

以幂次趋近的离散变结构重复控制

孙明轩, 王 辉, 范伟云

(浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310023)

摘要: 本文提出一种离散变结构重复控制器设计方法, 在趋近律中“嵌入”扰动抑制措施, 构造理想切换动态, 并据此导出重复控制器. 为了进行控制器参数整定和刻画闭环系统的收敛性能, 文中推导出准滑模带、单调收敛层和绝对收敛层边界的表达式. 设计的离散变结构重复控制器能够完全抑制周期性扰动, 控制器设计方法也适用于常值扰动下的定位控制. 数值仿真及实验结果验证了所提出控制方案的有效性.

关键词: 幂次趋近律; 变结构控制; 重复控制; 离散时间系统

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Discrete-time variable-structure repetitive control with power-rate reaching

SUN Ming-xuan, WANG Hui, FAN Wei-yun

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310023, China)

Abstract: We present a discrete-time variable-structure repetitive controller; in which a measure of disturbance-rejection is embedded in the reaching law to form the ideal dynamics of switching, thus developing the repetitive controller. For the convenience in adjusting the control parameters and describing the convergent performance of the closed-loop system, we derive the expressions for the range of the quasi-sliding-mode and the boundary between the monotonic convergence layer and the absolute convergence layer. The developed repetitive controller is not only effective in perfect rejection of periodic disturbances, but also applicable to position control with constant disturbances. Both numerical simulation and experiment results demonstrate the effectiveness of the proposed repetitive control scheme.

Key words: power-rate reaching law; variable structure control; repetitive control; discrete-time systems

1 引言(Introduction)

变结构控制是实际中常采用的一种控制技术, 它引起人们兴趣的是其滑动模态对系统参数摄动及外界干扰所具有的鲁棒性^[1]. 早期文献中的到达条件具有不等式形式. 20世纪80年代发表了以等式形式表示的到达条件, 即趋近律^[2-3]. 由于是等式形式, 依据趋近律可直接导出控制器. 至今, 趋近律方法已发展成为变结构控制系统设计的一种主要方法.

在已发表文献中, 人们对工程实现时所能达到的拟滑动模态给予了关注. 文献[3]给出了准滑动模态及准滑模带宽的定义. 对于不确定系统, 该文以趋近律方法设计控制器, 发现所产生的切换动态与干扰有关. 文献[4-5]对于文献[3]提出的趋近律方法进行了更为深入的讨论. 文献[6]引入解耦扰动观测器, 实现了切换动态与扰动估计误差动态的解耦, 保证了系统对常值干扰的完全补偿. 文献[7]基于前一步的干扰(可计算量)构造等效干扰, 以提高稳态控制精度. 文献[8]通过增加约束条件, 对文献[3]中的趋

近律进行修正, 消除了抖振现象. 文中同时与饱和函数修正进行了比较. 文献[9]讨论理想趋近律与鲁棒趋近律的概念, 并提出理想趋近律方法. 上述文献主要讨论指数趋近律, 近年来幂次趋近律成为人们关注的热点. 对于确定性系统, 文献[10]推导出幂次趋近律准滑模带宽, 文献[11]进一步给出准滑动模态的到达时间. 文献[12]利用幂次函数构造离散趋近律, 并对控制算法的收敛域进行了分析. 文献[13]讨论连续形式的幂次趋近律, 由滑模带宽推出稳态跟踪误差界.

实际中许多系统执行周期跟踪任务, 这类系统在运行中往往受到周期性干扰. 基于内模原理的重复控制技术可实现周期跟踪任务的完全跟踪, 以及外部周期扰动完全抑制. 目前已发表相关文献中, 多为重复控制器的频域设计方法, 系统稳定性及收敛性条件也是基于频域分析给出^[14]. 然而, 重复控制系统的时域分析与综合方法也是值得探讨的, 特别是, 如何将趋近律方法用于重复控制器设计是值得研究

的课题. 文献[15-16]给出了基于饱和趋近律的重复控制器设计, 而文献[17]采用继电特性连续化趋近律设计重复控制器.

以趋近律直接设计不确定系统的控制器, 所导出的控制器依赖于不确定项, 因而不可实现^[3]. 需对原趋近律进行修正, 将干扰抑制措施“嵌入”到趋近律中, 获得理想的切换动态(依赖于不确定项); 然后, 设计控制器以实现理想切换动态. 本文称这种方法为理想切换动态方法, 实际上它是处理不确定系统的趋近律方法.

本文推广文献[15-17]的结果, 讨论采用幂次趋近律的重复控制方法. 通过增加干扰抑制措施, 构造出理想切换动态, 并据此设计出控制器. 文中推导闭环系统存在的3种边界, 即单调收敛层边界、绝对收敛层边界和准滑模带边界. 其取值与控制器参数有关, 可用于参数整定. 进一步地, 说明这种控制器设计方法也可用于常值扰动情况下实现定位控制任务. 提供的数值仿真结果用于验证理论推导的各边界值; 完成的直线伺服系统实验用于证明所提出控制方案的有效性.

2 问题的提出(Problem formulation)

考虑下述单输入不确定离散时间系统:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}u_k + g'_k, \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态, $u_k \in \mathbb{R}$ 为控制输入, $g'_k \in \mathbb{R}$ 为扰动变量, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 及 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ 是已知的系统参数矩阵.

假设 1 系统 (\mathbf{A}, \mathbf{b}) 是能控的.

假设1成立时, 可通过设计合适的状态反馈控制器任意配置闭环系统的极点, 以满足关于标称系统的稳定性要求.

假设 2 扰动变量 g'_k 满足

$$g'_k \in \text{Im}(\mathbf{b}), \quad (2)$$

这里 $\text{Im}(\mathbf{b})$ 表示 \mathbf{b} 的值域.

由值域的定义知, 假设2意味着存在 g_k , 使得 $g'_k = \mathbf{b}g_k$. 通常, 满足假设2的系统(1)被称作满足完全匹配条件, g_k 为等价输入干扰. 这时, 可将系统(1)表示成

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}(u_k + g_k). \quad (3)$$

本文研究的问题是考虑干扰的主要成分呈周期性情形, 对不确定离散系统(3)设计重复控制器, 在保证闭环系统稳定的同时, 实现对扰动周期部分的完全抑制, 从而达到提高控制精度的最终目的.

3 幂次趋近重复控制(Power-rate-approaching repetitive control)

本节笔者基于幂次趋近律设计重复控制器, 并对

闭环系统的切换动态进行分析.

3.1 重复控制器设计(Repetitive controller design)

为了进行滑模控制器设计, 选取切换函数 s_k 为

$$s_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k, \quad (4)$$

式中 \mathbf{c} 为具有相应维数的向量, 它的设置应保证系统的滑动模态渐稳, 且具有良好的动态特性. 还应使得 $\mathbf{c}^T \mathbf{b} \neq 0$, 以保证变结构控制系统的能控性.

针对不确定系统设计控制器时, 若直接采用趋近律方法进行设计, 所产生的切换动态将依赖于不确定项. 本文提出一种理想切换动态设计方法, 将扰动抑制措施“嵌入”其中, 以降低扰动对系统控制性能的影响. 下述为本文采用的理想切换动态:

$$s_{k+1} = \begin{cases} (1 - \rho)s_k - \varepsilon |s_k|^{\frac{1}{2}} \text{sgn } s_k + d_k - d_k^*, & |s_k| > \delta^2, \\ (1 - \rho - \frac{\varepsilon}{\delta})s_k + d_k - d_k^*, & |s_k| \leq \delta^2, \end{cases} \quad (5)$$

或表示为

$$s_{k+1} = (1 - \rho)s_k - \varepsilon |s_k|^{\frac{1}{2}} \text{sat}\left(\frac{|s_k|^{\frac{1}{2}} \text{sgn } s_k}{\delta}\right) + d_k - d_k^*, \quad (6)$$

式中: $0 < \rho < 1$, $0 < \varepsilon < \delta(1 - \rho)$, $\delta > 0$, d_k^* 用于补偿 d_k .

幂次趋近律本身不会导致颤振现象, 原本无需进行连续化处理. 但实现时, 由于存在量测干扰, 只能将状态控制到某邻域中. 这样, 单纯采用幂次趋近律仍会存在颤振现象. 尽管幅度较小, 却仍有可能激发高频未建模动态. 为此, 本文对幂次趋近律做如下修正: 当 $|s_k| > \delta^2$ 时, 采用幂次趋近律; 当 $|s_k| \leq \delta^2$ 时, 转变为 $s_{k+1} = (1 - \rho - \varepsilon/\delta)s_k$. 为了分析方便, 本文考虑幂次为0.5的情形.

引入的变量 d_k 是为了抑制 g_k 的周期成分, 其定义如下:

$$d_k = \mathbf{c}^T \mathbf{b}(g_k - g_{k-N}). \quad (7)$$

令 d_u, d_l 分别为 d_k 的上、下限, 则

$$d_l \leq d_k \leq d_u.$$

记 $\bar{d} = \frac{d_u + d_l}{2}$, $\Delta = \frac{d_u - d_l}{2}$, 可得

$$|d_k - \bar{d}| \leq \Delta. \quad (8)$$

考虑 s_{k+1} 与 s_k 的差:

$$\begin{aligned} s_{k+1} - s_k &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{c}^T \mathbf{x}_{k+1-N} = \\ &= \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{c}^T \mathbf{b}(u_k + g_k) - \\ &= \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_{k-N} - \mathbf{c}^T \mathbf{b}(u_{k-N} + g_{k-N}) = \\ &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-N}) + d_k + \\ &= \mathbf{c}^T \mathbf{b}(u_k - u_{k-N}). \end{aligned}$$

结合式(6), 可得

$$u_k = u_{k-N} + (\mathbf{c}^T \mathbf{b})^{-1} [-\mathbf{c}^T \mathbf{A}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-N}) - s_{k+1-N} + (1 - \rho)s_k - \varepsilon |s_k|^{\frac{1}{2}} \text{sat}(\frac{|s_k|^{\frac{1}{2}} \text{sgn } s_k}{\delta}) - \bar{d}], \quad (9)$$

此即为离散滑模重复控制器. 这里, d_k^* 简单地取为 d_k 的平均值 \bar{d} .

在实现时, 重复控制算法按照控制器表达式(9)进行编程. 控制器中的参数 $\rho, \varepsilon, \delta$ 可依据关于收敛性能的要求进行整定.

3.2 收敛性能(Convergence performance)

为了刻画系统收敛性能, 首先引入下述定义:

1) 单调收敛层边界 Δ_{MDR} 满足

$$0 < s_{k+1} \leq s_k \text{ 或 } s_k \leq s_{k+1} < 0, \text{ 当 } |s_k| > \Delta_{\text{MDR}};$$

2) 绝对收敛层边界 $\Delta_{\text{A}^2\text{L}}$ 满足

$$|s_{k+1}| \leq |s_k|, \text{ 当 } |s_k| > \Delta_{\text{A}^2\text{L}};$$

3) 准滑模带边界 Δ_{QSM} 满足

$$|s_{k+1}| \leq \Delta_{\text{QSM}}, \text{ 当 } |s_k| \leq \Delta_{\text{QSM}}.$$

在离散滑模重复控制器(9)作用下, 系统(3)的单调收敛层边界 Δ_{MDR} 、绝对收敛层边界 $\Delta_{\text{A}^2\text{L}}$ 与准滑模带边界 Δ_{QSM} 分别为

$$\Delta_{\text{MDR}} = \begin{cases} (\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\Delta(1-\rho)}}{2(1-\rho)})^2, \\ \delta(1-\rho) > \varepsilon \geq \\ \max\{\frac{\delta^2(1-\rho) - \Delta}{\delta}, \frac{\sqrt{\Delta}(1-2\rho)}{\sqrt{2}}\}, \\ \max\{\frac{\Delta}{1-\rho-\frac{\varepsilon}{\delta}}, \frac{\Delta}{\rho+\frac{\varepsilon}{\delta}}\}, \\ \frac{\Delta}{\delta} - \rho\delta \leq \varepsilon < \frac{\delta^2(1-\rho) - \Delta}{\delta}, \\ (\frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\rho\Delta}}{2\rho})^2, \\ 0 < \varepsilon < \min\{\frac{\Delta}{\delta} - \rho\delta, \frac{\sqrt{\Delta}(1-2\rho)}{\sqrt{2}}\}. \end{cases} \quad (10)$$

以及

$$\Delta_{\text{A}^2\text{L}} = \Delta_{\text{QSM}} = \begin{cases} \frac{\Delta}{\rho + \frac{\varepsilon}{\delta}}, & \varepsilon \geq \frac{\Delta}{\delta} - \rho\delta, \\ (\frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\rho\Delta}}{2\rho})^2, & \varepsilon < \frac{\Delta}{\delta} - \rho\delta. \end{cases} \quad (11)$$

系统边界 $\Delta_{\text{MDR}}, \Delta_{\text{A}^2\text{L}}, \Delta_{\text{QSM}}$ 三者的证明过程类似, 下文只证明单调收敛层边界 Δ_{MDR} .

1) 考虑 $\Delta_{\text{MDR}} \geq \delta^2$ 情况.

当 $s_k > \Delta_{\text{MDR}}$ 时, 式(6)转化为

$$0 \leq (1 - \rho)s_k - \varepsilon(s_k)^{\frac{1}{2}} + d_k - d_k^* \leq s_k. \quad (12)$$

结合式(8), 可得

$$\begin{cases} (1 - \rho)s_k - \varepsilon(s_k)^{\frac{1}{2}} + \Delta \leq s_k, \\ (1 - \rho)s_k - \varepsilon(s_k)^{\frac{1}{2}} - \Delta \geq 0. \end{cases} \quad (13)$$

解式(11)得

$$s_k \geq \max\left\{ \left(\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\Delta(1-\rho)}}{2(1-\rho)}\right)^2, \left(\frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\rho\Delta}}{2\rho}\right)^2 \right\}. \quad (14)$$

同理可得, 当 $s_k < -\Delta_{\text{MDR}}$ 时,

$$s_k \leq \min\left\{ -\left(\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\Delta(1-\rho)}}{2(1-\rho)}\right)^2, -\left(\frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\rho\Delta}}{2\rho}\right)^2 \right\}. \quad (15)$$

因此, 单调收敛层边界 Δ_{MDR} 为

$$\Delta_{\text{MDR}} = \max\left\{ \left(\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\Delta(1-\rho)}}{2(1-\rho)}\right)^2, \left(\frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\rho\Delta}}{2\rho}\right)^2 \right\} \geq \delta^2. \quad (16)$$

2) 考虑 $\Delta_{\text{MDR}} < \delta^2$ 的情况.

当 $s_k > \delta^2$ 时, 式(6)转化为

$$0 \leq (1 - \rho)s_k - \varepsilon(s_k)^{\frac{1}{2}} + d_k - d_k^* \leq s_k. \quad (17)$$

不等式(17)成立的条件为满足式(14). 若取单调收敛层边界 Δ_{MDR} 为

$$\Delta_{\text{MDR}} = \max\left\{ \left(\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\Delta(1-\rho)}}{2(1-\rho)}\right)^2, \left(\frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\rho\Delta}}{2\rho}\right)^2 \right\} < \delta^2. \quad (18)$$

因为 $s_k > \delta^2 > \Delta_{\text{MDR}}$, 所以不等式(17)恒成立, 即无解. 同理, 当 $s_k < -\delta^2$ 时, Δ_{MDR} 亦无解.

当 $\Delta_{\text{MDR}} < s_k \leq \delta^2$ 时, 式(6)转化为

$$0 \leq (1 - \rho - \frac{\varepsilon}{\delta})s_k + d_k - d_k^* \leq s_k. \quad (19)$$

结合式(8), 可得

$$\begin{cases} (1 - \rho - \frac{\varepsilon}{\delta})s_k + \Delta \leq s_k, \\ (1 - \rho - \frac{\varepsilon}{\delta})s_k - \Delta \geq 0, \end{cases} \quad (20)$$

解得

$$s_k \geq \max\left\{ \frac{\Delta}{\rho + \frac{\varepsilon}{\delta}}, \frac{\Delta}{1 - \rho - \frac{\varepsilon}{\delta}} \right\}. \quad (21)$$

同理, 当 $-\delta^2 \leq s_k < -\Delta_{\text{MDR}}$ 时,

$$s_k \leq \min\left\{-\frac{\Delta}{\rho + \frac{\varepsilon}{\delta}}, -\frac{\Delta}{1 - \rho - \frac{\varepsilon}{\delta}}\right\}, \quad (22)$$

所以, 单调收敛层边界 Δ_{MDR} 为

$$\Delta_{\text{MDR}} = \max\left\{\frac{\Delta}{\rho + \frac{\varepsilon}{\delta}}, \frac{\Delta}{1 - \rho - \frac{\varepsilon}{\delta}}\right\} < \delta^2. \quad (23)$$

结合式(16)和式(23), 可知单调收敛层边界 Δ_{MDR} 的具体数值取决于下述不等式成立与否:

$$\max\left\{\left(\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\Delta(1-\rho)}}{2(1-\rho)}\right)^2, \left(\frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\rho\Delta}}{2\rho}\right)^2\right\} \geq \delta^2. \quad (24)$$

a) 若不等式条件(24)成立, 则

$$\Delta_{\text{MDR}} = \max\left\{\left(\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\Delta(1-\rho)}}{2(1-\rho)}\right)^2, \left(\frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\rho\Delta}}{2\rho}\right)^2\right\} \geq \delta^2. \quad (25)$$

b) 若不等式条件(24)不成立, 则

$$\Delta_{\text{MDR}} = \max\left\{\frac{\Delta}{\rho + \frac{\varepsilon}{\delta}}, \frac{\Delta}{1 - \rho - \frac{\varepsilon}{\delta}}\right\}. \quad (26)$$

容易看出, 不等式(18)(23)成立的条件是等价的. 单调收敛层边界 Δ_{MDR} 的具体形式取决于控制器参数 $\varepsilon, \rho, \delta$ 与扰动界值 Δ 的关系: 1) 当 $\delta > \sqrt{2\Delta}$ 时, Δ_{MDR} 取值情况如图1(a)所示; 2) 当 $\delta \leq \sqrt{2\Delta}$ 时, Δ_{MDR} 取值情况如图1(b)所示. 在图1(b)中, 虚线①②③分别表示 $\delta(1-\rho)$ 三种不同的取值区间:

1) 当 $0 < \delta \leq \sqrt{\Delta(1-2\rho)}/(\sqrt{2}(1-\rho))$ 时,

$$\frac{\delta^2(1-\rho) - \Delta}{\delta} < \delta(1-\rho) \leq \frac{\sqrt{\Delta(1-2\rho)}}{\sqrt{2}};$$

2) 当 $\sqrt{\Delta(1-2\rho)}/(\sqrt{2}(1-\rho)) < \delta \leq \sqrt{\Delta}$ 时,

$$\frac{\sqrt{\Delta(1-2\rho)}}{\sqrt{2}} < \delta(1-\rho) \leq \frac{\Delta}{\delta} - \rho\delta;$$

3) 当 $\sqrt{2\Delta} \geq \delta > \sqrt{\Delta}$ 时,

$$\frac{\Delta}{\delta} - \rho\delta < \delta(1-\rho).$$

本文给出了所提出的理想误差动态的单调收敛层、绝对收敛层、准滑模带的边界表达式, 并特别推导了系统单调收敛层边界 Δ_{MDR} . 一方面, 这些边界表达式可用于刻画闭环系统的收敛过程; 另一方面, 按照对收敛过程的要求, 人们也可依据这些边界表达式进行控制器参数 $\rho, \varepsilon, \delta$ 的整定. 从这些表达式可以看出, 这些控制器参数的调整方向及数值对收敛性能的影响是明确的.

图 1(a) 当 $\delta > \sqrt{2\Delta}$ 时, Δ_{MDR} 的取值

Fig. 1(a) The layer of Δ_{MDR} as $\delta > \sqrt{2\Delta}$

图 1(b) 当 $\delta \leq \sqrt{2\Delta}$ 时, Δ_{MDR} 的取值

Fig. 1(b) The layer of Δ_{MDR} as $\delta \leq \sqrt{2\Delta}$

由 d_k 的定义可以看出, 干扰中的周期成分是可以被完全消除的; Δ_{QSM} 表示非周期成分的抑制性能水平. 由表达式(11)知, 这个界的大小取决于参数 $\rho, \delta, \varepsilon$ 的取值.

另外, 为了验证这些界表达式, 在仿真与实验一节中, 对多种情形进行了仿真, 给出了较为详实的验证结果. 这也为控制器设计提供了示例, 即通过仿真途径验证控制器性能.

4 定位控制(Positioning control)

上节所述的离散滑模重复控制方法同样也适用于常值扰动情形下的定位控制. 这时, 考虑 g_k 主要成分为常值, 而常值信号可以看作是周期为 1 的周期信号. 这样, 为了抑制常值干扰, 本文将重复控制器(9)修改为

$$u_k = u_{k-1} - (\mathbf{c}^T \mathbf{b})^{-1} [\mathbf{c}^T \mathbf{A} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) + \rho s_k + \varepsilon |s_k|^{\frac{1}{2}} \text{sat}\left(\frac{|s_k|^{\frac{1}{2}} \text{sgn } s_k}{\delta}\right) + \bar{d}]. \quad (27)$$

由式(27)易知, 该控制器实际上是重复控制器(9) 置 $N = 1$ 时的特例.

5 仿真与实验(Simulation and experiment)

为了验证所设计重复控制器的有效性, 本文针对一直线伺服系统分别进行数值仿真和实验. 该系统采用 DSP2812 开发板与 Bassoon 驱动器实现给定的交流永磁同步直线电机(U型永磁无铁芯平板直线电机)的控制, 电机有效行程为 370 mm, 位置传感器采用分辨率为 $5 \mu\text{m}$ 的 Reinshaw 光栅尺(如图2所示). 为了使得控制方法验证变得单一, 本文将速度环、电流环以及电机本体看作伺服对象. Bassoon 驱动器除了实现电机驱动外, 还承担速度环、电流环控制, 两控制器均采用 PI 控制, 参数设置由 Bassoon 驱动器自身完成; DSP 处理器实现位置环控制, 采用本文设计的控制算法; 其编程由 PC 上位机完成, 然后传给 DSP 开发板. 采样周期取为 $T_s = 10 \text{ ms}$.



图2 永磁同步直线电机伺服系统

Fig. 2 Permanent magnet synchronous linear motor servo system

通过实验, 本文获得的伺服对象数学模型如下:

$$y_{k+1} = 0.8699y_k + 0.1301y_{k-1} + 0.5099v_k^* + 0.1952v_{k-1}^* + g_k', \quad (28)$$

其中: y_k 为位移输出信号, v_k^* 为速度环参考给定信号, g_k' 表示建模误差及外部干扰.

给定位置环参考信号为 r_k , 将跟踪误差记为 $e_k = r_k - y_k$, 定义状态为 $\mathbf{x}_k = [e_{k-1} \ e_k]^T$, 可写出伺服对象的状态空间表达式

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.1301 & 0.8699 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5099 \end{bmatrix} (u_k + g_k), \quad (29)$$

式中: 控制输入 $u_k = v_k^* - 1.9612(r_{k+1} - 0.8699r_k - 0.1301r_{k-1} - 0.1952v_{k-1}^*)$, 扰动变量 $g_k = 1.9612g_k'$.

5.1 仿真结果(Simulation results)

在仿真中, 本文置 $\mathbf{c}^T = [-0.5 \ 1]$, 取给定位置参考信号为 $r_k = 50\sin(2k\pi/N)$ mm, 其中 $N = 400$. 扰动 v_k 包含周期与非周期两部分, 其非周期性部分通常含有量测噪声信号, 但为了验证本文推导的收敛层边界的准确性, 选取特殊的矩形波信号来模拟干扰的非周期性部分. 取周期部分为正弦信号 $4\sin(2k\pi/N)$; 而非周期部分为幅值0.4、周期150的矩形波信号. 此时, 扰动的界值 $\Delta = 0.4$.

本文针对下述3种参数设置进行仿真.

情形1 当

$$\sqrt{\Delta} < \delta \leq \sqrt{2\Delta}, \quad 0 < \varepsilon \leq \sqrt{\Delta}(1-2\rho)/\sqrt{2}$$

时, 单调收敛层边界 Δ_{MDR} 、绝对收敛层边界 $\Delta_{\text{A}^2\text{L}}$ 及准滑模带边界 Δ_{QSM} 均为

$$[(-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\rho\Delta})/(2\rho)]^2.$$

控制器参数分别置为 $\rho = 0.3$, $\delta = 0.8$, $\varepsilon = 0.17$, 此时 $\Delta_{\text{MDR}} = \Delta_{\text{A}^2\text{L}} = \Delta_{\text{QSM}} = 0.8201$, 仿真结果见图3. 在第1个周期中, 重复控制不起作用, 故图中

s_k 远离边界层. 图4及图5亦是如此.

情形2 当

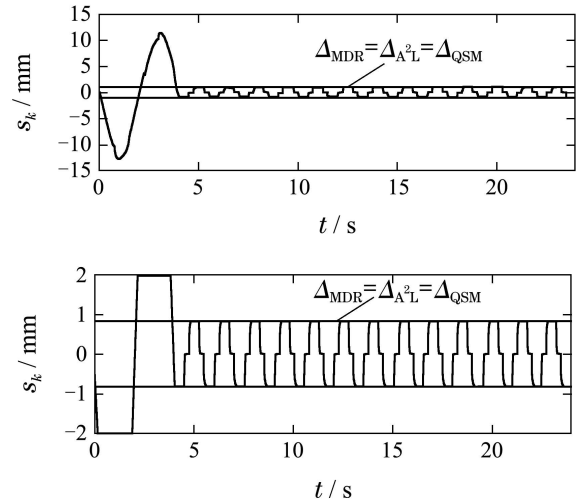
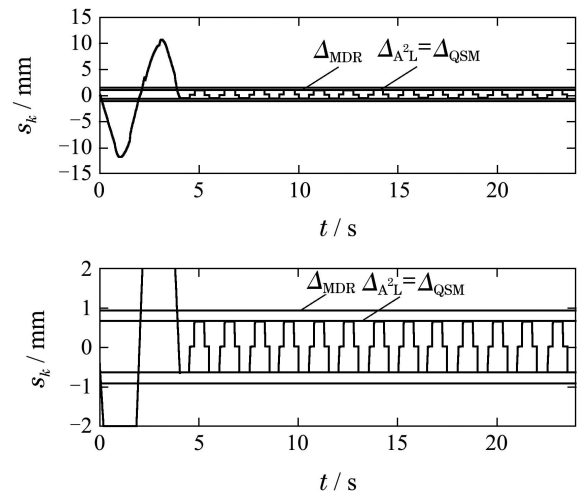
$$\sqrt{\Delta} < \delta \leq \sqrt{2\Delta}, \quad \sqrt{\Delta}(1-2\rho)/\sqrt{2} < \varepsilon \leq \Delta/\delta - \rho\delta$$

时, 绝对收敛层边界 $\Delta_{\text{A}^2\text{L}}$ 与准滑模带边界 Δ_{QSM} 均为 $[(-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\rho\Delta})/(2\rho)]^2$, 单调收敛层边界 Δ_{MDR} 为 $[(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\Delta(1-\rho)})/(2(1-\rho))]^2$. 控制器参数分别置为 $\rho = 0.3$, $\delta = 0.8$, $\varepsilon = 0.25$, 此时 $\Delta_{\text{MDR}} = 0.9126$, $\Delta_{\text{A}^2\text{L}} = \Delta_{\text{QSM}} = 0.6576$, 仿真结果见图4.

情形3 当

$$\sqrt{\Delta} < \delta \leq \sqrt{2\Delta}, \quad \Delta/\delta - \rho\delta < \varepsilon < \delta(1-\rho)$$

时, 绝对收敛层边界 $\Delta_{\text{A}^2\text{L}}$ 与准滑模带边界 Δ_{QSM} 均为 $\Delta/(\rho + \varepsilon/\delta)$, 单调收敛层边界 Δ_{MDR} 则为 $[(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\Delta(1-\rho)})/(2(1-\rho))]^2$. 控制器参数分别置为 $\rho = 0.3$, $\delta = 0.8$, $\varepsilon = 0.27$, 此时 $\Delta_{\text{MDR}} = 0.9467$, $\Delta_{\text{A}^2\text{L}} = \Delta_{\text{QSM}} = 0.6275$, 仿真结果见图5.

图3 当 $0 < \varepsilon \leq \sqrt{\Delta}(1-2\rho)/\sqrt{2}$ 时的 s -轨迹Fig. 3 The s -dynamic as $0 < \varepsilon \leq \sqrt{\Delta}(1-2\rho)/\sqrt{2}$ 图4 当 $\sqrt{\Delta}(1-2\rho)/\sqrt{2} < \varepsilon \leq \Delta/\delta - \rho\delta$ 时的 s -轨迹Fig. 4 The s -dynamic as $\sqrt{\Delta}(1-2\rho)/\sqrt{2} < \varepsilon \leq \Delta/\delta - \rho\delta$

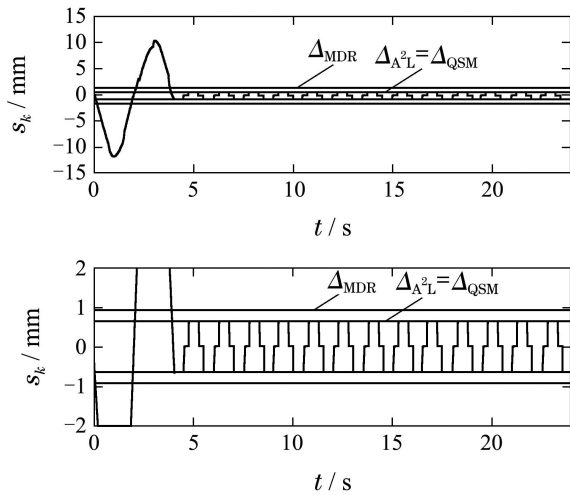


图 5 当 $\Delta/\delta - \rho\delta < \varepsilon \leq \delta(1 - \rho)$ 时的 s -轨迹
 Fig. 5 The s -dynamic as $\Delta/\delta - \rho\delta < \varepsilon \leq \delta(1 - \rho)$

5.2 实验结果(Experimental results)

在实验中, 控制器参数被设置为 $\rho = 0.3$, $\delta = 0.8$, $\varepsilon = 0.48$, 且针对下述3种情形进行。

情形 1 位置参考信号 r_k 为正弦信号(具体表达式同5.1节), 采用控制器(27), 实验结果见图6. 跟踪误差 e_k 在一个采样周期 ($T_s = 10$ ms) 之后收敛进入 $|s_k| \leq 20 \mu\text{m}$ 的范围内(见图6中直方图, counts 为直方图中的累计量), 但呈现明显的周期性(周期与给定信号 r_k 相同).

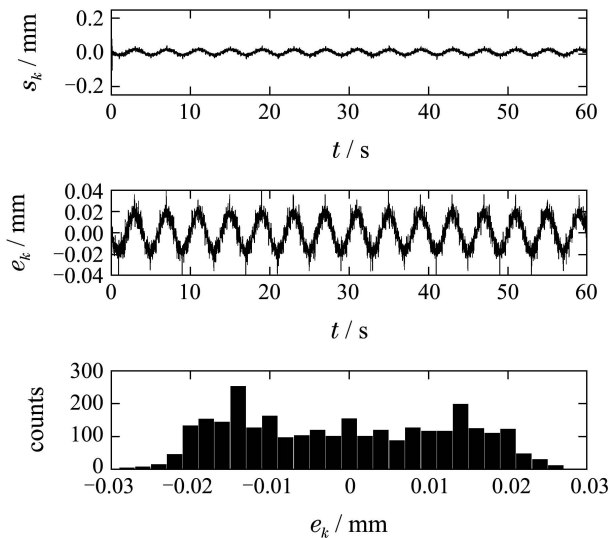


图 6 采用控制器(27)时的跟踪性能
 Fig. 6 Tracking performance by controller (27)

情形 2 位置参考信号 r_k 为正弦信号(同上), 采用控制器(9), 实验结果见图7. 跟踪误差 e_k 在一个信号周期 ($T = 4$ s) 之后收敛进入 $|s_k| \leq 10 \mu\text{m}$ 的范围内(见图7中直方图). 实验结果表明, 控制器可有效抑制周期性干扰, 进一步改善控制精度.

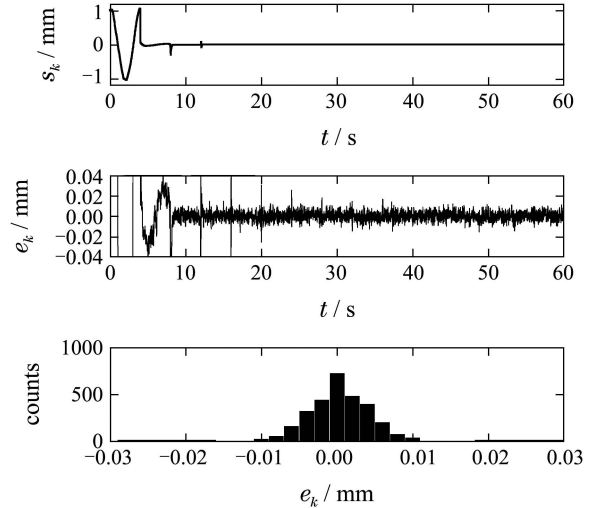


图 7 采用控制器(9)时的跟踪性能
 Fig. 7 Tracking performance by controller (9)

情形 3 位置参考信号 r_k 设置为

$$r_k = \begin{cases} 0, & 0 < kT_s \leq 1, \\ 80(3(kT_s - 1)^2 - 2(kT_s - 1)^3), & 1 < kT_s \leq 2, \\ 80, & kT_s > 2. \end{cases}$$

采用控制器(27), 实验结果见图8. 位置输出快速跟踪上期望给定, 且无超调; 系统的定位误差 $|e_k| \leq 5 \mu\text{m}$, 即光栅尺的分辨率.

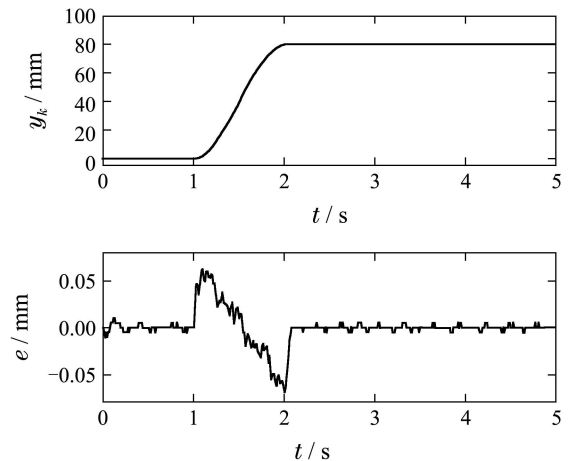


图 8 采用控制器(27)时的定位控制性能
 Fig. 8 Positioning performance by controller (27)

6 结论(Conclusions)

本文构造了一种具有幂次趋近的理想切换动态, 并依据理想误差动态设计离散变结构重复控制器. 文中推导出能够刻画闭环系统收敛性能的准滑模带、单调收敛层和绝对收敛层边界的表达式. 这一控制方法也适用于常值扰动情形下的定位控制. 数值仿真及实验结果表明, 所提出的控制方法对周期性干扰可实现完全抑制, 从而进一步提高控制精度.

参考文献(References):

- [1] UTKIN V I. Variable structure systems with sliding modes [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, 22(2): 212 – 222.
- [2] 高为炳, 程勉. 变结构控制系统的品质控制 [J]. 控制与决策, 1989, 4(4): 1 – 6.
(GAO Weibing, CHENG Mian. Quality control of variable structure control systems [J]. *Control and Decision*, 1989, 4(4): 1 – 6.)
- [3] GAO W B, WANG Y, HOMAIFA A. Discrete-time variable structure control systems [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1995, 42(2): 117 – 122.
- [4] BARTOSZEWICZ A. Remarks on 'discrete-time variable structure control systems' [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1998, 43(1): 235 – 238.
- [5] 翟长连, 吴智铭. 不确定离散时间系统的变结构控制设计 [J]. 自动化学报, 2000, 26(2): 184 – 191.
(ZHAI Changlian, WU Zhiming. Variable structure control design for uncertain discrete time systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2000, 26(2): 184 – 191.)
- [6] EUN Y, KIM J, KIM K, et al. Discrete-time variable structure controller with a decoupled disturbance compensator and its application to a CNC servomechanism [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1999, 7(4): 414 – 423.
- [7] 于双和, 强文义, 傅佩琛. 无抖振离散准滑模控制 [J]. 控制与决策, 2001, 16(3): 380 – 382.
(YU Shuanghe, QIANG Wenyi, FU Peichen. Chattering-free discrete quasi-sliding mode controller [J]. *Control and Decision*, 2001, 16(3): 380 – 382.)
- [8] 宋立忠, 陈少昌, 姚琼荟. 不确定系统离散变结构控制及在位置伺服系统中的应用 [J]. 控制理论与应用, 2003, 20(6): 959 – 962.
(SONG Lizhong, CHEN Shaoshang, YAO Qionghui. Discrete variable structure control for uncertain systems and its application to position servo system [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(6): 959 – 962.)
- [9] 宋立忠, 李槐树, 姚琼荟. 基于趋近律方法的离散时间系统变结构控制 [J]. 控制理论与应用, 2008, 25(3): 525 – 528.
(SONG Lizhong, LI Huaishu, YAO Qionghui. Discrete-time variable-structure control based on reaching-law approach [J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(3): 525 – 528.)
- [10] 任启峰, 高存臣, 王品. 基于衰减控制的离散时间系统的变结构控制 [J]. 系统仿真学报, 2008, 20(4): 1056 – 1059.
(REN Qifeng, GAO Cunchen, WANG Pin. Variable structure control for discrete time systems based on attenuating control [J]. *Journal of System Simulation*, 2008, 20(4): 1056 – 1059.)
- [11] 米阳, 李文林, 井元伟. 基于幂次趋近律的一类离散时间系统的变结构控制 [J]. 控制与决策, 2008, 23(6): 643 – 646.
(MI Yang, LI Wenlin, JING Yuanwei. Variable structure control for a class of discrete-time system based on power reaching law [J]. *Control and Decision*, 2008, 23(6): 643 – 646.)
- [12] 孙彪, 孙秀霞, 陈琳, 等. 基于幂次函数的离散滑模控制算法 [J]. 控制与决策, 2011, 26(2): 285 – 288.
(SUN Biao, SUN Xiuxia, CHEN Lin, et al. Algorithm of discrete-time sliding mode control based on power-function [J]. *Control and Decision*, 2011, 26(2): 285 – 288.)
- [13] 李鹏, 马建军, 郑志强. 采用幂次趋近律的滑模控制稳态误差界 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(5): 619 – 624.
(LI Peng, MA Jianjun, ZHENG Zhiqiang. Sliding mode control approach based on nonlinear integrator [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(5): 619 – 624.)
- [14] TOMIZUKA M, TSAO T, CHEW K. Analysis and synthesis of discrete-time repetitive controllers [J]. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1989, 111(3): 353 – 358.
- [15] SUN M X, WANG Y Y, WANG D W. Variable structure repetitive control: a discrete-time Strategy [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2005, 52(2): 610 – 616.
- [16] SUN M X, XIE H Y, WANG H. Switching-function dynamics designs for uncertain variable structure systems with repetitive controllers [J]. *International Journal of Control*, 2011, 84(7): 1196 – 1208.
- [17] 孙明轩, 范伟云, 王辉. 用于离散滑模重复控制的新型趋近律 [J]. 自动化学报, 2011, 37(10): 1213 – 1221.
(SUN Mingxuan, FAN Weiyun, WANG Hui. Discrete sliding mode repetitive control with novel reaching law [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2011, 37(10): 1213 – 1221.)

作者简介:

孙明轩 (1961–), 男, 教授, 研究领域为学习辨识与控制, E-mail:

mxsun@zjut.edu.cn;

王辉 (1985–), 男, 硕士研究生, 研究方向为重复控制, E-mail:

zjttwh@126.com;

范伟云 (1985–), 男, 硕士研究生, 研究方向为重复控制, E-mail:

fan-weiyun@126.com.