.
- [24] REN W, ATKINS E M. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, 17(10): 1002 – 1033.

作者简介:

彭换新 (1973—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为非线性滤波、数据融合, E-mail: penghx@niit.edu.cn;

戚国庆 (1977—), 男, 副研究员, 目前研究方向为目标跟踪, E-mail: qiguogqing@mail.njust.edu.cn;

盛安冬 (1964—), 男, 博士生导师, 目前研究方向为非线性估计及其应用, E-mail: shengandong@mail.njust.edu.cn.