

## 基于非光滑观测器的迟滞三明治系统状态估计

周祖鹏<sup>1</sup>, 谭永红<sup>2</sup>

(1. 西安电子科技大学 电子工程学院, 陕西 西安 710071; 2. 上海师范大学 信息与机电工程学院, 上海 200234)

**摘要:** 针对带迟滞的三明治系统特点, 构建了一种非光滑观测器以对系统状态进行估计. 首先根据带迟滞三明治系统的特点, 采用分离原理, 建立了描述系统特性的非光滑状态空间方程. 据此构造了能够随系统工作区间变化而自动切换的非光滑观测器, 给出了相应的收敛定理及其证明. 最后通过仿真, 分别比较了非光滑观测器和传统的观测器对状态的跟踪效果, 比较结果表明非光滑观测器对于带迟滞三明治系统状态变量估计的准确性要优于传统的观测器.

**关键词:** 非光滑观测器; 迟滞; 三明治系统; 状态估计

**中图分类号:** TP13      **文献标识码:** A

## State estimation for sandwich systems with hysteresis by non-smooth observer

ZHOU Zu-peng<sup>1</sup>, TAN Yong-hong<sup>2</sup>

(1. School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an Shaanxi 710071, China;

2. College of Information, Mechanical and Electrical Engineering, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

**Abstract:** A novel non-smooth observer is proposed to handle the state estimation for sandwich systems with hysteresis. Based on the characteristic of the system, a non-smooth state-space model is proposed by using the separation principle. A non-smooth observer is developed based on the state-space model. The observer is switched among different operating zones automatically according to the operating conditions. The convergence of the non-smooth observer is discussed. Simulation results are presented. The comparison between the proposed non-smooth scheme and conventional methods show that the former has better estimation performance than the others.

**Key words:** non-smooth observer; hysteresis; sandwich system; state estimation

### 1 引言(Introduction)

近年来, 采用记忆合金、压电陶瓷的智能执行装置由于具有定位精度高、驱动力大和响应快等优点, 被广泛应用在精密加工机床、航天飞机的柔性机械手臂和天文望远镜等精密设备的定位系统中<sup>[1-2]</sup>, 但是记忆合金和压电陶瓷中存在着迟滞这种非光滑非线性<sup>[3]</sup>, 由于迟滞的影响, 系统会出现波动、振荡或动态误差. 而在工程实际中, 迟滞非线性特性不是孤立的, 而是与传统其他环节相联接, 往往是夹在两个线性动态环节之间, 被称为带迟滞的三明治系统. 例如, 压电陶瓷执行器的前端与功率放大器相接, 后端则与负载连接. 这样的系统可以用图1所示的带有迟滞的三明治系统描述.

对于许多动态系统, 无论是实现系统闭环极点的配置, 或是最优控制和故障诊断都离不开状态反

馈<sup>[4-5]</sup>. 为此, 针对特定系统构造相应的状态观测器去估计其状态变量一直是控制领域的研究重要课题之一. 文献[6-8]通过求解矩阵不等式的方法得到观测器增益矩阵并对具有不确定性的非线性系统进行状态估计. 文献[9]利用神经网络构造观测器对复杂的非线性系统进行状态估计. 文献[10-13]对一类线性切换系统进行状态估计.

由于带迟滞的三明治系统不仅是含有非光滑特性, 而且还具有多值映射等特性, 此外迟滞环节的前、后端都连接有动态子系统, 迟滞的输入和输出均为不可测量的中间变量. 因此, 此类系统具有更为复杂的结构. 迄今为止, 尚未发现针对带迟滞的三明治系统构造观测器的文献. 因此, 构造非光滑观测器对带迟滞三明治系统状态进行准确估计很有必要.

收稿日期: 2011-04-15; 收修改稿日期: 2011-10-21.

基金项目: 上海师范大学重点学科资助项目(DZL811, DRL904, DYL201005, DYL201006); 上海市教育委员会科研创新资助项目(09ZZ141); 国家自然科学基金资助项目(60971004); 上海市科委重点资助项目(09220503000, 10JC1412200); 上海市自然科学基金资助项目(09ZR1423400, 10ZR1422400).

## 2 带迟滞的三明治系统模型(The model of the sandwich systems with hysteresis)

设所研究的带迟滞三明治系统结构如图1所示, 其中:  $u$ 和 $y$ 分别为系统的输入和输出,  $L_1$ 为前端线性子系统,  $L_2$ 则为后端线性子系统,  $x$ 和 $v$ 为不可测的中间变量.



图1 带迟滞的三明治系统的结构图

Fig. 1 The structure of the sandwich systems with hysteresis

### 2.1 三明治系统线性部分的子模型(The submodels of the linear systems)

设前端线性子系统 $L_1$ 的状态方程表示为

$$\mathbf{x}_1(k+1) = A_{11}\mathbf{x}_1(k) + B_{11}u(k), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_1(k) = C_1\mathbf{x}_1(k). \quad (2)$$

后端线性子系统 $L_2$ 的状态方程为

$$\mathbf{x}_2(k+1) = A_{22}\mathbf{x}_2(k) + B_{22}v(k), \quad (3)$$

$$\mathbf{y}_2(k) = C_2\mathbf{x}_2(k), \quad (4)$$

其中:  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$ ,  $A_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $B_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$ ,  $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{1 \times n_i}$ ,  $u \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ ,  $v \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ ,  $i = 1, 2$ ;  $x_{1i}$ 表示 $L_1$ 环节的第 $i$ 个状态变量,  $x_{2i}$ 表示 $L_2$ 环节的第 $i$ 个状态变量;  $A_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ 为转移矩阵,  $B_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$ 表示输入矩阵,  $y_i \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ 为输出,  $n_i$ 表示第 $i$ 个线性环节的状态变量的维数.  $u \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ 为输入,  $v \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ 为间隙环节的输出变量. 不失一般性, 建模时约定, 对于 $L_1$ 来说, 令 $x_{1n_1}(k) = x(k)$ ; 对于 $L_2$ 来说, 令 $x_{2n_2}(k) = y(k)$ . 注意到系统只有 $u(k)$ 和 $y(k)$ 可测.

### 2.2 三明治系统迟滞部分的模型(Sub-model of the hysteresis in the sandwich system)

如图2所示, 根据文献[14–16]中关于迟滞建模方法的论述, 一个迟滞环节可以等效为多个间隙环节并联线性叠加. 文献[15]称这种迟滞建模为基于Backlash的迟滞模型. 文献[16]称这种迟滞建模为Prandtl-Ishlinskii(PI)模型. 文献[17]证明 Backlash算子具有迟滞的特性, 文献[18]证明了有限的Backlash迟滞算子可以以任意精度对迟滞进行建模. 因此, PI迟滞建模方法对实际迟滞表征是有效和合理的.

PI迟滞模型可表示为

$$\begin{aligned} z_i(k) &= B_i(x(k)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ v(k) &= \sum_{i=1}^n w_i B_i(x(k)) = \sum_{i=1}^n w_i z_i(k), \end{aligned} \quad (5)$$

其中:  $z_i(k)$ 表示第 $i$ 个间隙环节的输出,  $w_i$ 表示第 $i$ 个

间隙环节的权重,  $B_i(\cdot)$ 表示单个间隙的输入输出函数,  $n$ 表示用于构建迟滞模型的间隙的个数.

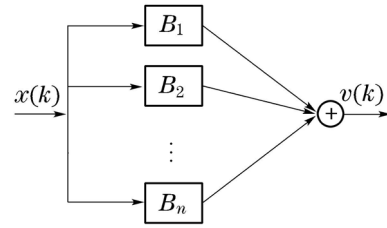


图2 迟滞的建模

Fig. 2 The model of hysteresis

**注1** 这里各个间隙的权重 $w_i$ 是已知的, 实际中这些权重可以通过辨识得到. 那么, 所针对的迟滞特性可视为已知, 与间隙三明治系统的非光滑观测器设计比较<sup>[19]</sup>, 由于迟滞由多个间隙环节线性并联叠加而成, 迟滞的输入必须与每一个间隙环节比较才能得到其相应的输出, 最后还需要将每一比较后的输出加权后才得到整个迟滞的输出, 因此, 迟滞的存在增加了系统结构的复杂程度. 但是, 从本质上说, 迟滞观测器的设计方法和间隙三明治系统的非光滑观测器类似, 并没有增加设计上的困难.

根据文献[14, 20–21], 第 $i$ 个间隙环节的输入输出特性可以描述如下:

强制中间变量 $m(k)$ :

$$m_i(k) = m_{1i} + (m_{2i} - m_{1i})g(k),$$

其中 $g(k)$ 为引入的切换函数, 其定义为

$$g(k) = \begin{cases} 0, & \Delta x \geq 0, \\ 1, & \Delta x < 0. \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\Delta x(k) = x(k) - x(k-1)$ .

根据间隙的输入输出关系, 定义中间变量 $z_{li}(k)$ 为

$$z_{li}(k) = m_i(k)(x(k) - D_{1i}g_{1i}(k) + D_{2i}g_{2i}(k)). \quad (7)$$

式(7)给出的是第 $i$ 个间隙在线性区的输入输出关系, 其中:

$$\begin{aligned} g_{1i}(k) &= \begin{cases} 1, & x(k) > \frac{v(k-1)}{m_1} + D_1 \ \& \ \Delta x(k) > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \\ g_{2i}(k) &= \begin{cases} 1, & x(k) < \frac{v(k-1)}{m_2} - D_2 \ \& \ \Delta x(k) < 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

为切换函数.  $D_{1i}$ 和 $D_{2i}$ 为第 $i$ 个间隙宽度( $0 < D_{1i} < \infty$ 和 $0 < D_{2i} < \infty$ );  $m_{1i}$ 和 $m_{2i}$ 为第 $i$ 个间隙的线性区斜率( $0 < m_{1i} < \infty$ 和 $0 < m_{2i} < \infty$ ). 从而有

$$z_i(k) = (1 - g_{3i}(k))z_{li}(k) + g_{3i}(k)z_i(k-1). \quad (8)$$

式(8)给出的是第 $i$ 个间隙在整个区间的输入输出关系, 其中

$$g_{3i}(k) = \begin{cases} 1, & g_{1i}(k) + g_{2i}(k) = 0, \\ 0, & g_{1i}(k) + g_{2i}(k) = 1 \end{cases}$$

负责间隙线性区和记忆区之间的切换. 从式(8)可看出, 当 $g_{3i}(k) = 1$ 时, 系统工作在记忆区,  $z_i(k) = z_i(k-1)$ ; 当 $g_{3i}(k) = 0$ 时, 系统工作在线性区,  $z_i(k) = z_{li}(k)$ . 将式(7)代入式(8), 则有

$$\begin{aligned} z_i(k) = & \\ & (1 - g_{3i}(k))z_{li}(k) + g_{3i}(k)z_i(k-1) = \\ & (1 - g_{3i}(k))m_i(k)x(k) - \\ & (1 - g_{3i}(k))m_i(k)D_{1i}g_{1i}(k) + \\ & (1 - g_{3i}(k))m_i(k)D_{2i}g_{2i}(k) + g_{3i}(k)z_i(k-1). \end{aligned} \quad (9)$$

若将式(9)代入式(5), 且考虑 $x(k) = x_{1n_1}(k)$ , 可得

$$\begin{aligned} x_2(k+1) = & \\ & A_{22}x_2(k) + B_{22}v(k) = \\ & A_{22}x_2(k) + B_{22} \sum_{i=1}^n w_i(1 - g_{3i}(k))m_i(k)x_{1n_1}(k) - \\ & B_{22} \sum_{i=1}^n w_i[(1 - g_{3i}(k))m_i(k)D_{1i}g_{1i}(k) - (1 - \\ & g_{3i}(k))m_i(k)D_{2i}g_{2i}(k) - g_{3i}(k)z_i(k-1)]. \end{aligned} \quad (10)$$

### 2.3 带迟滞三明治系统的整体状态空间方程 (State space model of the sandwich systems with hysteresis)

由式(1)–(4)和式(10)可得

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) \\ \mathbf{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ A_{21}(k) & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} B_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \theta_{22}(k) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k), \end{cases} \quad (11)$$

其中:

$$\begin{aligned} A_{21}(k) = & [\beta_1 \ \beta_2(k)], \beta_1 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_2 \times (n_2-1)}, \\ \beta_2(k) = & B_{22} \sum_{i=1}^n w_i(1 - g_{3i}(k))m_i(k), \\ \theta_{22}(k) = & \\ & -B_{22} \sum_{i=1}^n w_i[(1 - g_{3i}(k))m_i(k)D_{1i}g_{1i}(k) - \\ & (1 - g_{3i}(k))m_i(k)D_{2i}g_{2i}(k) - g_{3i}(k)z_i(k-1)], \end{aligned}$$

其中:  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n$ 表示间隙的个数. 若令

$$\begin{aligned} A(k) = & \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ A_{21}(k) & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\eta}(k) = & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \theta_{22}(k) \end{bmatrix}, \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times 1}, \end{aligned}$$

则式(11)可写成如下形式:

$$\mathbf{x}(k+1) = A(k)\mathbf{x}(k) + Bu(k) + \boldsymbol{\eta}(k), \quad (12)$$

$A(k)$ 表示转移矩阵,  $B$ 是输入矩阵,  $\boldsymbol{\eta}(k)$ 向量是由迟滞存在而产生的向量.

**注 2** 根据第1节中的假设知道, 如图1所示的带迟滞三明治系统只有其输出 $y(k)$ 可测, 所以有 $C = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \in \mathbb{R}^{1 \times (n_1+n_2)}$ . 为了后面的证明和子块矩阵运算方便,  $C$ 可以写成如下分块矩阵形式:  $C = [C_{11} \ C_{22}]$ , 其中:  $C_{11} = [0 \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times n_1}$ ,  $C_{22} = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \in \mathbb{R}^{1 \times n_2}$ .

### 3 带迟滞三明治系统的非光滑观测器(Non-smooth observer of sandwich systems with hysteresis)

首先, 一个需要明确的事实是: 如果系统只有输入 $u(k)$ 和输出 $y(k)$ 可测, 那么该三明治系统只有在线性工作区是满足完全能观条件的, 即只当 $A_{21}(k) \neq \mathbf{0}$ 时, 能观性矩阵

$$N(k) = [C \ CA(k) \ \dots \ CA(k)^{n_1+n_2-1}]^T$$

的秩等于 $n_1+n_2$ . 而 $A_{21}(k) = \mathbf{0}$ 时, 能观性矩阵的秩等于 $n_2$ , 即后端的线性子系统 $L_2$ 完全能观, 而前端子系统 $L_1$ 不能观. 所以, 从整个工作区间来看,  $\mathbf{x}_1$ 子系统是不能观的,  $\mathbf{x}_2$ 子系统是能观的. 故整个带间隙的三明治系统不完全能观. 因为传统的线性观测器增益反馈矩阵的求法和利用共用Lyapunov方法求解切换系统观测器增益反馈矩阵的方法都要求系统完全能观, 因此, 这些方法对带迟滞的三明治系统都不再适用.

#### 3.1 三明治系统的非光滑观测器(Non-smooth observer for sandwich system)

根据式(12), 构造相应的带迟滞三明治系统的龙伯格型观测器, 即

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = & \\ & \hat{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k) + Bu(k) + \hat{\boldsymbol{\eta}}(k) + K(\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)), \end{aligned} \quad (13)$$

其中: 增益矩阵 $K = [K_1 \ K_2]^T$ ,  $K_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}$ ,  $K_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$ . 系统系数矩阵的估计矩阵

$$\hat{A}(k) = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ \hat{A}_{21}(k) & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{21}(k) = & [\beta_1 \ \hat{\beta}_2(k)], \beta_1 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_2 \times (n_2-1)}, \\ \hat{\beta}_2(k) = & B_{22} \sum_{i=1}^n w_i(1 - \hat{g}_{3i}(k))\hat{m}_i(k). \end{aligned}$$

对迟滞向量的估计 $\hat{\boldsymbol{\eta}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\theta}_{22}(k) \end{bmatrix}$ , 其中

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{22}(k) = & \\ & -B_{22} \sum_{i=1}^n w_i[(1 - \hat{g}_{3i}(k))\hat{m}_i(k)D_{1i}\hat{g}_{1i}(k) - \\ & (1 - \hat{g}_{3i}(k))\hat{m}_i(k)D_{2i}\hat{g}_{2i}(k) - \hat{g}_{3i}(k)\hat{z}_i(k-1)], \end{aligned}$$

其中: 观测器的  $\hat{m}_i(k)$ ,  $\hat{g}(k)$ ,  $\hat{g}_{1i}(k)$ ,  $\hat{g}_{2i}(k)$ ,  $\hat{g}_{3i}(k)$  和  $\hat{z}_i(k)$  的计算公式如下:

$$\begin{aligned} \hat{m}_i(k) &= m_{1i} + (m_{2i} - m_{1i})\hat{g}(k), \\ \hat{g}(k) &= \begin{cases} 0, & \Delta\hat{x}_{1n_1}(k) \geq 0, \\ 1, & \Delta\hat{x}_{1n_1}(k) < 0, \end{cases} \\ \hat{g}_{1i}(k) &= \begin{cases} 1, & \hat{x}_{1n_1}(k) > \frac{\hat{z}_i(k-1)}{m_{1i}} + D_1, \Delta\hat{x}_{1n_1}(k) > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \\ \hat{g}_{2i}(k) &= \begin{cases} 1, & \hat{x}_{1n_1}(k) < \frac{\hat{z}_i(k-1)}{m_{2i}} - D_2, \Delta\hat{x}_{1n_1}(k) < 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \\ \hat{g}_{3i}(k) &= \begin{cases} 1, & \hat{g}_{1i}(k) + \hat{g}_{2i}(k) = 0, \\ 0, & \hat{g}_{1i}(k) + \hat{g}_{2i}(k) = 1, \end{cases} \\ \hat{z}_i(k) &= \hat{m}_i(k)(\hat{x}(k) - D_{1i}\hat{g}_{1i}(k) + D_{2i}\hat{g}_{2i}(k)), \\ \hat{z}_i(k) &= (1 - \hat{g}_{3i}(k))\hat{z}_i(k) + \hat{g}_{3i}(k)\hat{z}_i(k-1), \end{aligned}$$

这里:  $i \in (1, 2, \dots, n)$ ,  $n$  表示间隙的个数.

用式(12)减去式(13), 并考虑观测器可能存在区间估计误差, 可得

$$\mathbf{e}(k+1) = F(k)\mathbf{e}(k) + \Delta A(k)\mathbf{x}(k) + \Delta\boldsymbol{\eta}(k), \quad (14)$$

其中:  $F(k) = \hat{A}(k) - KC$ ,  $\Delta A(k) = A(k) - \hat{A}(k)$ ,  $\Delta\boldsymbol{\eta}(k) = \boldsymbol{\eta}(k) - \hat{\boldsymbol{\eta}}(k)$ ;  $F(k)$ ,  $\Delta A(k)$ ,  $\Delta\boldsymbol{\eta}(k)$  分别表示系统在  $k$  时刻的观测器的特征矩阵, 系数矩阵的估计误差阵和迟滞向量的估计误差向量. 按子状态  $\mathbf{x}_1$  和子状态  $\mathbf{x}_2$  的分块矩阵形式代入式(14), 并做分块矩阵运算, 具体推导过程如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(k+1) &= (\hat{A}(k) - KC)\mathbf{e}(k) + (A(k) - \hat{A}(k))\mathbf{x}(k) + (\boldsymbol{\eta}(k) - \hat{\boldsymbol{\eta}}(k)) \Rightarrow \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1(k+1) \\ \mathbf{e}_2(k+1) \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ \hat{A}_{21}(k) & A_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} [C_{11} \ C_{22}] \right) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1(k) \\ \mathbf{e}_2(k) \end{bmatrix} + \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_{21}(k) - \hat{A}_{21}(k) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \theta_{22}(k) - \hat{\theta}_{22}(k) \end{bmatrix} = \\ &= \left( \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ \hat{A}_{21}(k) & A_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_1 C_{11} & K_1 C_{22} \\ K_2 C_{11} & K_2 C_{22} \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1(k) \\ \mathbf{e}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_{21}(k) - \hat{A}_{21}(k) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \theta_{22}(k) - \hat{\theta}_{22}(k) \end{bmatrix}.$$

由式(11)可知  $C_{11} = \mathbf{0}$ , 根据上式得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1(k+1) \\ \mathbf{e}_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & -K_1 C_{22} \\ \hat{A}_{21}(k) & A_{22} - K_2 C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1(k) \\ \mathbf{e}_2(k) \end{bmatrix} + \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Delta A_{21}(k) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta\theta_{22}(k) \end{bmatrix}, \quad (15) \end{aligned}$$

其中:

$$\mathbf{e}_1(k+1) = A_{11}\mathbf{e}_1(k) - K_1 C_{22}\mathbf{e}_2(k), \quad (16)$$

$$\mathbf{e}_2(k+1) = \hat{A}_{21}(k)\mathbf{e}_1(k) + (A_{22} - K_2 C_{22})\mathbf{e}_2(k) + \Delta A_{21}(k)\mathbf{x}_1(k) + \Delta\theta_{22}(k), \quad (17)$$

其中:

$$\Delta A_{21}(k) = A_{21}(k) - \hat{A}_{21}(k),$$

$$\Delta\theta_{22}(k) = \theta_{22}(k) - \hat{\theta}_{22}(k),$$

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k), \quad (18)$$

这里:  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  表示观测器对状态的估计值,  $\hat{\mathbf{y}}(k)$  表示观测器对输出的估计值,  $\mathbf{e}(k)$  表示观测器的估计误差.

**注 3** 观测器的系数矩阵  $\hat{A}(k)$  和迟滞向量  $\hat{\boldsymbol{\eta}}(k)$  与  $\hat{g}_{1i}(k)$ ,  $\hat{g}_{2i}(k)$ ,  $\hat{g}_{3i}(k)$ ,  $\hat{m}_i(k)$  有关, 而  $\hat{g}_{1i}(k)$ ,  $\hat{g}_{2i}(k)$ ,  $\hat{g}_{3i}(k)$ ,  $\hat{m}_i(k)$  又与  $\hat{x}_{1n_1}(k)$  和  $\Delta\hat{x}_{1n_1}(k)$  以及  $\hat{z}_i(k-1)$  有关. 值得注意的是: 系统只有输入  $u(k)$  和输出  $y(k)$  可测, 决定系统工作区间的状态变量  $x_{1n_1}$ ,  $\Delta x_{1n_1}(k)$ ,  $z_i(k-1)$  是不可测的, 而观测器是根据对它们的估计  $\hat{x}_{1n_1}$ ,  $\Delta\hat{x}_{1n_1}(k)$ ,  $\hat{z}_i(k-1)$  进行切换的. 而在初始阶段由于观测器给定的初始值与实际系统的真实值之间可能存在误差, 因此, 观测器在初始阶段有可出现估计区间错误的情况, 从而引起较大估计误差. 所以无论对系数矩阵还是对迟滞向量而言都有可能存在估计误差. 因此, 在求观测器误差动态转移关系时, 应该考虑到这个问题.

### 3.2 非光滑观测器收敛性定理 (Convergence theorem of non-smooth observer)

**定理 1** 对于如式(11)所示的三明治系统:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) \\ \mathbf{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ A_{21}(k) & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \theta_{22}(k) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) = [C_{11} \ C_{22}]\mathbf{x}(k),$$

$$i = 1, 2, 3,$$

其中:  $\mathbf{0}$ 表示具有相应阶数的零阶矩阵,  $C_{11} = [0 \ \cdots \ 0 \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times n_1}$ ,  $C_{22} = [0 \ \cdots \ 0 \ 1] \in \mathbb{R}^{1 \times n_2}$ .

反馈增益矩阵可分解为  $K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}$ ,  $K_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}$ ,  $K_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$ .

设迟滞三明治系统满足如下条件:

- 1) 设系统子状态  $\mathbf{x}_1$  有界限, 即  $\forall k, \|\mathbf{x}_1(k)\|_m \leq x_b$ ,  $x_b \geq 0$  为给定常数;
- 2) 观测器  $\mathbf{e}_1$  的初始误差亦有界, 即  $\|\mathbf{e}_1(1)\|_m \leq e_b$ ,  $e_b \geq 0$  为给定的常数;
- 3) 子系统  $\mathbf{x}_1$  的系数矩阵  $A_{11}$  的特征值均在单位圆内且  $K_1 = \mathbf{0}$ ;
- 4) 子系统  $\mathbf{x}_2$  的系数矩阵  $A_{22}$  与对应的子增益矩阵  $K_2$  构成的特征矩阵  $(A_{22} - K_2 C_{22})$  的特征值也均在单位圆内时, 则式(13)所示的观测器的估计误差最终收敛到零. 定理证明见附录.

#### 4 仿真研究(Simulation)

仿真采样时间  $T = 0.01$  s, 迟滞环节由  $n = 7$  个间隙线性叠加而成. 其中各个间隙环节的参数如下:

间隙参数为:

$$w_i = 1, m_{1i} = m_{2i} = 1, \\ D_{1i} = D_{2i} = c_i/2, i = 1, 2, \dots, 7;$$

间隙宽度分别为:

$$c_1 = 0.14, c_2 = 0.12, c_3 = 0.1, \\ c_4 = 0.08, c_5 = 0.06, c_6 = 0.04, c_7 = 0.02.$$

线性系统的离散时间状态如式(18)所示. 前端线性环节  $L_1$ :

$$\begin{bmatrix} x_{11}(k+1) \\ x_{12}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.01 & 0.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(k) \\ x_{12}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.004107 \\ 0 \end{bmatrix} u(k).$$

后端线性环节  $L_2$ :

$$A(k) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 \sum_{i=1}^7 (1 - g_{3i}(k)) & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0.9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.4107 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \eta(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.25 \sum_{i=1}^7 ((1 - g_{3i}(k))(\frac{c_i}{2} g_{2i}(k) - \frac{c_i}{2} g_{1i}(k)) + g_{3i}(k) v_i(k-1)) \\ 0 \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) = [0 \ 0 \ 0 \ 1]\mathbf{x}(k) = [0 \ 0 \ 0 \ 1][x_{11} \ x_{12} \ x_{21} \ x_{22}]^T.$$

$$\begin{bmatrix} x_{21}(k+1) \\ x_{22}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.01 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21}(k) \\ x_{22}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0 \end{bmatrix} v(k),$$

迟滞输入输出特性:

$$\begin{cases} H(x_{12}(k)) = v(k) = \\ \sum_{i=1}^7 (1 - g_{3i}(k)) x_{12}(k) - \\ \sum_{i=1}^7 [(1 - g_{3i}(k)) D_{1i} g_{1i}(k) - (1 - \\ g_{3i}(k)) D_{2i} g_{2i}(k) - g_{3i}(k) z_i(k-1)], \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) = \\ [0 \ 0 \ 0 \ 1][x_{11} \ x_{12} \ x_{21} \ x_{22}]^T. \end{cases} \quad (19)$$

图3给出了仿真系统中采用间隙算子叠加后的迟滞输入-输出特性, 由图3可知间隙算子叠加得到的迟滞特性是显著的.

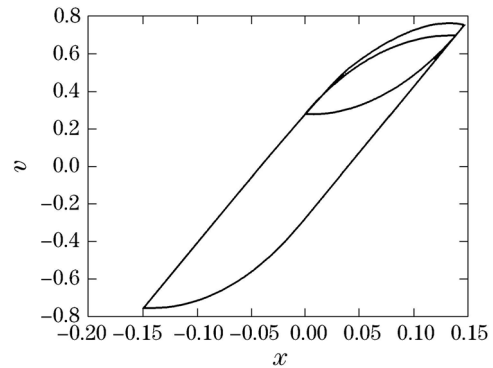


图 3 迟滞输入-输出关系

Fig. 3 Input and output of the hysteresis

按照式(11)和式(12)的形式, 将系统式(19)整合为式(20):

$$\mathbf{x}(k+1) = A(k)\mathbf{x}(k) + Bu(k) + \eta(k), \quad (20)$$

其中:

根据式(20),构造如式(13)所示的观测器:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}(k+1) = \hat{A}(k)\hat{\boldsymbol{x}}(k) + Bu(k) + \hat{\boldsymbol{\eta}}(k) + K(\boldsymbol{y}(k) - \hat{\boldsymbol{y}}(k)), \\ \hat{\boldsymbol{y}}(k) = C\hat{\boldsymbol{x}}(k), \end{cases} \quad (21)$$

其中:

$$\hat{A}(k) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 \sum_{i=1}^7 (1 - \hat{g}_{3i}(k)) & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.4107 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.25 \sum_{i=1}^7 ((1 - \hat{g}_{3i}(k)) (\frac{c_i}{2} \hat{g}_{2i}(k) - \frac{c_i}{2} \hat{g}_{1i}(k)) + \hat{g}_{3i}(k) \hat{v}_i(k-1)) \\ 0 \end{bmatrix}^T.$$

根据式(20)、第2节给出的定理及式(21)所表示的观测器:  $\boldsymbol{x}_1$ 的系数矩阵 $A_{11}$ 的特征值 $[0.8 \ 0.45]^T$ 在单圆内,当增益矩阵 $K = [0 \ 0 \ 0.1 \ 0.1]^T$ 时,  $K_1 = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{x}_2$ 子系统的特征矩阵 $(A_{22} - K_2 C_2)$ 的特征值 $[0.8000 + 0.0316i \ 0.8000 - 0.0316i]^T$ 在单位圆内,因此满足定理给出的观测器收敛条件. 设观测器的初始值为 $\hat{\boldsymbol{x}}(0) = [5 \ 0.2 \ 0.5 \ 0.02]^T$ , 真实初始值 $\boldsymbol{x}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 仿真结果如图4所示. 图中: 实线表示状态的真实值, 虚线表示状态的估计值.

由图4可见, 非光滑观测器就能够快速、准确地跟踪系统的各个状态变量真实值. 与此同时, 笔者采用传统的观测器在相同的条件下进行比较.

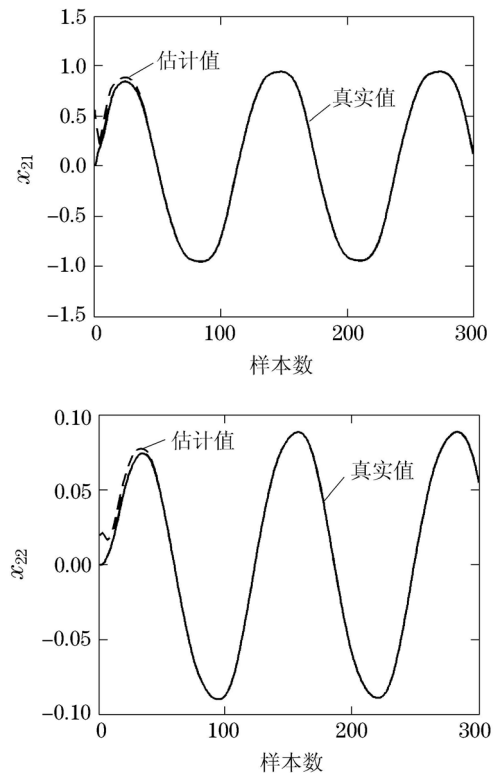
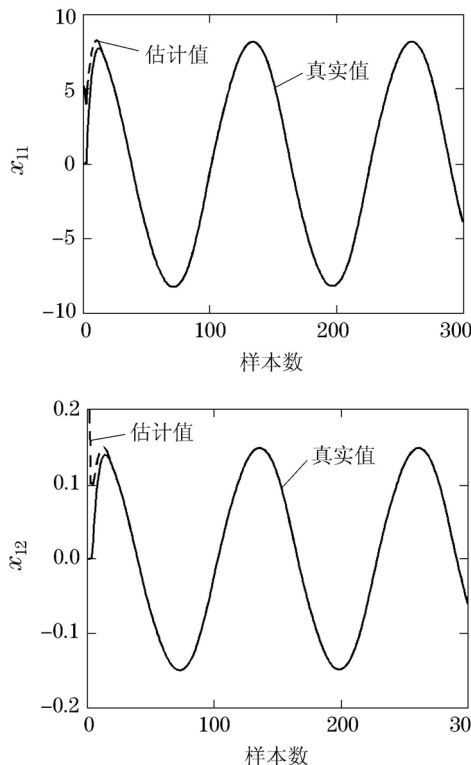


图4 非光滑观测器跟踪效果

Fig. 4 The estimate performance of the non-smooth observer

由于传统的观测器设计忽略迟滞的影响, 因此所构建观测器是光滑的, 那么原来的三明治系统模型蜕变成了由两个线性环节和一个比例环节串联而成的系统. 相应的观测器具有如下形式:

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k+1) = A\hat{\boldsymbol{x}}(k) + Bu(k) + K_1(\boldsymbol{y}(k) - \hat{\boldsymbol{y}}(k)), \quad (22)$$

若取 $K_1 = [0 \ 0 \ 0.1 \ 0.1]^T$ , 由文献[22]可知, 观测器满足收敛条件. 图5给出了传统观测器对各个状态

变量的估计情况. 由图5可见, 传统观测器对状态的估计效果要明显不如本文所提出的非光滑观测器. 特别是对状态 $x_{21}$ ,  $x_{22}$ 的估计出现了很大的偏差.

为了进一步比较两种观测器对各个状态估计效果, 图6给出了两类观测器对各个状态估计的误差值曲线, 其中: 实线表示非光滑观测器的估计误差, 虚线表示传统观测器的估计误差.

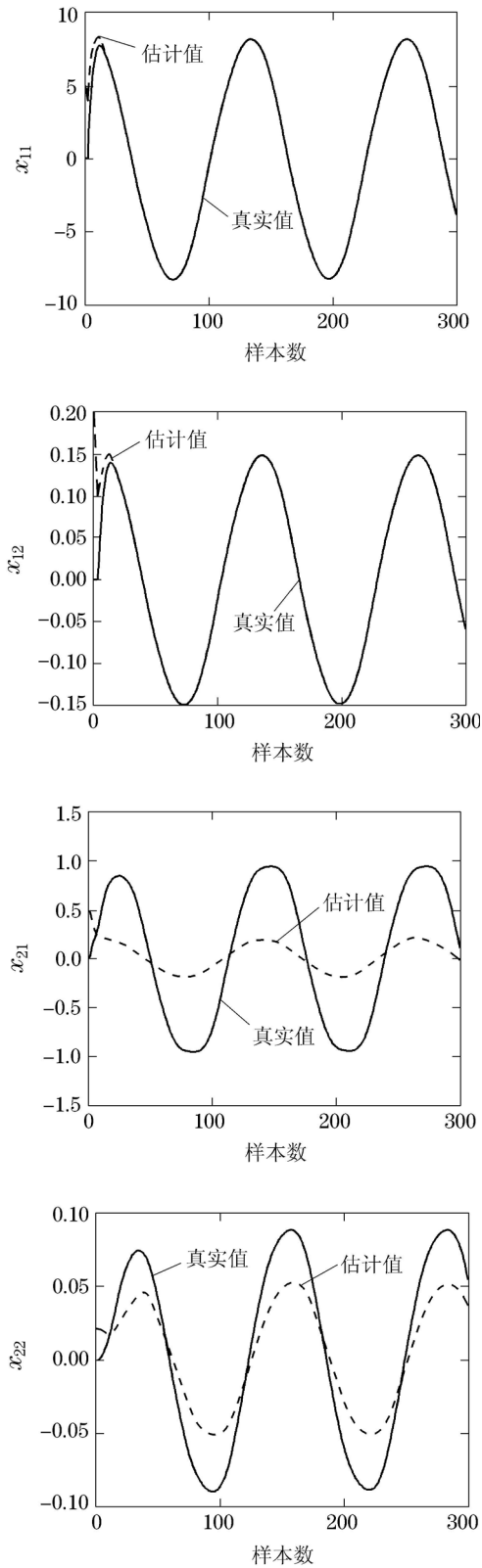


图 5 传统观测器跟踪效果

Fig. 5 The estimation performance of conventional observer

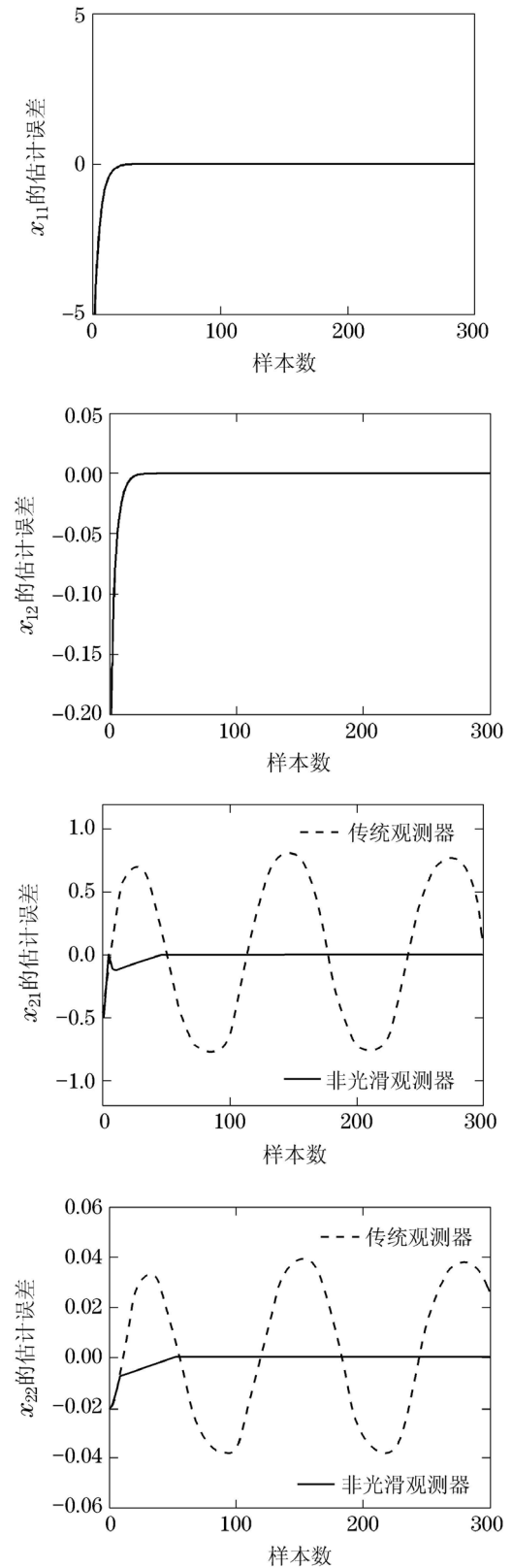


图 6 两种观测器误差比较

Fig. 6 Estimation error comparison of two kinds of observers

从图6中可以清楚地看到,与传统观测器比较,非光滑观测器的估计误差要小得多,并能较快地收敛为零.而传统观测器由于没有考虑非光滑非线性环节的作用,所以对状态的估计误差也较大.因此,从状态估计效果上说,非光滑观测器比传统观测器要好得多,这也反映了针对这类系统构建非光滑观测器的意义所在.

## 5 结论(Conclusion)

工业中常见的精密定位系统、压电陶瓷执行器系统等往往存在迟滞特性,可以用带迟滞的三明治系统来描述这些含有迟滞的工业系统.由于迟滞是一种非光滑、多值映射的非线性,因此对于带迟滞的三明治,采用系统传统的状态观测器难以获得令人满意的估计效果.本文提出了一种非光滑观测器以估计这类系统的状态.通过构造描述这类系统的非光滑状态空间模型,进而在观测器中引入自动切换项,从而获得了对这类具有复杂结构和特性系统的观测器.本文讨论了观测器的结构和设计原则,分析了非光滑观测器的收敛性.仿真实验表明本文提出的非光滑观测器能够快速、准确跟踪系统的状态,与传统的观测器相比,非光滑观测器获得了较快和更准确的状态估计效果.

## 参考文献(References):

- [1] ZHAO X L, TAN Y H. Neural network based identification of Preisach-type hysteresis in piezoelectric actuator using hysteretic operator [J]. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2006, 126(2): 306 – 311.
- [2] AVINASH T, GANG T. *Control of sandwich nonlinear system* [D]. Virginia: University of Virginia, 2001: 27 – 37.
- [3] DONG R, TAN Y H. A neural networks based model for rate-dependent hysteresis for piezoceramic actuators [J]. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2008, 141(2): 370 – 376.
- [4] CACCAVALE F, CILIBRIZZI P, PIERRI F, et al. Actuator fault diagnosis for robot manipulators with uncertain model [J]. *Control Engineering Practice*, 2009, 17(1): 14 – 157.
- [5] CACCAVALE F, PIERRI F, VILLANI L. Adaptive Observer for fault diagnosis in nonlinear discrete-time systems [J]. *ASME Journal of Dynamic System, Measurement, and Control*, 2008, 130(2): 1 – 9.
- [6] WU H S. Adaptive robust state observers for a class of uncertain nonlinear dynamical systems with delayed state perturbations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(6): 1407 – 1412.
- [7] REMY N, DAMIEN K, EDUARDO M. LMI design of a switched observer with model uncertainty: application to a hysteresis mechanical system [C] // *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 2007: 6298 – 6303.
- [8] UMIT O, SULGI H, PAN Y D. Discrete-time sliding mode control electronic throttle valve [C] // *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 2001: 1819 – 1824.
- [9] SHAIK F A, PURWAR S. A nonlinear state observer design for 2-dof twin rotor system using neural networks [C] // *The 2009 International Conference on Advances in Computing, Control, and Telecommunication Technologies*. Piscataway, NJ: IEEE, 2009: 15 – 19.
- [10] ALESSANDRI A, COLETTA P. Design of Luenberger observers for a class of hybrid linear systems [C] // *Hybrid Systems: Computation and Control*. Berlin: Springer, 2001: 7 – 18.
- [11] ALESSANDRI A, COLETTA P. Switching observers for continuous-time and discrete-time linear systems [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. New York: IEEE, 2001: 2516 – 2521.
- [12] JULOSKI A, HEEMELS W P M H, WEILAND S. Observer design for a class of piecewise affine systems [C] // *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 2002: 2606 – 2611.
- [13] JULOSKI A, HEEMELS W P M H, BOERS Y, et al. Two approaches to state estimation for a class of piecewise affine systems [C] // *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 2003: 143 – 148.
- [14] 董瑞丽. 非光滑三明治系统的辨识和控制研究 [D]. 上海: 上海交通大学, 2008: 25 – 37.  
(DONG Ruili. *Identification and control of the nonsmooth sandwich systems* [D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2008: 25 – 37.)
- [15] 赵彤. 基于Preisach迟滞非线性建模与神经网络自适应控制方案设计 [D]. 上海: 上海交通大学, 2004: 32 – 33.  
(ZHAO Tong. *Nonlinear modeling and adaptive control based on neural network of hysteresis based on Preisach model* [D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2004: 32 – 33.)
- [16] KUGI Y, THULL D, KUHNEN K. An infinite-dimensional control concept for piezoelectric structures with complex hysteresis [J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2006, 13(6): 1099 – 1119.
- [17] KUHNEN K, JANOSHA H. Adaptive inverse control of piezoelectric actuators with hysteresis operators [C] // *European Control Conference*. Karlsruhe, Germany: European Union Control Association, 1999: F0291 – F0310.
- [18] BERGQVIST A, ENGDAHL G. A phenomenological magnetomechanical hysteresis model [J]. *Journal Applied Physics (S0021-8979)*, 1994, 75(10): 5496 – 5498.
- [19] 周祖鹏, 谭永红. 基于非光滑观测器的间隙三明治系统状态估计 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(1): 34 – 40.  
(ZHOU Zupeng, TAN Yonghong. Non-smooth observer for sandwich systems with backlash [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(1): 34 – 40.)
- [20] DONG R, TAN Q, TAN Y H. Recursive identification algorithm for dynamic systems with output backlash and its convergence [J]. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2009, 19(4): 631 – 638.
- [21] DONG R L, TAN Y H, CHEN H. Recursive identification for dynamic systems with backlash [J]. *Asian Journal of Control*, 2010, 12(1): 26 – 38.
- [22] 刘豹, 唐万生. 现代控制理论 [M]. 第3版. 北京: 机械工业出版社, 2006: 210 – 212.  
(LIU Bao, TANG Wansheng. *Modern Control Theory* [M]. 3rd edition. Beijing: Press of Mechanical Technology, 2006: 210 – 212.)
- [23] 曾译金, 吴华安. 矩阵分析及其应用 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2007: 115 – 123.  
(ZENG Xiangjin, WU Hua'an. *Analysis and Application of Matrix* [M]. Wuhan: Press of Wuhan University, 2007: 115 – 123.)



**附录 定理证明(Appendix Proof of the theorem)**

证 根据式(16)和式(17),可以得到式(A1)和式(A2):

$$e_1(k+1) = A_{11}e_1(k) - K_1C_{22}e_2(k), \quad (A1)$$

$$e_2(k+1) = A_{21}(k)e_1(k) + (A_{22} - K_2C_{22})e_2(k) + \Delta A_{21}(k)x_1(k) + \Delta\theta_{22}(k). \quad (A2)$$

**第1步** 证明满足定理1条件2)和3)时,第1个线性系统子状态的估计误差 $e_1(k)$ 最终趋于零.由条件3)可得 $\rho(A_{11}) < 1$ .其中 $\rho(\cdot)$ 表示矩阵的谱半径.由条件3)并结合式(A1)可得

$$e_1(k+1) = A_{11}e_1(k). \quad (A3)$$

对式(A3)进行递推,得到

$$e_1(k+1) = A_{11}^k e_1(1). \quad (A4)$$

由参考文献[20]中的矩阵序列收敛定理可知

$$\rho(A_{11}) < 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} A_{11}^k = 0. \quad (A5)$$

根据条件2)可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_1(k+1)\|_m = \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_1(1)A_{11}^k\|_m \leq e_b \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_{11}^k\|_m = 0, \quad (A6)$$

即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_1(k)\|_m = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} e_1(k) = \mathbf{0} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (\hat{x}_1(k) - x_1(k)) = \mathbf{0}, \quad (A7)$$

因此 $\hat{x}_1(k)$ 收敛于 $x_1(k)$ 得证.

**第2步** 证明满足定理1条件1)–2)和4)时,第2个线性系统子状态的估计误差 $e_2(k)$ 最终趋于零.

首先,证明观测器构造的迟滞的输入输出状态在 $k \rightarrow \infty$ 时会趋于实际迟滞的输入输出状态.由式(A7)可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\hat{x}_{1n_1}(k) - x_{1n_1}(k)) = 0. \quad (A8)$$

根据序列极限定义:对于任意小的 $\varepsilon, \varepsilon > 0$ ,总存在 $N_1(N_1$ 为大于零的正整数).当 $k > N_1$ 时,

$$x_{1n_1}(k) - \varepsilon < \hat{x}_{1n_1}(k) < x_{1n_1}(k) + \varepsilon, \quad (A9)$$

$$x_{1n_1}(k+1) - \varepsilon < \hat{x}_{1n_1}(k+1) < x_{1n_1}(k+1) + \varepsilon. \quad (A10)$$

式(A10)减去式(A9)可得

$$\Delta x_{1n_1}(k) - 2\varepsilon < \Delta \hat{x}_{1n_1}(k) < \Delta x_{1n_1}(k) + 2\varepsilon. \quad (A11)$$

若取 $\varepsilon$ 远小于 $x_{1n_1}(k)$ 和 $\Delta x_{1n_1}(k)$ ,即 $\varepsilon \ll x_{1n_1}(k), \varepsilon \ll \Delta x_{1n_1}(k)$ .当 $k > N_1$ 时,有 $\hat{x}_{1n_1}(k) \rightarrow x_{1n_1}(k)$ 且 $\Delta \hat{x}_{1n_1}(k) \rightarrow \Delta x_{1n_1}(k)$ .迟滞由多个间隙环节线性叠加而成,且每一个实际间隙环节与观测器构造的间隙环节结构完全相同,所

以观测器间隙输出按式(13)中 $\hat{z}_i(k)$ 的计算公式再经过 $N_2$ 次迭代必有 $\hat{z}_i(k-1) \rightarrow z_i(k-1)$ ,即

$$\hat{z}_i(k-1) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} z_i(k-1), \quad (A12)$$

所以,当 $k > N_1 + N_2$ 时, $\hat{x}_{1n_1}(k) \rightarrow x_{1n_1}(k), \Delta \hat{x}_{1n_1}(k) \rightarrow \Delta x_{1n_1}(k), \hat{z}_i(k-1) \rightarrow z_i(k-1)$ 均成立.

其次,证明观测器估计各个中间变量和切换函数在 $k \rightarrow \infty$ 时将会与实际迟滞一致.由于 $\hat{x}_{1n_1}(k), \Delta \hat{x}_{1n_1}(k), \hat{z}_i(k-1)$ 足够接近其真实值 $x_{1n_1}(k), \Delta x_{1n_1}(k), z_i(k-1)$ ,再结合式(6)–(8)中关于 $m_i(k), g(k), g_{1i}(k), g_{2i}(k), g_{3i}(k)$ 和式(13)中关于 $\hat{m}_i(k), \hat{g}(k), \hat{g}_{1i}(k), \hat{g}_{2i}(k), \hat{g}_{3i}(k)$ 的计算可得

$$\begin{cases} \hat{m}_i(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} m_i(k), \\ \hat{g}(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g(k), \\ \hat{g}_{1i}(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g_{1i}(k), \\ \hat{g}_{2i}(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g_{2i}(k), \\ \hat{g}_{3i}(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g_{3i}(k), \\ \hat{z}_i(k-1) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} z_i(k-1). \end{cases} \quad (A13)$$

然后,证明在 $k \rightarrow \infty$ 时,由于工作区间不一致造成的估计误差为零.由式(17)可知

$$\Delta A_{21}(k) = A_{21}(k) - \hat{A}_{21}(k) = -(\hat{A}_{21}(k) - A_{21}(k)).$$

由式(11)和式(13)可知

$$\Delta A_{21}(k) = -(\hat{A}_{21}(k) - A_{21}(k)) = [\mathbf{0} \quad -(\hat{\beta}_2(k) - \beta_2(k))].$$

由式(A13)可得

$$\begin{aligned} & - \lim_{k \rightarrow \infty} (\hat{\beta}_2(k) - \beta_2(k)) = \\ & - \lim_{k \rightarrow \infty} [B_{22} \sum_{i=1}^n w_i (1 - \hat{g}_{3i}(k)) \hat{m}_i(k)] + \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} [B_{22} \sum_{i=1}^n w_i (1 - g_{3i}(k)) m_i(k)] = \mathbf{0} \Rightarrow \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta A_{21}(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} -(\hat{A}_{21}(k) - A_{21}(k)) = \\ & [\mathbf{0} \quad - \lim_{k \rightarrow \infty} (\hat{\beta}_2(k) - \beta_2(k))] = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (A14)$$

由式(17)可知

$$\begin{cases} \Delta \theta_{22}(k) = \theta_{22}(k) - \hat{\theta}_{22}(k) = -(\hat{\theta}_{22}(k) - \theta_{22}(k)), \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta \theta_{22}(k) = - \lim_{k \rightarrow \infty} (\hat{\theta}_{22}(k) - \theta_{22}(k)) = \\ B_{22} \sum_{i=1}^n w_i \lim_{k \rightarrow \infty} [(1 - \hat{g}_{3i}(k)) \hat{m}_i(k) D_{1i} \hat{g}_{1i}(k) - \\ (1 - \hat{g}_{3i}(k)) \hat{m}_i(k) D_{2i} \hat{g}_{2i}(k) - \hat{g}_{3i}(k) \hat{z}_i(k-1)], \\ - B_{22} \sum_{i=1}^n w_i \lim_{k \rightarrow \infty} [(1 - g_{3i}(k)) m_i(k) D_{1i} g_{1i}(k) - \\ (1 - g_{3i}(k)) m_i(k) D_{2i} g_{2i}(k) - g_{3i}(k) z_i(k-1)] = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (A15)$$

由式(A14)和式(A15)可以推出: $k \rightarrow \infty$ 时,有

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta A_{21}(k) = \mathbf{0}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta \theta_{22}(k) = \mathbf{0} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta A_{21}(k)\| = 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \theta_{22}(k)\| = 0. \end{cases} \quad (\text{A16})$$

最后, 证明估计误差  $e_2(k)$  最终趋于零. 对式(A2)两边取  $m$  范数后再取极限, 并根据范数三角不等性, 相容性和等价性, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_2(k+1)\|_m \leq \\ & \|A_{21}(k)\|_m \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_1(k)\|_m + \\ & \|(A_{22} - K_2 C_{22})\|_m \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_2(k)\|_m + \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta A_{21}(k)\|_m \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_1(k)\|_m + \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \theta_{22}(k)\|_m. \end{aligned} \quad (\text{A17})$$

由式(A7)(A14)和(A16)可知

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_1(k)\|_m = 0, \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta A_{21}(k)\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \theta_{22}(k)\| = 0, \end{aligned}$$

并结合定理条件1)和2), 由式(A17)可以推出

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_2(k+1)\|_m \leq \\ & \|(A_{22} - K_2 C_{22})\|_m \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_2(k)\|, \end{aligned} \quad (\text{A18})$$

因此, 由式(A18)可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|e_2(k+1)\|_m}{\|e_2(k)\|_m} \leq \|(A_{22} - K_2 C_{22})\|_m < 1. \quad (\text{A19})$$

因为  $\|e_2(k)\|_m$  范数序列是一个正值序列, 且式(A19)成立, 根据正项级数的比值判别定理可知, 该正项级数收敛. 而正项级数收敛的必要条件是其序列的极限为零, 由此可得  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_2(k)\|_m = 0$ . 因此,  $\hat{x}_2(k)$  收敛于  $x_2(k)$ , 定理得证.

**注 4** 根据参考文献 [23] 中的定理可知: 设  $A \in C^{n \times n}$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , 总是存在某一矩阵范数  $\|\cdot\|_m$ , 范数形式依赖  $A$  和  $\varepsilon$ , 使得  $\|A\|_m \leq \rho(A) + \varepsilon$ . 根据定理1条件4)可得  $\rho(A_{22} - K_2 C_{22}) < 1$ , 所以  $1 - \rho(A_{22} - K_2 C_{22}) > 0$ . 若取  $\varepsilon$  满足  $0 < \varepsilon < 1 - \rho(A_{22} - K_2 C_{22})$ , 根据以上定理可知: 总存在某个范数  $\|\cdot\|_m$ , 使得

$$\|A_{22} - K_2 C_{22}\|_m \leq \rho(A_{22} - K_2 C_{22}) + \varepsilon.$$

若取  $\varepsilon$ , 满足  $0 < \varepsilon < 1 - \rho(A_{22} - K_2 C_{22})$ , 所以有

$$0 < \rho(A_{22} - K_2 C_{22}) + \varepsilon < 1,$$

所以, 对于给定条件的  $\varepsilon$  总存在某个范数  $\|\cdot\|_m$ , 使得  $\|A_{22} - K_2 C_{22}\|_m \leq \rho(A_{22} - K_2 C_{22}) + \varepsilon < 1 \Rightarrow \|A_{22} - K_2 C_{22}\|_m < 1$  成立.

作者简介:

**周祖鹏** (1977-), 男, 博士研究生, 副教授, 目前研究方向为非线性系统状态估计、非线性系统故障诊断、绿色设计和生态设计等, E-mail: zhouzupeng@guet.edu.cn;

**谭永红** (1958-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为智能控制与信号处理、非线性系统建模与控制、机电系统故障诊断等, E-mail: tanyongh@yahoo.com.cn, 通讯作者.