

# 不确定区域下基于自适应并行遗传的最优鲁棒控制器

胡小青, 胥布工

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

**摘要:** 目前使用遗传算法设计鲁棒控制器时, 都要人为地给定变量搜索空间. 当变量区域不确定时, 采用自适应并行遗传算法设计出最优鲁棒控制器, 该方法根据当前搜索到的各种群最优个体的分布情况, 运用概率统计理论求出变量区域的最小方差无偏估计, 不断缩小不确定的变量搜索区域, 从而逐步达到最优, 并且考虑了种群个体适应度对算法中交叉概率和变异概率的影响. 该方法能设计出简单正则、阶数低的最优鲁棒控制器, 而且仿真结果表明, 这些控制器有效地避免了局部最优, 提高了算法的寻优精度和收敛速度.

**关键词:** 不确定区域; 最优控制; 并行遗传; 鲁棒稳定; 概率统计

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Optimal robust controller based on adaptive parallel genetic algorithms in uncertain domain

HU Xiao-qing, XU Bu-gong

(College of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

**Abstract:** In most of the existing robust controller designs based on the genetic algorithm, the search domains of variable are factitiously assigned. For undefined search domains, we propose a novel method for designing the optimal robust controller based on the adaptive parallel genetic algorithm. According to the distribution of the best individuals of each population in the current search, the algorithm narrows the uncertain search domain of variables by using the probability and statistics theory, so as to gradually achieve the optimum. Moreover, the impact of the individual fitness on the crossover probability and mutation probability is also investigated. By using this method, we design a simple, proper and low-order optimal robust controller, which effectively avoids the local optimum and improves the convergence and accuracy in simulation experiments.

**Key words:** uncertain domain; optimal control; parallel genetic algorithm; robust stability; probability and statistics

### 1 引言(Introduction)

近20多年来鲁棒控制研究的最新成果, 特别是在鲁棒稳定性理论与线性系统的控制等方面的论述具有重要意义, 其常用的分析和设计方法主要有: 插值法<sup>[1]</sup>、代数Riccati方法<sup>[2]</sup>、极大值原理方法<sup>[3]</sup>及线性矩阵不等式方法<sup>[4]</sup>等. 但在现有这些处理方法中, 一方面由于条件的放缩和人为给定待参数, 给鲁棒控制的设计结果带来了很大的保守性; 另一方面由于这些方法多采用迭代法、爬山法, 容易陷入局部极值并且收敛性并不能得到保证.

遗传算法是一种模拟生物进化过程的搜索算法, 其固有的隐含并行性使它能够以较高概率收敛于非凸问题的全局最优解, 特别适于处理传统寻优方法难以解决的复杂非线性寻优问题<sup>[5]</sup>. 迄今已有大量研究工作<sup>[6-8]</sup>将遗传算法引入到鲁棒控制问题中, 如解决优化控制参数、权函数的选取以及多目标优化等问题. 但目前这些文献的鲁棒控制器设计步骤复

杂, 另外涉及的变量搜索区域都是人为确定的, 然而实际控制系统中未知参数的定义域是不确定的, 而且遗传算法对初始搜索区域选取比较敏感<sup>[9]</sup>, 会影响算法的收敛速度和寻优精度. 本文将最优鲁棒稳定性控制问题直接转化为不确定区域内带约束条件的最优化问题, 但采用传统的遗传算法处理该类问题时, 将容易陷入局部最优, 并很难满足系统的最优鲁棒稳定性. 笔者提出一种不确定区域下自适应的并行遗传算法(uncertain domain adaptive parallel genetic algorithm, UDAPGA), 根据当前搜索到的各种群最优个体的分布情况, 运用最小方差无偏估计, 不断地缩小不确定的搜索区域, 从而逐步达到最优, 另外也考虑了种群个体适应度对算法中交叉概率和变异概率的影响, 该方法能够有效地避免了局部最优, 提高算法的寻优精度和收敛速度.

### 2 问题的提出(Problem formulation)

许多实际的控制系统都存在着不确定性<sup>[10]</sup>, 且

要求系统的状态满足一定的约束条件<sup>[11-12]</sup>. 这些不确定性包括各种非随机的偶然性、各种干扰和扰动、以及对系统的综合描述中出现的模型偏差, 它们都影响反馈达到的预期的效果. 假设一个单位反馈的标称对象传递函数为 $P$ , 其乘积扰动集合为 $\psi_\xi = (1 + \Delta W_2)P$  (其中:  $W_2$ 为稳定的权函数,  $\Delta$ 为摄动因子 $\|\Delta\| \leq \xi, \xi > 0$ ). 令 $\xi_{\text{sup}}$ 表示某一控制器 $C$ 能够稳定 $\psi_\xi$ 中每一个对象的 $\xi$ 上确界,  $T$ 为系统的标准补敏感函数,

$$T = \frac{PC}{1 + PC}. \quad (1)$$

**定义 1** 定义

$$\gamma_{\text{inf}} := \inf_C \|W_2 T\|_\infty \quad (2)$$

为所有可使系统内稳定的控制器的下确界. 那么有 $\gamma_{\text{inf}} = 1/\xi_{\text{sup}}$ . 对 $P$ 在 $\mathbb{RH}_\infty$ 内(稳定的、正则的、实有理的函数空间)作互质分解:

$$P = \frac{N}{M}, \quad NX + MY = 1, \quad X, Y \in \mathbb{RH}_\infty. \quad (3)$$

由Youla参数化定理, 可得使标称对象 $P$ 所有稳定的控制器 $C$ 为

$$C = \frac{X + MQ}{Y - NQ}. \quad (4)$$

将式(1)(3)-(4)代入式(2)得

$$\gamma_{\text{inf}} := \inf_{Q \in \mathbb{RH}_\infty} \|W_2 N(X + MQ)\|_\infty, \quad (5)$$

可见, 该问题就是寻找一个 $\mathbb{RH}_\infty$ 函数 $Q(s)$ , 使得式(5)的 $\infty$ 范数最小. 即

$$\begin{cases} \min \gamma, \\ \gamma = \|W_2 N(X + MQ)\|_\infty > 0, \\ Q(s) \in \mathbb{RH}_\infty. \end{cases} \quad (6)$$

如果采用模型匹配, 设计控制器保守性比较强; 并由于其只考虑了零点与极点信息, 忽略高频动态特性, 设计的控制器抗干扰性弱, 甚至不能保证设计的控制器正则; 另外当 $P, W_2$ 在虚轴上有零点存在, 此时称上述鲁棒控制问题为非标准鲁棒控制问题, 该方法就不适用了. 为此笔者希望能直接在 $\mathbb{RH}_\infty$ 内搜寻 $Q(s)$ 函数, 避免各种约束条件的限制带来的复杂计算问题, 使其简单易行, 并且也可适用于非标准鲁棒控制情况, 由于 $Q(s)$ 函数定义域不确定, 式(6)就转化为不确定区域下的带约束条件的优化问题.

### 3 不确定区域下最优鲁棒控制器设计 (Optimal robust controller design under uncertain domain)

上述不确定区域下优化问题可利用一种新的改进并行遗传算法来解决, 其主要思想是: 在相同搜索

空间上以一定方式并行地生成多个进化种群, 随着种群进化过程中最优个体的分布情况, 采用概率统计方法不断缩小不确定的搜索区域; 并每隔一定的进化代数, 依一定策略交换各种种群的最优个体, 从而生成新的种群; 在此基础上进行下一代种群的进化, 依此类推直到满足算法终止条件为止, 从而获得优化的控制参数. 另外为了更加有效地避免早熟, 在遗传算子中附加了自适应算法, 具体的处理过程如下.

#### 3.1 编码和解码(Encoding and decoding)

文献[13]已经证明在处理高维连续搜索空间问题和对问题的解要求较大数值精度时, 实数编码比二进制编码和格雷编码更为有效, 其可以消除二进制编码存在的“海明悬崖”问题, 并且使用实数作为编码, 变量可以取大定义域甚至是未知定义域. 本文致力于解决不确定搜索区域下约束优化问题, 因而采用实数编码.

设 $Q(s)$ 函数为

$$Q(s) = x_0 \frac{(s + x_1)(s + x_2) \cdots (s + x_m)}{(s + x_{m+1})(s + x_{m+2}) \cdots (s + x_{m+n})}, \quad (7)$$

$Q(s)$ 为 $n$ 阶系统, 并且 $n \geq m, x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{m+n} \in \mathbb{R}$ . 上述优化问题具体为在 $\mathbb{R}^{m+n+1}$ 空间寻优一组变量(个体) $x = (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{m+n})$ , 使得系统获得最优鲁棒稳定性能, 即以 $\min \gamma$ 作为目标函数(其倒数为遗传算法中个体的适应值). 解码与编码互为逆过程.

#### 3.2 遗传操作(Genetic operations)

1) 选择算子.

为了确保子种群个体的适应度不直接影响后代的选择, 本文选用了排序选择算子, 其保持了一定的选择压力, 在一定程度上抑制了遗传算法基于适应度比例的选择算子所带来的早熟和局部收敛问题. 另外为了保证迄今为止所得到的最好个体不会被交叉、变异等遗传算子所破坏, 配合了最佳个体保存法, 它是遗传算法收敛性的一个重要保证, 能保证收敛到全局最优解.

2) 交叉与变异算子.

本文交叉算子采用中间重组方式: 假设第 $t$ 代两个个体的第 $k$ 个分量为 $x_{ik}^t, x_{jk}^t$ , 则交叉运算后第 $t + 1$ 代产生的两个新个体的分量为

$$\begin{cases} x_{ik}^{t+1} = x_{jk}^t + \alpha(x_{ik}^t - x_{jk}^t), \\ x_{jk}^{t+1} = x_{ik}^t + \alpha(x_{jk}^t - x_{ik}^t), \end{cases} \quad i, j \in (1, \cdots, P_{\text{size}}), \quad (8)$$

其中:  $\alpha \in [0, 1]$ 之间的随机值,  $P_{\text{size}}$ 为种群规模. 变异算子采用非均匀的变异: 如果 $t$ 代第 $i$ 个个体的第 $k$ 个分量 $x_{ik}^t$ 发生变异后, 则 $t + 1$ 代新的 $x_{ik}^{t+1}$ 为

$$x_{ik}^{t+1} = x_{ik}^t + \text{sgn}(x_{ik}^t - \theta_{1k}^t)(\beta(1 - \frac{t}{T}))^b, \quad (9)$$

其中:  $\text{sgn}$ 是值域为 $\{-1, 1\}$ 的随机符号函数,  $\beta$ 为 $[0, 1]$ 之间的随机数,  $b$ 为形状参数(一般取为3),  $T$ 为算法的终止代数. 该变异算子具有较高的精度而且具有微调能力, 在早期均匀地搜索解空间, 在晚期则在很小的区域内搜索.

文献[14]指出交叉与变异算子是影响遗传算法行为与性能的关键, 直接影响到算法的收敛性, 并且当问题规模较大或搜索空间非常大, 遗传算法的收敛速度会很慢或容易“早熟”, 而采用自适应的交叉与变异算子<sup>[15]</sup>则能有效地克服这一缺点. 另外进化过程中, 同一代适应度高的个体代表着种群优化的方向, 它的变异概率应该小一些, 这样可以提高算法的收敛速度; 而适应度低的个体的变异概率应该大些, 以便增加种群的多样性. 为此, 在算法中设计了与个体适应度相关的自适应交叉概率 $p_c$ 及变异概率 $p_m$ 分别为

$$p_c = \begin{cases} \frac{p_{c \max} - p_{c \min}}{1 + e^{\alpha(f - \bar{f})/(f_{\max} - \bar{f})}} + p_{c \min}, & f > \bar{f}, \\ p_{c \max}, & \text{其他}, \end{cases} \quad (10)$$

$$p_m = \begin{cases} \frac{p_{m \max} - p_{m \min}}{1 + e^{\alpha(f - \bar{f})/(f_{\max} - \bar{f})}} + p_{m \min}, & f > \bar{f}, \\ p_{m \max}, & \text{其他}, \end{cases} \quad (11)$$

其中:  $p_{c \max}$ ,  $p_{c \min}$ 分别为最大与最小的交叉概率,  $p_{m \max}$ ,  $p_{m \min}$ 分别为最大与最小的变异概率,  $\alpha$ 为常数代表变化速度,  $f$ 为当前个体适应度值,  $f_{\max}$ 为当前种群中最大个体适应度值,  $\bar{f}$ 为当前种群平均适应度值.

3) 迁移算子.

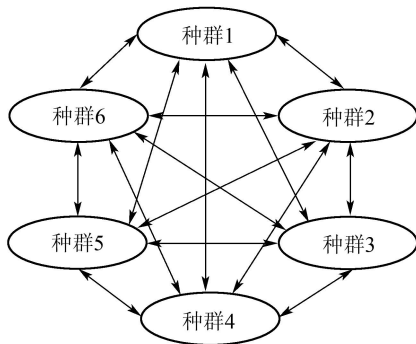


图 1 自由迁移拓扑示意图

Fig. 1 The sketch map of free migration topology

通过传统遗传操作后, 每个种群经过迁移算子从其他种群中选择最优个体进行替换. 其按照种群中的个体的适应度水平, 选择最适应个体, 以一定迁移拓扑结构迁移到其他种群, 种群中被代替的个体是均匀随机选择的, 这样可以较快地使最好的个体在群体中传播, 提高收敛速度和解的精度<sup>[16]</sup>. 选用

一种最通常的迁移拓扑结构, 自由迁移拓扑结构(见图1), 其迁移过程对所有种群重复, 迁移个体可以从任意的一个种群迁移到另一个种群. 例如图1中, 种群1可以接受到其他种群2~6迁移过来的最优个体.

3.3 不确定搜索区域的估计(Estimation of uncertain domain)

遗传算法虽然是基于概率遗传操作的优化算法, 但其搜索并不是完全随机的, 而是具有方向性的, 并且遗传算法对搜索区域选取比较敏感, 不确定或者较大搜索区域会影响算法的收敛速度和寻优精度. 但一般而言, 随着种群的不断进化, 种群朝着优化解所在的区域移动. 因此, 随着种群的进化, 如果搜索区域能不断减小, 将会加快寻优速度和提高寻优精度, 从而提高算法的性能.

对于不确定性区域可以预设一个非常大初始搜索区域, 即预设优化变量组:

$$\begin{cases} x = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m+n}) \in S \subset \mathbb{R}^{m+n+1}, \\ S = [\theta_{10}^0, \theta_{20}^0] \times [\theta_{11}^0, \theta_{21}^0] \times \dots \times [\theta_{1(n+m)}^0, \theta_{2(n+m)}^0], \end{cases} \quad (12)$$

式中:  $\theta_{i0}^0 (i = 0, 1, \dots, n+m)$ 表示第0次搜索区域缩小时(初始时)变量分量 $x_i$ 的下界,  $\theta_{2i}^0$ 表示第0次搜索区域缩小时变量分量 $x_i$ 的上界, 有 $x_i \in [\theta_{1i}^0, \theta_{2i}^0]$ , 若记 $\theta_1^0 = (\theta_{10}^0, \theta_{11}^0, \dots, \theta_{1(n+m)}^0)$ ,  $\theta_2^0 = (\theta_{20}^0, \theta_{21}^0, \dots, \theta_{2(n+m)}^0)$ , 则 $x \in [\theta_1^0, \theta_2^0]$ . 下面介绍一种运用概率统计理论估计搜索区域的方法.

遗传算法中, 随机参数变量选取的点集是均匀分布的概率模型, 设 $X$ 在区间 $[\theta_1, \theta_2]$ 上服从均匀分布, 记为 $X \sim U(\theta_1, \theta_2)$  ( $\theta_1 < \theta_2$ ),  $\theta_1, \theta_2$ 为待估参数,  $X$ 的概率密度函数为 $f(x; \theta_1, \theta_2)$ , 分布函数为 $F(x; \theta_1, \theta_2)$ , 即

$$\begin{aligned} f(x; \theta_1, \theta_2) &= \begin{cases} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}, & \theta_1 \leq x \leq \theta_2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \\ F(x; \theta_1, \theta_2) &= \begin{cases} 0, & x < \theta_1, \\ \frac{x - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1}, & \theta_1 \leq x < \theta_2, \\ 1, & x \geq \theta_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是来自总体的一组样本, 它们相互独立, 且与总体具有相同分布. 记 $X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ 为最小次序统计量,  $X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ 称为最大统计量.

引理 1  $X_{(1)}$ 和 $X_{(n)}$ 的概率密度函数分别为<sup>[17]</sup>

$$\begin{aligned} f_{(1)}(x; n, \theta_1, \theta_2) &= \\ \begin{cases} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} (1 - \frac{x - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1})^{n-1}, & \theta_1 \leq x \leq \theta_2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

$$f_{(n)}(x; n, \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \left(\frac{x - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1}\right)^{n-1}, & \theta_1 \leq x \leq \theta_2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (15)$$

引理2  $(X_{(1)}, X_{(n)})$ 的联合概率密度函数为<sup>[17]</sup>

$$f_{co}(x, y; n, \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \frac{n(n-1)}{(\theta_2 - \theta_1)^n} (y-x)^{n-2}, & \theta_1 \leq x \leq y \leq \theta_2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (16)$$

定理1  $\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n-1}(nX_{(1)} - X_{(n)})$ ,  $\hat{\theta}_2 = \frac{1}{n-1}(nX_{(n)} - X_{(1)})$ 分别为参数 $\theta_1, \theta_2$ 的无偏估计, 并且是最小方差无偏估计.

证 由引理1得

$$E(X_{(1)}) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} x f_{(1)}(x) dx = \frac{n\theta_1}{n+1} + \frac{\theta_2}{n+1}, \quad (17)$$

$$E(X_{(n)}) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} x f_{(n)}(x) dx = \frac{n\theta_2}{n+1} + \frac{\theta_1}{n+1}, \quad (18)$$

$$E(X_{(1)}^2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} x^2 f_{(1)}(x) dx = \theta_1^2 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{n+1} 2\theta_1 + \frac{2(\theta_2 - \theta_1)^2}{(n+1)(n+2)}, \quad (19)$$

$$E(X_{(n)}^2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} x^2 f_{(n)}(x) dx = \theta_2^2 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{n+1} 2\theta_2 + \frac{2(\theta_2 - \theta_1)^2}{(n+1)(n+2)}. \quad (20)$$

由式(17)–(18)可得

$$\begin{cases} E(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{n-1}(nE(X_{(1)}) - E(X_{(n)})) = \theta_1, \\ E(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{n-1}(nE(X_{(n)}) - E(X_{(1)})) = \theta_2. \end{cases} \quad (21)$$

可见 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是 $\theta_1, \theta_2$ 的无偏估计. 另外由引理2可得

$$E(X_{(1)}X_{(n)}) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} xy f_{co}(x, y) dx dy = \theta_1\theta_2 + \frac{1}{n+2}(\theta_2 - \theta_1)^2. \quad (22)$$

由式(19)–(20)(22)可得

$$D(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_1^2) - (E(\hat{\theta}_1))^2 = \frac{1}{(n-1)^2} E[n^2 X_{(1)}^2 - 2nX_{(1)}X_{(n)} + X_{(n)}^2] - \theta_1^2 = \frac{n}{(n^2-1)(n+2)}(\theta_2 - \theta_1)^2, \quad (23)$$

$$D(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{(n-1)^2} E[n^2 X_{(n)}^2 - 2nX_{(1)}X_{(n)} + X_{(1)}^2] - \theta_2^2 =$$

$$\frac{n}{(n^2-1)(n+2)}(\theta_2 - \theta_1)^2, \quad (24)$$

而 $\theta_1, \theta_2$ 的Fisher信息量<sup>[18]</sup> $I(\theta_1), I(\theta_2)$ 分别为

$$I(\theta_1) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \ln f_{co}(x, y; \theta_1, \theta_2)\right) = \frac{(n^2-1)(n+2)}{n^2(\theta_2 - \theta_1)^2}, \quad (25)$$

$$I(\theta_2) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} \ln f_{co}(x, y; \theta_1, \theta_2)\right) = \frac{(n^2-1)(n+2)}{n^2(\theta_2 - \theta_1)^2}. \quad (26)$$

从式(23)–(26)可得

$$D(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{nI(\theta_1)}, \quad D(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{nI(\theta_2)}.$$

根据Rao-Cramer定理<sup>[18]</sup>可得,  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 为 $\theta_1, \theta_2$ 最小方差无偏估计. 证毕.

现考虑 $M_p$ 个协同进化种群, 记在种群进化过程中第 $l$ 次搜索区域缩小时各种群最优个体集合为

$$x_b^l = \{x_b^{l,1}, x_b^{l,2}, \dots, x_b^{l,M_p}\}, \quad (27)$$

式中:  $x_b^{l,j} = (x_{b0}^{l,j}, x_{b1}^{l,j}, \dots, x_{b(n+m)}^{l,j})$  ( $j = 1, 2, \dots, M_p$ )为第 $j$ 个进化种群所搜索到的最优个体, 则各种群最优个体的变量分量集合 $x_{bi}^l = \{x_{bi}^{l,1}, x_{bi}^{l,2}, \dots, x_{bi}^{l,M_p}\}$ , 其最小次序统计量与最大次序统计量可由式(28)–(29)确定:

$$x_{bi}^{l(1)} = \min_{1 \leq j \leq M_p} x_{bi}^{l,j}, \quad (28)$$

$$x_{bi}^{l(M_p)} = \max_{1 \leq j \leq M_p} x_{bi}^{l,j}. \quad (29)$$

根据定理1, 第 $l+1$ 次搜索区域缩小后的上下界的最小方差无偏估计分别为

$$\begin{cases} \theta_{1i}^{l+1} = \frac{1}{M_p-1}(M_p x_{bi}^{l(1)} - x_{bi}^{l(M_p)}), \\ \theta_{2i}^{l+1} = \frac{1}{M_p-1}(M_p x_{bi}^{l(M_p)} - x_{bi}^{l(1)}). \end{cases} \quad (30)$$

考虑到种群最优个体全处于局部极值附近区域的可能性, 而造成搜索区域缩小后偏离最优值所处区域, 影响寻优精度. 为此附加一个避免因子 $\Delta_i^{l+1}$ , 根据当前搜索到的所有种群中最大目标值与最优目标的相对差异度, 来设计 $\Delta_i^{l+1}$ 为

$$\Delta_i^{l+1} = \left(1 - \frac{\gamma^*}{\gamma_{\max}^l}\right)(\theta_{2i}^l - \theta_{1i}^l), \quad (31)$$

其中:  $\gamma^*$ 为最优目标值,  $\gamma_{\max}^l$ 为当前搜索到的最大目标值. 则修正后的第 $l+1$ 次搜索区域缩小后的上下界为

$$\begin{cases} \theta_{1i}^{l+1} = \frac{1}{M_p-1}(M_p x_{bi}^{l(1)} - x_{bi}^{l(M_p)}) - \Delta_i^{l+1}, \\ \theta_{2i}^{l+1} = \frac{1}{M_p-1}(M_p x_{bi}^{l(M_p)} - x_{bi}^{l(1)}) + \Delta_i^{l+1}. \end{cases} \quad (32)$$

文献[19]给出了搜索区域动态变化的条件:

$$D^l < \lambda \|\theta_2^l - \theta_1^l\|_2, \quad (33)$$

式中:  $D^l = \max_{1 \leq i, j \leq M_p} \|x_b^{l,i} - x_b^{l,j}\|_2$ ;  $\lambda$  是随种群进化过程而自适应改变的因子, 取  $\lambda = e^{-t/40}$ , 若当式(33)满足, 则算法按照式(32)缩小搜索区域.

### 3.4 新种群的生成(Generation of new populations)

如果变量的搜索区域的未发生变化时, 则继续保持着迁移后的所生成的新种群. 一旦变量的搜索区域  $[\theta_1^l, \theta_2^l]$  缩小后, 需要重新生成新种群, 首先新种群保存在新的搜索区域  $[\theta_1^{l+1}, \theta_2^{l+1}]$  内已存在的个体, 以充分利用该区域内优秀个体的信息; 然后在该新搜索区域内随机生成新种群剩余的个体, 以使各种群规模(种群中个体数  $P_{size}$ )保持一致.

按照上述算法的设计步骤, 重新循环直到满足终止条件, 最后寻优到一组最优鲁棒控制器参数  $x^*$ .

## 4 仿真实验(Simulation)

考虑如下被控对象:

$$P(s) = \frac{s - 1}{(s + 1)(s - 0.5)}.$$

有一个不稳定的极点 ( $s = 0.5$ ) 和零点 ( $z = 1$ ), 假定不确定权是一已知的高通函数  $W_2(s) = \frac{s + 0.1}{s + 1}$  [20].

由式(3)–(5)可得

$$\gamma = \|W_2 N(X + MQ)\|_\infty = \left\| \frac{-4.5(s + 0.1)}{(s + 1)^2} - \frac{(s + 0.1)(s - 0.5)}{(s + 1)^3} Q(s) \right\|_\infty.$$

为了保证了控制器  $C$  正则,  $Q(s)$  的阶数应为 2, 令

$Q(s) = \frac{x_0(s + x_1)(s + x_2)}{(s + x_3)(s + x_4)}$ , 其  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$  的定义域不确定, 可预设一个非常大的定义域 (在控制对象  $P$  的零极点基础上放大 1000 倍)  $x_i \in [-500, 500]$ ,  $i = 0, \dots, 4$ . 根据最大模定理 [20], 可简单计算出  $\min \gamma = \gamma^* = 1.2$ , 以  $\min \gamma$  为目标函数, 以  $T = 100$  代作为终止条件. 分别采取传统遗传算法 (simple genetic algorithm, SGA), 自适应遗传算法 (adaptive simple genetic algorithm, ASGA), 粗粒度型自适应并行遗传算法 (adaptive parallel genetic algorithm, APGA) 和本文提出的方法 UDAPGA 进行比较实验, 对  $x$  寻优以获得最优鲁棒稳定性控制器, 各算法中种群采用比例选择、中间重组和非均匀变异算子及最优个体保存法, 自适应算法中交叉概率  $p_c$  和变异概率  $p_m$  采用本文设计的自适应概率. 各算法所需的参数如表 1; 实验结果如表 2 所示, 其中最小目标值  $\gamma^*$  为算法终止时所有种群中最小的目标值, 及对应的最优解  $x^*$ , 寻优代数 of 算法达到最优解时所处代数; 各算法最佳个体适应值随代次的变化曲线如图 2 所示, 其中多种群算法是选取了第 1 个种群的最佳个体适应值.

从表 2、图 2 可知, SGA 算法与 ASGA 相比, SGA 算法极容易陷入局部极值, 而 ASGA 采用自适应算法可以有效地避免局部极值, 但由于参数变量搜索区域过大, 算法的收敛速度会比较慢, 寻优精度也比较差; 与 ASGA 算法相比, APGA 算法通过并行种群之间的信息交互, 收敛速度与寻优精度有所改善; 而 UDAPGA 算法在很短的进化代数后 (35 代) 就能收敛, 其最优目标值 (1.2003) 与理论上的最优目标值 (1.2) 十分吻合, 可见收敛速度与寻优精度得到了很大的提高, 验证了该新算法的有效性与准确性.

表 1 算法所需参数

Table 1 Parameters' values in algorithms

算法	$p_c$		$p_m$		$M_p$	$P_{size}$	$T$	$a$
	$p_c \min$	$p_c \max$	$p_m \min$	$p_m \max$				
SGA	0.8	—	0.1	—	1	100	100	20
ASGA	0.1	0.8	0.01	0.4	1	100	100	20
APGA	0.1	0.8	0.01	0.4	20	100	100	20
UNAPGA	0.1	0.8	0.01	0.4	20	100	100	20

表 2 算法实验结果数据

Table 2 Simulation results of algorithms

性能算法	最小目标值 $\gamma^*$	最优解 $x^*$	寻优代数
SGA	36.63	(-113.4, -5.3, 33.7, -1.4, -126.5)	70
ASGA	1.5765	(-0.025, -170.8, 48.9, -0.21, -86.8)	100
APGA	1.5152	(-1.24, -9.37, 22.84, -0.193, -109.8)	100
UNAPGA	1.2003	(-126.6, -1.01, 1.3, -0.1, -108.4)	35

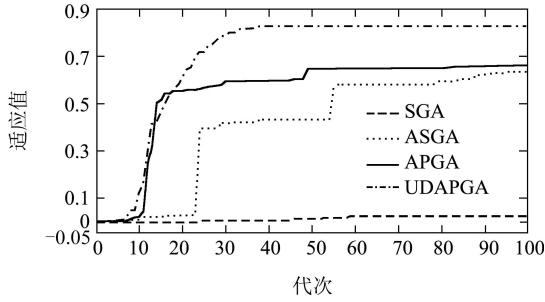


图2 适应值随代数变化曲线图

Fig. 2 The curve of fitness changing with generation

图3描述了UDAPGA算法在进化过程中各变量搜索区域变化情况,其中空白处表示当前代搜索区域没有发生变化,与上一代相同.从图3中可以看出,随着种群进化,各变量的搜索区域将逐渐缩小,从而趋于最优解,验证了该算法合理性.

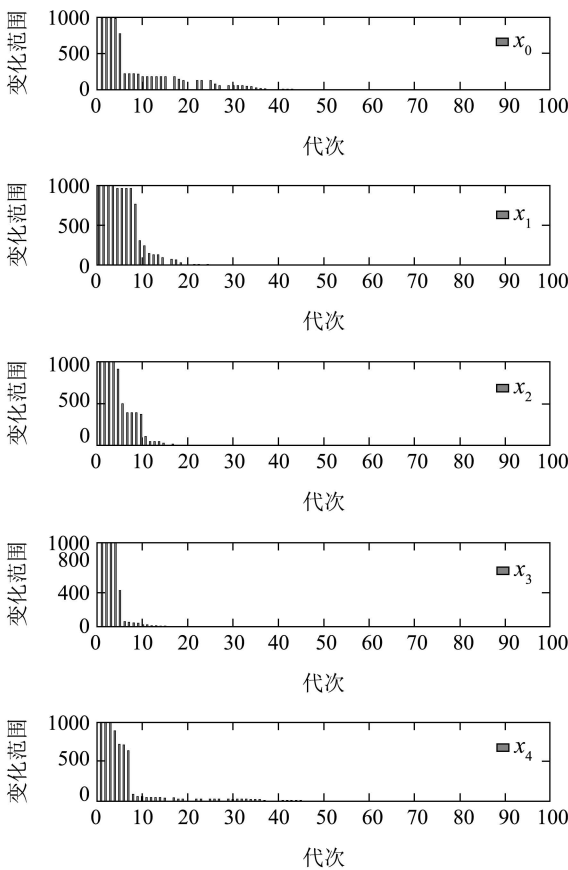


图3 变量搜索区域随代数变化直方图

Fig. 3 The histogram of range changing of parameters

从UDAPGA算法中获得最优解 $x^* = (-126.6, -1.01, 1.3, -0.1, -108.4)$ .根据式(4)其对应的最优鲁棒控制器为

$$C^*(s) = \frac{-131.1(s+1)}{(s+240.1)}$$

它所设计的控制器是稳定的,且阶数比较低(为1阶).由各算法所寻最优解 $x^*$ 对应的控制系统在

不同 $\|\Delta\|$ 值干扰下(这里取常数值,分别为0, 0.5, 0.7)的闭环阶跃响应曲线如图4所示.可见在 $\|\Delta\| = 0$ 时(即无干扰),各个算法设计的控制器系统是稳定的,都能跟踪阶跃信号,其中SGA算法设计的系统在跟踪过程中出现了振荡;在 $\|\Delta\| = 0.5$ 时,SGA算法所设计的控制系统已发散(控制系统已不稳定),ASGA,APGA设计的控制系统虽然早期出现了振荡,但仍然保持稳定,UDAPGA设计的系统则具有良好的稳定性;在 $\|\Delta\| = 0.7$ 时,SGA设计的系统也发散,ASGA,APGA设计的控制系统振荡加剧,并且ASGA振荡的次数多于APGA,而UDAPGA设计的控制系统能一直保持着良好的稳定性.可见UDAPGA算法所设计的控制器具有良好的鲁棒稳定性能,能够充分地抑制干扰,进一步验证了该算法优越性与有效性.

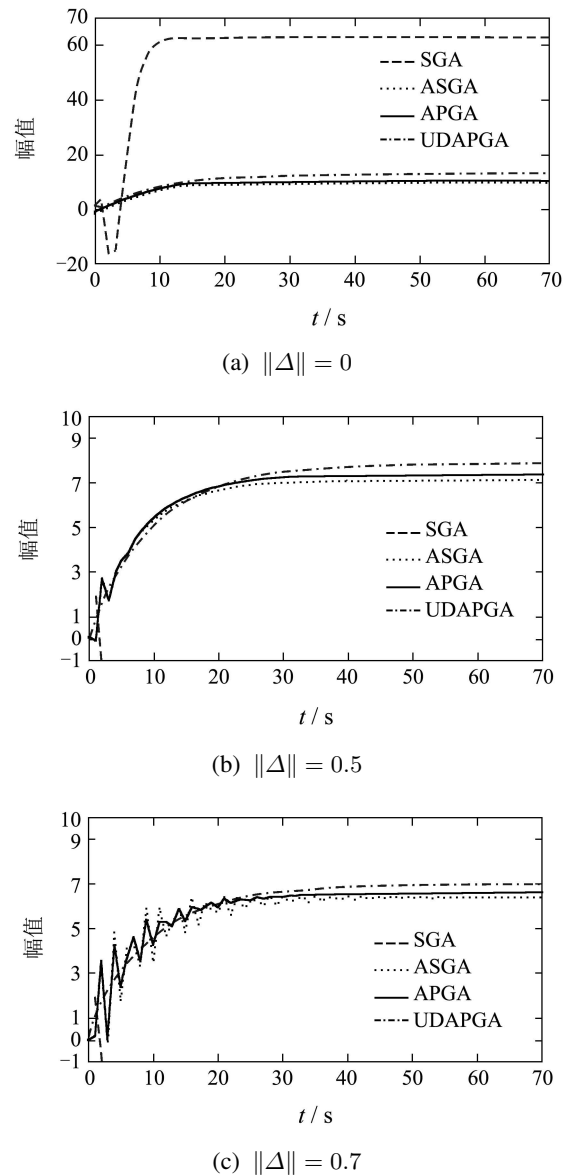


图4 不同 $\|\Delta\|$ 值下系统闭环阶跃响应曲线

Fig. 4 The step responses of system under different $\|\Delta\|$

## 5 结论(Conclusion)

对于不确定性系统最优鲁棒控制问题, 本文给出一种直接的设计方法, 避免了控制器设计保守性问题和约束条件所带来的复杂的计算问题, 该方法能够有效地避免局部最优, 具有很好的收敛性和准确性; 其次该方法作为一种改进的寻优算法, 对于不确定性区域或大区域最优值搜索问题, 提供了有力的数学工具; 最后UDAPGA算法本身是一种并行遗传算法, 可以通过网络的计算机资源实现不同的进化种群, 使算法的并行潜能得到充分的发挥。

## 参考文献(References):

- [1] RYOZO N. A robust solver using a continuation method for Nevanlinna-Pick interpolation with degree constraint[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(1): 113 – 117.
- [2] ELLOUMI H, BORDIER M, MAIZI N. Existence and boundedness of solutions of nonlinear non symmetric Riccati equations and their application in robust control[C] // *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans: IEEE Control System Society, 2007, 9: 2617 – 2621.
- [3] MICHAEL B, JESUS R G, LEONID F. Optimal and robust control for linear state-delay systems[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2007, 344(6): 830 – 845.
- [4] 沃松林, 史国栋, 邹云. 不确定广义大系统分散鲁棒 $H_\infty$ 保性能控制[J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(9): 1035 – 1040. (WO Songlin, SHI Guodong, ZOU Yun. Decentralized robust  $H_\infty$  and cost-guaranteed control for uncertain singular large-scale systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(9): 1035 – 1040.)
- [5] ZALZALA A M S, FLEMING P J. *Genetic Algorithms in Engineering Systems*[M]. London: The Institution of Electrical Engineers, 1997.
- [6] KAITWANIDVILAI S, OLRANTHICHACHAT P, NGAMROO I. Weight optimization and structure-specified robust h-infinity loop-shaping control of a pneumatic servo system using genetic algorithm[J]. *International Journal of Robotics & Automation*, 2010, 25(3): 229 – 239.
- [7] WU D X, WU J, CHEN S. Robust stabilization control for discrete-time networked control systems[J]. *International Journal of Control*, 2010, 83(9): 1885 – 1894.
- [8] HO W H, CHEN S H, LIU T K, et al. Design of robust-optimal output feedback controllers for linear uncertain systems using LMI-based approach and genetic algorithm[J]. *Information Science*, 2010, 180(23): 4529 – 4542.
- [9] WEISE T. *Global Optimization Algorithms—Theory and Application*[EB/OL], 2008. <http://www.it-weise.de/>.
- [10] YONG J. Feedback stabilization of nonlinear uncertain dynamic systems[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1988, 12(9): 153 – 165.
- [11] BARBU V. The  $H_\infty$ -problem with control constraints[J]. *SIAM Journal Control and Optimization*, 1994, 32(4): 952 – 964.
- [12] MADERNER N. Regulation of control systems under inequality constraints[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1992, 17(0): 591 – 599.
- [13] MICHALEWIZ Z. *Genetic Algorithm + Data = Evolution Programs*[M]. 3rd edition. New York: Springer Verlag, 1996.
- [14] 王小平, 曹立明. 遗传算法——理论、应用与软件实现[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2002. (WANG Xiaoqing, CAO Liming. *Genetic Algorithms—Theory, Application and Software*[M]. Xi'an: Xi'an JiaoTong University Press, 2002.)
- [15] SRINIVAS M, PATNAIK L M. Adaptive probabilities of crossover and mutation in genetic algorithms[J]. *IEEE Transactions on Power Systems, Man, and Cybernetics*, 1994, 24(4): 656 – 667.
- [16] 管宇, 徐宝文. 基于模式迁移策略的并行遗传算法[J]. *计算机学报*, 2003, 26(3): 294 – 301. (GUAN Yu, XU Baowen. Parallel genetic algorithms with schema migration[J]. *Chinese Journal of Computers*, 2003, 26(3): 294 – 301.)
- [17] 孙翠先, 郑树清. 基于均匀分布参数估计的几个结果[J]. *大学数学*, 2006, 22(5): 129 – 133. (SUN Cuixian, ZHENG Shuqing. Some results of parameter estimator based on uniform distribution[J]. *College Mathematics*, 2006, 22(5): 129 – 133.)
- [18] 于寅. 高等工程数学[M]. 第3版, 武汉: 华中科技大学出版社, 2001. (YU Yan. *Advanced Engineering Mathematics*[M]. 3rd Edition. WuHan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2001.)
- [19] 巩敦卫, 孙晓燕. 变搜索区域多种群遗传算法[J]. *控制理论与应用*, 2006, 23(2): 256 – 260. (GONG Dunwei, SUN Xiaoyan. Multi-population genetic algorithms with variational search areas[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(2): 256 – 260.)
- [20] DOYLE J, FRANCIS B, TANNENBAUM A. *Feedback Control Theory*[M]. London: Macmillan Publishers Ltd, 1990.

## 作者简介:

- 胡小青** (1985-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为鲁棒控制、无线传感器网络、智能控制系统, E-mail: [auxqhu@gmail.com](mailto:auxqhu@gmail.com);
- 胥布工** (1956-), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为传感器网络分析与设计、协同估计与信息处理、鲁棒控制、网络化控制系统实时控制理论及应用技术, E-mail: [aubgxu@scut.edu.cn](mailto:aubgxu@scut.edu.cn).