

# 基于多输入时滞脉冲模型的采样数据控制系统的随机镇定

唐 斌, 曾启杰, 章 云

(广东工业大学 自动化学院, 广东 广州 510006)

**摘要:** 针对具有非均匀采样的采样数据控制系统, 把区间内连续分布的采样间隔序列描述为多元独立同分布随机过程, 把闭环系统转化为多输入时滞脉冲模型, 通过构造合适的非连续Lyapunov泛函, 以及合理地利用在所有采样间隔内输入时滞的时间导数等于1的条件, 结合自由权矩阵方法推导了基于LMIs的全局均方渐近稳定性条件, 在此基础上运用调节因子法和锥补线性化方法, 把控制器设计转化为具有LMI约束的非线性优化问题, 并给出了基于LMIs的迭代求解算法. 数值实例和实验表明了所得理论结果的优越性和有效性.

**关键词:** 采样数据控制系统; 多元独立同分布过程; 多输入时滞脉冲模型; 随机镇定

**中图分类号:** TP273 **文献标识码:** A

## Stochastic stabilization of sampled-data control systems based on impulsive model with multiple input delays

TANG Bin, ZENG Qi-jie, ZHANG Yun

(Faculty of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou Guangdong 510006, China)

**Abstract:** For a sampled-data control system with nonuniform sampling, the sampling interval sequence, which is distributed in an interval, is described as a multiple independent identically distributed process. The closed-loop system is transformed into an impulsive model with multiple input delays. By creating an appropriate discontinuous Lyapunov functional and rationally exploiting the condition that the derivative of input delay equals 1 in all sampling intervals, we derive a LMIs-based global mean-square asymptotical stability criterion based on free weight matrix approach. By using regulatory factor technique and cone-complementary linearization method, we transform the controller design method to a nonlinear optimization problem with LMI constraints, and an LMI-based iterative solution algorithm is given. Numerical examples and experimental results demonstrate the advantages and effectiveness of our theoretic results.

**Key words:** sampled-data control systems; multiple independent identically distributed process; multiple input delay impulsive model; stochastic stabilization

### 1 引言(Introduction)

近年采样数据控制系统(sampled-data control systems, SDCSs)受到越来越多的关注, 所得理论结果往往与实际存在一定的差距, 这种保守性的存在一方面源于闭环系统建模忽略了部分动态特性, 另一方面源于所构造的Lyapunov泛函难以充分表征系统的动态行为, 及未能有效地界定Lyapunov泛函的导数. 因而, 如何尽可能地减小保守性以及提高通用性是SDCS理论研究的关注焦点. 对于线性受控对象, 目前主要采用3种方法考虑SDCS分析与设计: 第1种方法把SDCSs描述为离散时间模型, 如文献[1]考虑了定常采样的情况, 文献[2-3]考虑了变采样的情况, 在此基础上文献[4-6]对于变采样的情况, 采用区间分割技巧减小了已有结果的保守性, 而文献[7]进一步考虑了Markovian随机跳变采样的情况; 第2种方法把SDCSs转化为具有

输入时滞的连续系统, 采用Lyapunov-Krasovskii泛函<sup>[8-12]</sup>、Razumikhin函数<sup>[13]</sup>或小增益定理<sup>[14-15]</sup>获得稳定性充分条件. 为了减小以往结果的保守性, 文献[9]在Lyapunov-Krasovskii泛函导数的界定中引入了自由权矩阵方法, 文献[10-12]考虑到输入时滞的自然分段特性采用了积分分割技巧, 文献[15]采用小增益定理, 更充分地挖掘了算子的无源性和增益条件. 然而, 该方法一般都没有很好地利用零界保持时滞的导数为1的信息, 因而仍存在一定的保守性; 第3种方法把SDCSs描述为具有输入时滞的脉冲系统. 文献[16]假定对象输出的定常采样间隔是控制器输出的倍数, 提出了时变周期性Lyapunov泛函, 文献[17-19]通过考虑控制输入时滞的导数信息, 分别构造了非连续Lyapunov泛函和时间依赖的Lyapunov泛函, 有效地利用了零阶保持时滞相对于一般的快变时滞和可微时滞所具有的特殊性, 获得

了相对更优的结果. 然而, 以上研究大多采用鲁棒性方法处理非均匀采样过程, 获得闭环稳定性与采样间隔上界之间的数量关系, 较少考虑非均匀采样过程的随机分布特性, 因而存在较难忽略的保守性. 文献[20–21]以网络化系统为应用背景, 假定离散网络时延为伯努利二元随机过程, 分别考虑了 $H_\infty$ 滤波系统和输出反馈控制系统的分析与设计, 获得了系统稳定性与网络时延分布特性之间的定量关系, 为研究随机稳定性与非均匀采样过程之间的关系提供了有益的参考.

本文针对具有非均匀采样的SDCSs, 研究非均匀采样的随机特性与闭环均方渐近镇定性之间的关系, 假设区间内连续分布的采样间隔序列描述为多元独立同分布(i.i.d.)随机过程, 把闭环SDCSs转化为多输入时滞脉冲模型, 注意到在每一个采样间隔内输入时滞的时间导数为1, 基于合适的非连续Lyapunov泛函, 获得基于LMIs的全局均方渐近稳定性条件及基于非线性优化问题的镇定设计方法, 最后通过数值实例验证了理论结果的有效性和优越性, 并通过实验进一步验证了结果的有效性. 与文献[18]的不同点在于, 本文考虑非均匀采样过程的随机分布特性, 结合基于牛顿–莱布尼茨公式的自由权矩阵恒等式, 研究闭环系统的随机稳定性判据和镇定设计方法; 而文献[18]研究有界时变采样与闭环稳定性之间的关系, 同时未考虑闭环系统的镇定设计.

## 2 问题描述(Problem formulation)

考虑如下的线性系统:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

其中:  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  为状态向量和控制输入向量,  $A$ 和 $B$ 是适当维数的常数矩阵.

**假设 1** 控制输入由零阶保持函数产生, 且该函数具有一个更新时间序列 $\{t_k | 0 \leq t_{k-1} < t_k, k \in \mathbb{N}\}$ , 其中 $k$ 为更新次数,  $t_0$ 表示系统的初始时刻.

**假设 2** 控制器执行如下形式的一个无记忆状态反馈控制律:

$$u_c(t) = Kx(t), \quad (2)$$

其中 $K$ 为控制器增益.

由假设1可知 $u(t) = u_c(t_k)$ , 其中:  $t_k \leq t < t_{k+1}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ ,  $u_c(t_k)$ 表示在 $t_k$ 时刻控制器的输出. 结合假设1–2, 则闭环系统可描述为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (3)$$

其中 $A_1 = BK$ .

对于 $t \in [t_k, t_{k+1})$ , 定义输入时滞 $\eta(t) = t - t_k$ , 可知 $\dot{\eta}(t) = 1$ ; 定义采样间隔 $\eta_k = t_{k+1} - t_k$ . 为了考虑非均匀采样的随机特性与闭环稳定性之间的关系, 作如下两个假设:

**假设 3** 存在一个标量 $\bar{\eta} > 0$ 使得

$$\eta_k < \bar{\eta}, \quad \forall k. \quad (4)$$

**假设 4** 区间 $[0, \bar{\eta})$ 由前后衔接的 $m$ 个子区间 $[\bar{\eta}_{i-1}, \bar{\eta}_i)$ 组成, 其中:  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $\bar{\eta}_0 = 0$ ,  $\bar{\eta}_m = \bar{\eta}$ ; 采样间隔 $\eta_k$ 在每个子区间 $[\bar{\eta}_{i-1}, \bar{\eta}_i)$ 的分布概率 $P\{\eta_k \in [\bar{\eta}_{i-1}, \bar{\eta}_i) = \gamma_i$ 是已知的, 且满足 $\sum_{i=1}^m \gamma_i = 1$ .

定义分段右连续指示器函数

$$\pi_i(t) = \begin{cases} 1, & \eta_k \in [\bar{\eta}_{i-1}, \bar{\eta}_i), \\ 0, & \eta_k \notin [\bar{\eta}_{i-1}, \bar{\eta}_i), \end{cases} \quad t \in [t_k, t_{k+1}),$$

则有

$$E\{\pi_i(t)\} = P\{\eta_k \in [\bar{\eta}_{i-1}, \bar{\eta}_i)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_1}^t \pi_i(s) ds = \gamma_i.$$

基于以上假设和指示器函数, 闭环系统(3)可改写为如下多输入时滞脉冲模型:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^m \pi_i(t) BKx(t - h_i(t)), \quad (5)$$

其中 $h_i(t)$ 表示输入时滞 $\eta(t)$ 的相应采样间隔 $\eta_k \in [\bar{\eta}_{i-1}, \bar{\eta}_i)$ . 由此, 输入时滞 $\eta(t)$ 转化为具有多元i.i.d.特性的随机变量, 即 $\eta(t) \in \{h_i(t), i = 1, 2, \dots, m\}$ ; 在每个采样间隔内, 闭环系统(3)对应着一个输入时滞脉冲子模型 $\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t - h_i(t))$ , 其触发取决于随机函数 $\pi_i(t)$ . 由模型(5)可知, 闭环系统(3)的随机镇定相当于在每一时刻 $t$ , 各控制输入 $Kx(t - h_i(t))$ 在一定的发生概率下以异步的形式互相叠加, 从而获得闭环随机稳定性.

为了叙述的方便, 模型(5)中各控制输入 $Kx(t - h_i(t))$ 的更新时间统一表示为 $t_{i_k, k}$ , 其中:  $k$ 表示各控制输入的异步更新总次数,  $i_k \in \{1, 2, \dots, m\}$ 表示第 $k$ 次被更新的相应控制输入量, 例如 $t_{2, k}$ 表示发生第 $k$ 次控制输入量更新为 $Kx(t - h_2(t))$ . 实际上 $t_{i_k, k}$ 不是确定的更新时间, 而是所有可能的异步更新方式下更新时刻的符号表示. 另外,  $\bar{h}_i(t) \in [\bar{\eta}_{i-1}, \bar{\eta}_i)$ 表示在当前时刻 $t$ 对应于输入时滞 $h_i(t)$ 的采样间隔, 因此 $\bar{h}_i$ 在控制输入 $Kx(t - h_i(t))$ 的更新间隔内是定值, 即对于 $t \neq t_{i, \cdot}$ ,  $\frac{d\bar{h}_i(t)}{dt} = 0$ .

在推导结果之前, 引入以下定义:

**定义 1**  $\varphi: [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是在区间 $[-\bar{\eta}, 0]$ 上绝对连续的函数, 存在一个有限的极限 $\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \varphi(\theta)$ , 且

具有平方可积的一阶导数.  $\Theta$  是函数  $\varphi$  的空间, 具有如下的范数:

$$\|\varphi\|_{\Theta} = \max_{\theta \in [-\bar{\eta}, 0]} |\varphi(\theta)| + \left[ \int_{-\bar{\eta}}^0 |\dot{\varphi}(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}},$$

并记  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ , 其中  $\theta \in [-\bar{\eta}, 0]$ .

**定义 2** 对任意标量  $\varepsilon > 0$ , 如果存在标量  $\delta(\varepsilon) > 0$ , 使得当  $E\{\|x_{t_1}\|_{\Theta}^2\} < \delta(\varepsilon)$  时有  $E\{\|x(t)\|^2\} < \varepsilon$ , 其中  $t > t_1$ , 则闭环系统(3)是均方稳定的. 且如果对于任何初始条件  $x_{t_1}$  均有  $\lim_{t \rightarrow \infty} E\{\|x(t)\|^2\} = 0$ , 则闭环系统(3)具有全局均方渐近稳定性(GMSAS).

**定义 3**

$$LV(t, x_t, \dot{x}_t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta} E[V(t + \Delta, x_{t+\Delta}, \dot{x}_{t+\Delta}) - V(t, x_t, \dot{x}_t) | X_t],$$

其中:  $E(\cdot)$  表示的期望值,  $X_t = \{x_t\}$ .

**3 主要结果(Main results)**

本节研究闭环系统(3)的GMSAS条件及其控制器设计方法. 首先对于多输入时滞脉冲模型(5), 不加证明地给出如下关于GMSAS的Lyapunov引理:

**引理 1** 假设存在泛函  $V: \mathbb{R} \times \Theta \times L_2[-\bar{\eta}, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  及常数  $c_1 > 0, c_2 > 0$ , 使得以下条件成立:

$$c_1 \|\varphi(0)\|^2 \leq V(t, \varphi, \dot{\varphi}) \leq c_2 \|\varphi\|_{\Theta}^2. \quad (6)$$

假设泛函  $\bar{V}(t) = V(t, x_t, \dot{x}_t)$  对于所有满足式(5)的  $x_t$  是右连续的, 对于  $t \neq t_{i_k, k}$  是绝对连续的, 且满足

$$\lim_{t \rightarrow t_{i_k, k}^-} \bar{V}(t) \geq \bar{V}(t_{i_k, k}).$$

如果存在常数  $c_3 > 0$ , 使得沿式(5)的轨线有

$$L\bar{V}(t) \leq -c_3 \|x_t(0)\|^2, \quad (7)$$

则式(5)具有GMSAS.

**证** 对于  $t \in [t_{i_k, k}, t_{i_{k+1}, k+1})$ , 由式(6)-(7)可得

$$\begin{aligned} E\{c_1 \|x(t)\|^2\} &\leq E\{\bar{V}(t)\} = \\ E\{\bar{V}(t_{i_k, k})\} &- \int_{t_{i_k, k}}^t c_3 \|x(s)\|^2 ds < \\ E\{\bar{V}(t_{i_k, k})\} &\leq E\{\bar{V}(t_{i_k, k}^-)\} < \\ E\{\bar{V}(t_{i_{k-1}, k-1})\} &\leq \dots < E\{\bar{V}(t_{i_1, 1})\} = \\ E\{\bar{V}(t_1)\} &\leq E\{c_2 \|x_{t_1}\|_{\Theta}^2\}. \end{aligned}$$

由此可知, 对于任意的标量  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta(\varepsilon) = \sqrt{c_1/c_2} \times \varepsilon$ , 如果存在  $E\{\|x_{t_1}\|_{\Theta}^2\} < \delta^2(\varepsilon)$ , 则  $E\{\|x(t)\|^2\} < \varepsilon$ . 因此式(5)是全局(一致)均方稳定的.

由于  $\bar{V}(t)$  具有为零的下确界以及式(7), 可得  $\lim_{t \rightarrow \infty} E\{\bar{V}(t)\} = \bar{V}_{\inf}$  必定存在. 因此, 对于  $t \neq t_{i_k, k}^-$  有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L\bar{V}(t) = \bar{V}_{\inf} - \bar{V}_{\inf} = 0.$$

由于

$$0 \leq c_3 \|x_t(0)\|^2 \leq -L\bar{V}(t),$$

可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_3 \|x(t)\|^2 = 0,$$

进而有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\{\|x(t)\|^2\} = 0.$$

因此式(5)是全局(一致)均方渐近稳定的. 引理1得证.

以下在引理1的基础上, 给出了闭环系统(3)的随机稳定性条件.

**定理 1** 给定系统(1), 状态反馈控制器(2)和假设1-4, 如果存在适当维数的对称正定矩阵  $P$  和  $R_i$ , 对称矩阵  $Q_{i,1}$  和  $Q_{i,2}$ , 以及矩阵  $N_{i,1}, N_{i,i+1} (i = 1, 2, \dots, m)$ , 使得如下的LMIs成立:

$$\Omega_1 + \Pi_1 \Omega_2 \Pi_1^T |_{h_i(t)=0, i=1,2,\dots,m} < 0, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & \Pi_2 \\ * & \Omega_3 \end{bmatrix} |_{h_i(t)=\bar{\eta}_i, i=1,2,\dots,m} < 0, \quad (9)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_2^T + \Phi_3 + \Phi_4, \\ \Phi_1 &= \begin{bmatrix} PA + A^T P & \gamma_1 PBK & \dots & \gamma_m PBK \\ * & & & 0_{mn_x \times mn_x} \end{bmatrix}, \\ \Phi_2 &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m N_i & -N_1 & \dots & -N_m \end{bmatrix}, \\ N_i &= \text{col}\{N_{i,1} \ 0_{n_x \times (i-1)n_x} \ N_{i,i+1} \ 0_{n_x \times (m-i)n_x}\}, \\ \Phi_3 &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m -Q_{i,1} & \Phi_{31} \\ * & \Phi_{32} \end{bmatrix}, \\ \Phi_{31} &= [Q_{1,1} - Q_{1,2} \ \dots \ Q_{m,1} - Q_{m,2}], \\ \Phi_{32} &= \text{diag}\{2Q_{1,2} - Q_{1,1}, \dots, 2Q_{m,2} - Q_{m,1}\}, \\ \Phi_4 &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m (\bar{\eta}_i - h_i(t)) (Q_{i,1} A + A^T Q_{i,1}) & \Phi_{41} \\ * & \Phi_{42} \end{bmatrix}, \\ \Phi_{41} &= [\Xi_1 \ \dots \ \Xi_m], \\ \Xi_j &= \sum_{i=1}^m \{\gamma_j (\bar{\eta}_i - h_i(t)) Q_{i,1} BK + (\bar{\eta}_j - h_j(t)) \times \\ & A^T (-Q_{j,1} + Q_{j,2})\}, \ j = 1, 2, \dots, m, \\ \Phi_{42} &= \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \dots & \Psi_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{m1} & \dots & \Psi_{mm} \end{bmatrix}, \\ \Psi_{ij} &= [\gamma_j (\bar{\eta}_i - h_i(t)) (-Q_{i,1} + Q_{i,2}) BK + \\ & \gamma_i (\bar{\eta}_j - h_j(t)) K^T B^T (-Q_{j,1} + Q_{j,2})], \\ & \ i, j = 1, 2, \dots, m, \\ \Omega_2 &= \text{diag}\{\Omega_{21}, \dots, \Omega_{2m}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{2j} &= \sum_{i=1}^m (\bar{\eta}_i - h_i(t)) R_i, \\ \Omega_3 &= \text{diag}\{-h_1(t)R_1, \dots, -h_m(t)R_m\}, \\ \Pi_1 &= \begin{bmatrix} \sqrt{\gamma_1}A^T & \sqrt{\gamma_2}A^T & \dots & \sqrt{\gamma_m}A^T \\ \sqrt{\gamma_1}K^TB^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma_2}K^TB^T & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\gamma_m}K^TB^T \end{bmatrix}, \\ \Pi_2 &= [h_1(t)N_1 \ \dots \ h_m(t)N_m], \end{aligned}$$

则闭环系统(3)具有GMSAS.

**证** 对于  $t \in [t_{i_k, k}, t_{i_{k+1}, k+1})$ , 构造如下形式的非连续Lyapunov泛函:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t), \quad (10)$$

其中:

$$V_1(t) = x^T(t)Px(t), \quad (11)$$

$$V_2(t) = \sum_{i=1}^m (\bar{h}_i - h_i(t)) \zeta_i^T(t) \times \begin{bmatrix} Q_{i,1} & -Q_{i,1} + Q_{i,2} \\ * & -2Q_{i,2} + Q_{i,1} \end{bmatrix} \zeta_i(t), \quad (12)$$

$$V_3(t) = \sum_{i=1}^m (\bar{h}_i - h_i(t)) \int_{t-h_i(t)}^t \dot{x}^T(s)R_i\dot{x}(s)ds, \quad (13)$$

其中:  $\zeta_i(t) = \text{col}\{x(t), x(t - h_i(t))\}$ ,  $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  和  $R_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  均为对称正定矩阵,  $Q_{i,1} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  和  $Q_{i,2} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  为对称矩阵, 即  $Q_{i,1} = Q_{i,1}^T$ ,  $Q_{i,2} = Q_{i,2}^T$ .

定义

$$\xi(t) = \text{col}\{x(t) \ x(t - h_1(t)) \ \dots \ x(t - h_m(t))\}.$$

沿式(5)的轨线, 可得

$$LV(t) = LV_1(t) + LV_2(t) + LV_3(t), \quad (14)$$

其中:

$$\begin{aligned} LV_1(t) &= E\{2x^T(t)P\dot{x}(t) | X_t\} = \\ &E\{2x^T(t)P(Ax(t) + \\ &\sum_{i=1}^m \pi_i(t)BKx(t - h_i(t))) | X_t\} = \\ &2x^T(t)P(Ax(t) + \sum_{i=1}^m \gamma_i BKx(t - h_i(t))), \quad (15) \end{aligned}$$

$$LV_2(t) =$$

$$\begin{aligned} &E\left\{-\sum_{i=1}^m \zeta_i^T(t) \begin{bmatrix} Q_{i,1} & -Q_{i,1} + Q_{i,2} \\ * & -2Q_{i,2} + Q_{i,1} \end{bmatrix} \zeta_i(t) + \right. \\ &2 \sum_{i=1}^m \{(\bar{h}_i - h_i(t)) \times \\ &\left. \zeta_i^T(t) \begin{bmatrix} Q_{i,1} & -Q_{i,1} + Q_{i,2} \\ * & -2Q_{i,2} + Q_{i,1} \end{bmatrix} \dot{\zeta}_i(t) | X_t\} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-\sum_{i=1}^m \zeta_i^T(t) \begin{bmatrix} Q_{i,1} & -Q_{i,1} + Q_{i,2} \\ * & -2Q_{i,2} + Q_{i,1} \end{bmatrix} \zeta_i(t) + \\ &2 \sum_{i=1}^m (\bar{h}_i - h_i(t)) \zeta_i^T(t) \times \\ &\left[ Ax(t) + \sum_{j=1}^m \gamma_j BKx(t - h_j(t)) \right] = \\ &-\sum_{i=1}^m \zeta_i^T(t) \begin{bmatrix} Q_{i,1} & -Q_{i,1} + Q_{i,2} \\ * & -2Q_{i,2} + Q_{i,1} \end{bmatrix} \zeta_i(t) + \\ &2 \sum_{i=1}^m (\bar{h}_i - h_i(t)) \zeta_i^T(t) \times \\ &\begin{bmatrix} Q_{i,1}A & \Delta_1 \\ (-Q_{i,1} + Q_{i,2})A & \Delta_2 \end{bmatrix} \xi(t), \quad (16) \\ &\Delta_1 = [\gamma_1 Q_{i,1}BK \ \dots \ \gamma_m Q_{i,1}BK], \\ &\Delta_2 = [\gamma_1(-Q_{i,1} + Q_{i,2})BK \ \dots \\ &\quad \gamma_m(-Q_{i,1} + Q_{i,2})BK], \\ &LV_3(t) = \\ &E\left\{-\sum_{i=1}^m \int_{t-h_i(t)}^t \dot{x}^T(s)R_i\dot{x}(s)ds + \right. \\ &\sum_{i=1}^m (\bar{h}_i - h_i(t)) \dot{x}^T(t)R_i\dot{x}(t) | X_t\} = \\ &-\left\{ \sum_{i=1}^m \int_{t-h_i(t)}^t \dot{x}^T(s)R_i\dot{x}(s)ds | X_t \right\} + \\ &E\left\{ \sum_{i=1}^m (\bar{h}_i - h_i(t)) \{x^T(t)A^T R_i Ax(t) + \right. \\ &2 \sum_{j=1}^m \pi_j(t)x^T(t)A^T R_i BKx(t - h_j(t)) + \\ &\sum_{j=1}^m \pi_j^2(t)x^T(t - h_j(t))K^T B^T R_i BK \times \\ &\left. x(t - h_j(t))\} | X_t \right\} = \\ &-\left\{ \sum_{i=1}^m \int_{t-h_i(t)}^t \dot{x}^T(s)R_i\dot{x}(s)ds | X_t \right\} + \\ &\sum_{i=1}^m (\bar{h}_i - h_i(t)) \{x^T(t)A^T R_i Ax(t) + \\ &2 \sum_{j=1}^m \gamma_j x^T(t)A^T R_i BKx(t - h_j(t)) + \\ &\sum_{j=1}^m \gamma_j x^T(t - h_j(t)) K^T B^T R_i BKx(t - h_j(t))\}. \end{aligned}$$

(17)

根据牛顿-莱布尼兹公式和闭环系统方程(3), 可得如下的自由权矩阵恒等式:

$$\begin{aligned} &E\{2\xi^T(t)N_i[x(t) - x(t - h_i(t)) - \\ &\int_{t-h_i(t)}^t \dot{x}(s)ds] | X_t\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (18) \end{aligned}$$

且可知以下的不等式成立:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\{-2\xi^T(t)N_i \int_{t-h_i(t)}^t \dot{x}(s)ds | X_t\} \leq \\ & h_i(t)\xi^T(t)N_i R_i^{-1} N_i^T \xi(t) + \\ & \mathbb{E}\left\{\int_{t-h_i(t)}^t \dot{x}^T(s)R_i \dot{x}(s)ds | X_t\right\}, i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (19)$$

由式(14)–(19)可得, 如果下面的矩阵不等式可行:

$$\Omega = \Omega_1 + \Pi_1 \Omega_2 \Pi_1^T + \sum_{i=1}^m h_i(t)N_i R_i^{-1} N_i^T < 0, \quad (20)$$

则  $LV(t) \leq \xi^T(t)\Omega\xi(t) < 0$  成立, 即  $LV(t) \leq -\lambda\|x(t)\|^2 < 0$ ,  $\lambda = \lambda_{\min}(-\Omega) < 0$ . 根据定义1可得闭环系统(3)具有GMSAS. 由式(20)的左边在  $h_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  上的凸性, 可得式(20)等价于不等式(8)和如下不等式:

$$\Omega_1 + \sum_{i=1}^m h_i(t)N_i R_i^{-1} N_i^T |_{h_i(t)=\bar{\eta}_i, i=1,2,\dots,m} < 0. \quad (21)$$

由Schur引理可得, 式(21)等价于不等式(9). 定理1得证.

**注 1** 定理1给出的稳定性条件不仅依赖于采样间隔的子分布区间  $[\bar{\eta}_{i-1}, \bar{\eta}_i]$  及其相应的概率  $\gamma_i$ , 而且利用了输入时滞的导数为1的条件, 因而具有更少的保守性.

**注 2** 虽然定理1中的采样间隔  $\eta_k$  被假设为区间内连续分布的, 但是定理1的结果很容易扩展到采样间隔  $\eta_k$  在有限集内离散分布的情况, 即  $\eta_k \in \{\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \dots, \bar{\eta}_m\}$ , 此时指示器函数定义为

$$\pi_i(t) = \begin{cases} 1, \eta_k = \bar{\eta}_i, & t \in [t_k, t_{k+1}). \\ 0, \eta_k \neq \bar{\eta}_i, & \end{cases}$$

则  $\mathbb{E}\{\pi_i(t)\} = \mathbb{P}\{\eta_k = \bar{\eta}_i\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_1}^t \pi_i(s)ds = \gamma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . 由此可获得与定理1相类似的随机稳定性条件.

**注 3** 定理1的推导是基于多输入时滞脉冲模型和非连续Lyapunov泛函的. 此外, 另一种可用于本文随机稳定性问题的研究方法是基于等价离散时间模型和鲁棒LMIs, 更多的细节可参考文献[4–6].

当控制器增益  $K$  为未知矩阵时, 定理1给出的矩阵不等式条件难以通过LMI工具箱求解. 以下在定理1的基础上, 运用调节因子法给出控制器设计方法.

**定理 2** 给定系统(1), 假设1–4及标量  $\lambda_{i,1}$  和  $\lambda_{i,2}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), 如果存在适当维数的对称正定矩阵  $X$  和  $\tilde{R}_i$ , 矩阵  $\tilde{N}_{i,1}$ ,  $\tilde{N}_{i,i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 和  $Y$ , 使得如下的LMIs成立:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_1 & \tilde{\Omega}_{12} \\ * & \tilde{\Omega}_2 \end{bmatrix} |_{h_i(t)=0, i=1,2,\dots,m} < 0, \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_1 & \tilde{\Pi}_2 \\ * & \tilde{\Omega}_3 \end{bmatrix} |_{h_i(t)=\bar{\eta}_i, i=1,2,\dots,m} < 0, \quad (23)$$

其中:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_1 &= \tilde{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_2 + \tilde{\Phi}_2^T + \tilde{\Phi}_3 + \tilde{\Phi}_4, \\ \tilde{\Omega}_{12} &= [\sqrt{\bar{\eta}_1 - h_1(t)}\tilde{\Pi}_1 \cdots \sqrt{\bar{\eta}_m - h_m(t)}\tilde{\Pi}_1], \\ \tilde{\Phi}_1 &= \begin{bmatrix} AX + XA^T & \gamma_1 BY & \cdots & \gamma_m BY \\ * & & & 0_{m n_x \times m n_x} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Phi}_2 &= [\sum_{i=1}^m \tilde{N}_i \quad -\tilde{N}_1 \quad \cdots \quad -\tilde{N}_m], \\ \tilde{N}_i &= \text{col}\{\tilde{N}_{i,1} \quad 0_{n_x \times (i-1)n_x} \quad \tilde{N}_{i,i+1} \quad 0_{n_x \times (m-i)n_x}\}, \\ \tilde{\Phi}_3 &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m -\lambda_{i,1} X & \tilde{\Phi}_{31} \\ * & \tilde{\Phi}_{32} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Phi}_{31} &= [\lambda_{1,1} X - \lambda_{1,2} X \quad \cdots \quad \lambda_{m,1} X - \lambda_{m,2} X], \\ \tilde{\Phi}_{32} &= \text{diag}\{2\lambda_{1,2} X - \lambda_{1,1} X, \dots, \\ & \quad 2\lambda_{m,2} X - \lambda_{m,1} X\}, \\ \tilde{\Phi}_4 &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m (\bar{\eta}_i - h_i(t)) (\lambda_{i,1} AX + XA^T \lambda_{i,1}) & \tilde{\Phi}_{41} \\ * & \tilde{\Phi}_{42} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Phi}_{41} &= [\tilde{\Xi}_1 \quad \cdots \quad \tilde{\Xi}_m], \\ \tilde{\Xi}_j &= \sum_{i=1}^m \gamma_j \{(\bar{\eta}_i - h_i(t))\lambda_{i,1} BY + (\bar{\eta}_j - h_j(t)) \times \\ & \quad XA^T(-\lambda_{j,1} + \lambda_{j,2})\}, j = 1, 2, \dots, m, \\ \tilde{\Phi}_{42} &= \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{11} & \cdots & \tilde{\Psi}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\Psi}_{m1} & \cdots & \tilde{\Psi}_{mm} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Psi}_{ij} &= \gamma_j (\bar{\eta}_i - h_i(t))(-\lambda_{i,1} + \lambda_{i,2})BY + \\ & \quad \gamma_i (\bar{\eta}_j - h_j(t))Y^T B^T(-\lambda_{j,1} + \lambda_{j,2}), \\ & \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \\ \tilde{\Omega}_2 &= -\text{diag}\{\tilde{\Omega}_{21}, \dots, \tilde{\Omega}_{2m}\}, \\ \tilde{\Omega}_{2j} &= \text{diag}\{X \tilde{R}_j^{-1} X, \dots, X \tilde{R}_j^{-1} X\}, \\ & \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ \tilde{\Omega}_3 &= \text{diag}\{-h_1(t)\tilde{R}_1, \dots, -h_m(t)\tilde{R}_m\}, \\ \tilde{\Pi}_1 &= \begin{bmatrix} \sqrt{\gamma_1} XA^T & \sqrt{\gamma_2} XA^T & \cdots & \sqrt{\gamma_m} XA^T \\ \sqrt{\gamma_1} Y^T B^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma_2} Y^T B^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\gamma_m} Y^T B^T \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Pi}_2 &= [h_1(t)\tilde{N}_1 \quad \cdots \quad h_m(t)\tilde{N}_m], \end{aligned}$$

则闭环系统(3)具有GMSAS, 且控制器增益  $K = YX^{-T}$ .

**证** 根据Schur补引理, 由不等式(8)可得

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_{12} \\ * & \tilde{\Omega}_2 \end{bmatrix} |_{h_i(t)=0, i=1,2,\dots,m} < 0, \quad (24)$$

其中:

$$\Omega_{12} = [\sqrt{\eta_1} - h_1(t)\bar{\Pi}_1 \quad \dots \quad \sqrt{\eta_m} - h_m(t)\bar{\Pi}_1],$$

$$\tilde{\Omega}_2 =$$

$$-\text{diag}\{\underbrace{R_1^{-1}, \dots, R_1^{-1}}_m, \dots, \underbrace{R_m^{-1}, \dots, R_m^{-1}}_m\},$$

$$\bar{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{\gamma_1}A^T & \sqrt{\gamma_2}A^T & \dots & \sqrt{\gamma_m}A^T \\ \sqrt{\gamma_1}K^TB^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma_2}K^TB^T & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\gamma_m}K^TB^T \end{bmatrix}.$$

定义

$$Q_{i,1} = \lambda_{i,1}P, \quad Q_{i,2} = \lambda_{i,2}P,$$

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

$$X = P^{-1},$$

式(24)两边分别左乘和右乘  $\text{diag}\{\underbrace{X, \dots, X}_{m+1}, \underbrace{I, \dots, I}_{m \times m}\}$

及其转置, 式(9)的两边分别左乘和右乘  $\text{diag}\{\underbrace{X, \dots, X}_{2m+1}\}$ 及其转置, 定义

$$\tilde{R}_i = XR_iX^T, \quad \tilde{N}_{i,1} = XN_{i,1}X^T,$$

$$\tilde{N}_{i,i+1} = XN_{i,i+1}X^T, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$Y = KX^T,$$

则分别可得式(22)和式(23). 定理2得证.

**注 4** 与定理1相比较, 定理2具有更多的保守性, 原因在于定理2是在定理1的基础上通过调节因子法获得的, 该方法会引入一定保守性.

定理2给出了基于非线性矩阵不等式的控制器设计方法, 其中式(22)的非线性项  $-X^T\tilde{R}_i^{-1}X$  可通过锥补线性化方法来处理, 从而把控制器设计转化为一个具有LMI约束的非线性优化问题.

定义  $Z_i (i = 1, 2, \dots, m)$  为正定对称矩阵, 且  $X^T\tilde{R}_i^{-1}X > Z_i$ . 由Schur引理可得以下不等式成立:

$$\begin{bmatrix} Z_i^{-1} & X^{-1} \\ X^{-T} & \tilde{R}_i^{-1} \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

定义

$$Z_i^{-1} = U_i, \quad \tilde{R}_i^{-1} = W_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$X^{-1} = H.$$

则定理2的控制器设计问题转化为如下的非线性优化问题:

$$\min \text{tr} \{XH + \sum_{i=1}^m (Z_iU_i + \tilde{R}_iW_i)\},$$

$$\text{s.t. 式(22)-(23), } \begin{bmatrix} U_i & H \\ H^T & W_i \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} U_i & I \\ I & Z_i \end{bmatrix} > 0, \quad (25a)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & I \\ I & \tilde{R}_i \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} H & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0, \quad (25b)$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

其中式(22)的  $\tilde{\Omega}_2$  改写为

$$\tilde{\Omega}_2 = -\text{diag}\{\underbrace{Z_1, \dots, Z_1}_m, \underbrace{Z_2, \dots, Z_2}_m, \dots, \underbrace{Z_m, \dots, Z_m}_m\}.$$

为了求解以上优化问题, 给出如下迭代求解算法.

**算法 1** 对于定理2的给定条件:

**步骤 1** 求解式(25)的可行解  $X_0, H_0, Z_{i,0}, U_{i,0}, \tilde{R}_{i,0}, W_{i,0}, i = 1, 2, \dots, m$ , 设  $k = 0$ .

**步骤 2** 由给定的  $X_k, H_k, Z_{i,k}, U_{i,k}, \tilde{R}_{i,k}, W_{i,k}, i = 1, 2, \dots, m$ , 求解如下的线性优化问题:

$$\begin{aligned} \min \text{tr} \{ & X_kH + X_kH_k + \sum_{i=1}^m (Z_{i,k}U_i + \\ & Z_iU_{i,k} + \tilde{R}_{i,k}W_i + \tilde{R}_iW_{i,k}) \}, \\ \text{s.t. 式(25)}. \end{aligned}$$

设定

$$X_{k+1} = X, \quad H_{k+1} = H, \quad Z_{i,k+1} = Z_i,$$

$$U_{i,k+1} = U_i, \quad \tilde{R}_{i,k+1} = \tilde{R}_i, \quad W_{i,k+1} = W_i,$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

**步骤 3** 如果式(22)和式(23)成立, 则控制器增益  $K = YX^{-T}$ , 退出; 如果式(22)和式(23)不成立, 且在给定的迭代步数之内, 则设  $k = k + 1$ , 返回步骤2; 否则, 退出.

## 4 数值实例(Numerical examples)

本节通过实例验证所得理论结果的有效性和优越性.

**例 1** 考虑如下线性系统:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(t), \quad u(t) = Kx(t),$$

其中控制器增益  $K = [-3.75 \quad -11.5]$ .

当  $m = 1$  时, 定理1的最大允许采样间隔(MASI)为1.7199, 表1列出了应用文献[9, 12, 14, 17-19]的理论结果和定理1( $m = 1$ )获得的MASIs. 由表1可知, 相对于以上已有的理论结果, 定理1具有更少的保守性. 然而相对于基于离散时间模型方法的文献[4-6], 其中的最大采样间隔分别为1.729, 1.72和1.7294, 定

理1存在微小的保守性.

表1 不同理论结果的最大允许采样间隔比较

Table 1 Comparison of maximum allowable sampling intervals for different theoretic results

理论结果	文献[9]	文献[12]	文献[14]	文献[17]
MASIs	0.8695	1.0081	1.3659	1.3277
理论结果	文献[18]	文献[19]	定理1( $m = 1$ )	
MASIs	1.69	1.6907	1.7199	

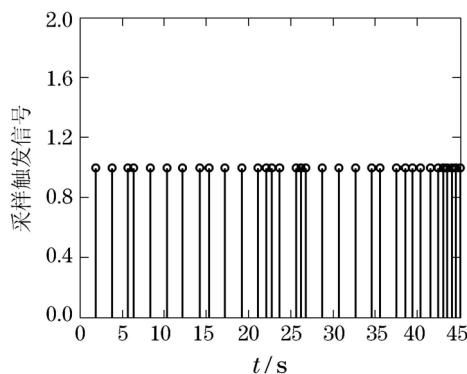
表2给出了当 $m = 3, \bar{\eta}_1 = 0.5, \bar{\eta}_2 = 1.0$ 时不同概率分布下的MASIs. 由表2可知: 在 $\gamma_1 = 0.1$ 不变的情况下, MASI随着 $\gamma_2$ 增加而逐渐增大; 与 $m = 1$ 的情况比较, 考虑采样间隔的随机分布特性获得了更大的MASIs, 从而有利于降低结果的保守性.

为了验证定理1的有效性, 以表2的两种概率分布下的数值结果为例, 分别给出了非均匀采样过程下闭环系统的状态响应, 如图1所示, 其中初始状态为 $x(t_0) = [-5; 5]$ . 第1个非均匀采样过程对应于表2的第2种概率分布, 即 $\bar{\eta}_1 = 0.5, \bar{\eta}_2 = 1.0, \bar{\eta}_3 = 1.97, \gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.2, \gamma_3 = 0.7$ , 相应状态响应如图1的实线; 第2个非均匀采样过程对应于表2的第4种概率分布, 即 $\bar{\eta}_1 = 0.5, \bar{\eta}_2 = 1.0, \bar{\eta}_3 = 2.99, \gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.5, \gamma_3 = 0.4$ , 相应状态响应如图1的虚线. 由仿真结果可知, 在两种概率分布的非均匀采样过程下闭环系统的状态响应是收敛的, 表明定理1是有效的.

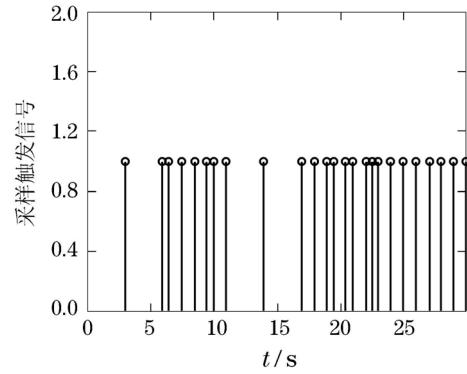
表2 不同概率分布下的最大允许采样间隔

Table 2 Maximum allowable sampling intervals under different probability distributions

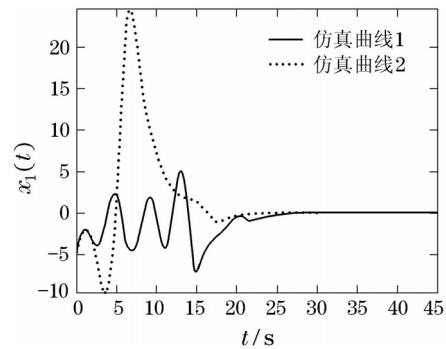
$\gamma_1$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$\gamma_2$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$\gamma_3$	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2
MASIs	1.87	1.97	2.13	2.40	2.99	4.71	9.78



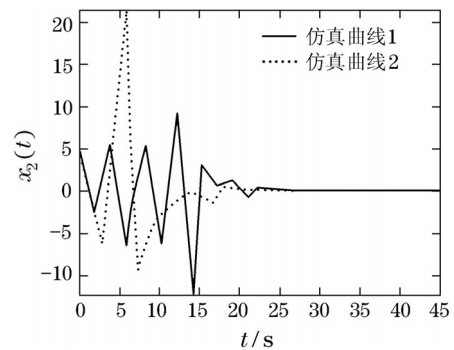
(a) 非均匀采样过程1



(b) 非均匀采样过程2



(c) 闭环状态响应



(d) 闭环状态响应

图1 非均匀采样下的闭环状态响应  
Fig. 1 Closed-loop state responses under nonuniform sampling process

例2 考虑如下线性系统<sup>[10]</sup>:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), u(t) = Kx(t),$$

其中A具有不稳定的极点.

当 $m = 1, \lambda_{11} = \lambda_{12} = -0.001$ 时, 采用定理2得到的MASI为1.95, 优于文献[10]的0.994, 相应的控制器增益

$$K = [-1.0219 \quad -1.0217].$$

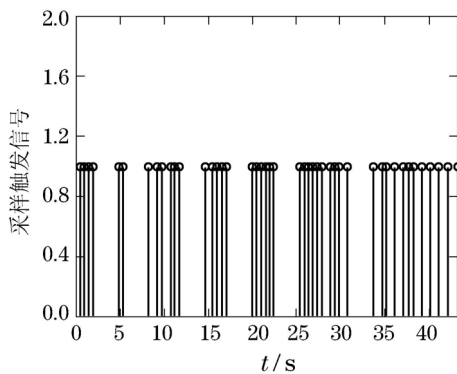
取 $m = 3, \lambda_{i,1} = \lambda_{i,2} = -0.001 (i = 1, 2, 3)$ , 假定 $\bar{\eta}_1 = 0.5, \bar{\eta}_2 = 1.0$ , 分别在两种概率分布下应用定理2求得相应的MASIs和控制器增益K, 如表3所示.

在表3的两种概率分布下仿真闭环系统的状态响应, 相应的非均匀采样过程和状态响应曲线如图2所示, 其中初始状态为 $x(t_0) = [-5; 2]$ . 由图2可知状态响应收敛, 说明定理2是有效的. 根据表3得到的控制器, 在 $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ 和 $\gamma_i$ 不变的情况下, 由定理1求得MASIs (即 $\bar{\eta}_3$ )分别为3.43和2.75, 分别大于2.88和2.59, 表明定理2相对于定理1引入了一定的保守性.

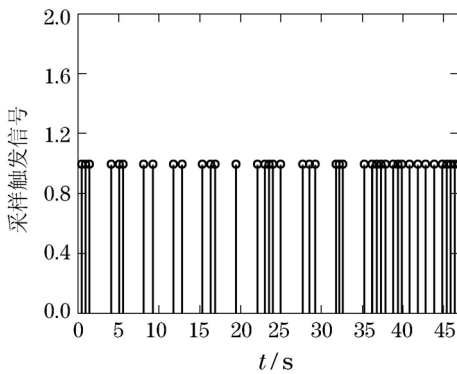
表3 不同概率分布下的控制器增益

Table 3 Controller gains under different probability distributions

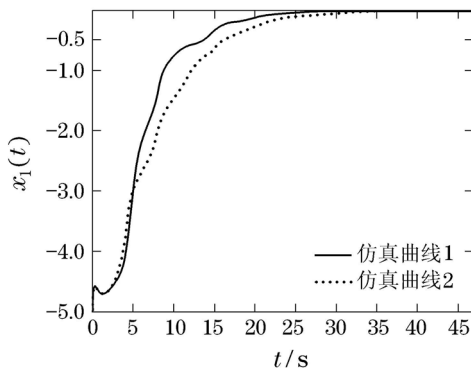
$(\bar{\eta}_1, \gamma_1)$	(0.5, 0.3)	(0.5, 0.2)
$(\bar{\eta}_2, \gamma_2)$	(1.0, 0.3)	(1.0, 0.3)
(MASI, $\gamma_3$ )	(2.88, 0.4)	(2.59, 0.5)
增益 $K$	[-1.0354, -1.0328]	[-1.0338, -1.0322]



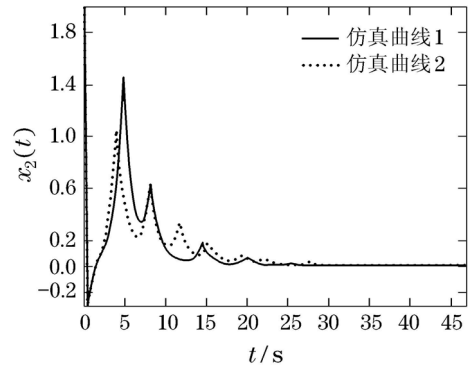
(a) 非均匀采样过程1



(b) 非均匀采样过程2



(c) 闭环状态响应



(d) 闭环状态响应

图2 非均匀采样下的闭环状态响应

Fig. 2 Closed-loop state responses under nonuniform sampling process

### 5 实验(Experiment)

本节以三阶电路为实验对象, 其数学模型给定如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -10 & -10 & 0 \\ 0 & -10 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

取 $m = 3, \lambda_{i,1} = \lambda_{i,2} = -0.001 (i = 1, 2, 3)$ , 分别在两种概率分布下由定理2求得相应的控制器增益 $K$ , 如表4所示.

表4 不同概率分布下的控制器增益

Table 4 Controller gains under different probability distributions

$(\bar{\eta}_1, \gamma_1)$	(0.1, 0.2)	(0.1, 0.2)
$(\bar{\eta}_2, \gamma_2)$	(0.2, 0.3)	(0.2, 0.2)
$(\bar{\eta}_3, \gamma_3)$	(0.4, 0.5)	(0.5, 0.6)
增益 $K$	[-3.1712, -0.1716, 0.7237]	[-2.1730, -0.1872, 0.5221]

为了验证定理2的有效性, 本文以NetCon系统为平台分别进行了仿真和实验验证, 实验结构如图3所示, 其中控制器由基于ARM9和uClinux的网络化控制器实现, 非均匀采样过程由合适的随机算法按照表4给定的概率分布产生.

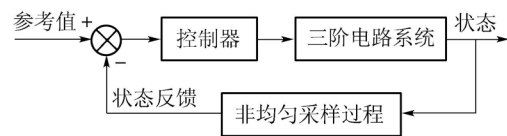


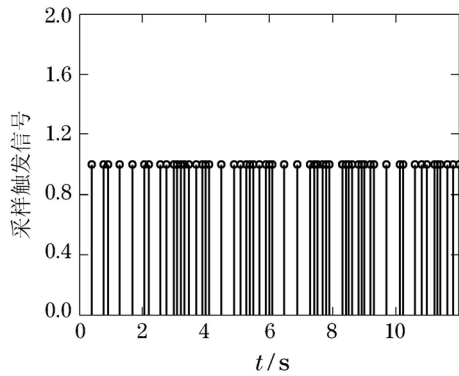
图3 非均匀采样下的闭环控制实验结构图

Fig. 3 The framework of closed-loop control experiment under nonuniform sampling process

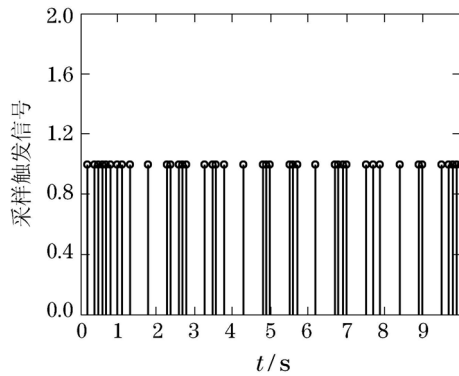
图4所示为表4两种给定概率分布下的非均匀采样过程, 以及当初始状态 $x(t_0) = [1; -1; 5]$ 时相应状态响应的仿真和实验曲线. 由图4可知, 受益于较为



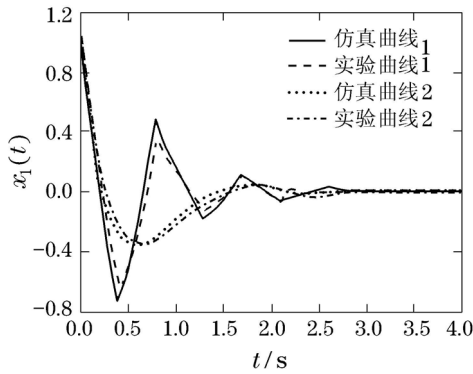
准确的三阶电路数学建模, 闭环状态响应的仿真和实验曲线基本拟合, 且都较快地收敛, 由此表明定理 2 是有效的。



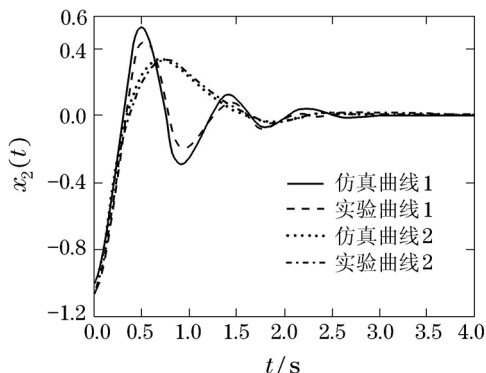
(a) 非均匀采样过程 1



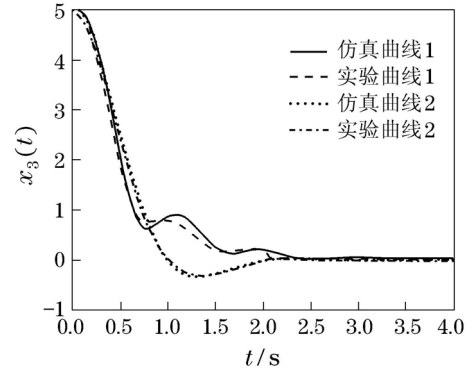
(b) 非均匀采样过程 2



(c) 闭环状态响应



(d) 闭环状态响应



(e) 闭环状态响应

图 4 闭环系统的状态响应

Fig. 4 State responses of the closed-loop system

## 6 结论(Conclusion)

本文把具有非均匀采样的 SDCSs 描述为多输入时滞的脉冲模型, 通过把区间内连续分布的输入时滞转化为具有多元 i.i.d. 特性的随机过程, 基于非连续 Lyapunov 泛函和自由权矩阵方法, 研究了非均匀采样的随机特性与闭环均方渐近镇定性之间的关系. 所得的随机稳定性判据不仅与采样间隔的分布特性有关, 同时内在地包含了在每个采样间隔内输入时滞的时间导数为 1 的条件, 因而具有更少的保守性. 在此基础上给出了基于非线性优化问题的随机镇定设计方法. 数值实例和实验表明了理论结果的有效性以及相对于已有结果的优越性。

## 参考文献(References):

- [1] CHEN T, FRANCIS B A. *Optimal Sampled-data Control Systems* [M]. 2nd ed. London: Springer, 1996.
- [2] NILSSON J, BERNHARDSSON B, WITTENMARK B. Stochastic analysis and control of real-time systems with random time delays [J]. *Automatica*, 1998, 34(1): 57 – 64.
- [3] ZHANG W, BRANICKY M S, PHILLIPS S M. Stability of networked control systems [J]. *IEEE Control System Magazine*, 2001, 21(1): 84 – 99.
- [4] SUH Y S. Stability and stabilization of nonuniform sampling systems [J]. *Automatica*, 2008, 44(12): 3222 – 3226.
- [5] FUJIOKA H. A discrete-time approach to stability analysis of systems with aperiodic sample-and-hold devices [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(10): 2440 – 2445.
- [6] OISHI Y, FUJIOKA H. Stability and stabilization of aperiodic sampled-data control systems using robust linear matrix inequalities [J]. *Automatica*, 2010, 46(10): 1327 – 1333.
- [7] XIONG J L, LAM J. Stabilization of linear systems over networks with bounded packet loss [J]. *Automatica*, 2007, 43(1): 80 – 87.
- [8] FRIDMAN E, SEURET A, RICHARD J P. Robust sampled-data stabilization of linear systems: an input delay approach [J]. *Automatica*, 2004, 40(8): 1441 – 1446.
- [9] YUE D, HAN Q L, PENG C. State feedback controller design of networked control systems [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 2004, 51(11): 640 – 644.

- [10] TANG B, LIU G P, GUI W H. Improvement of state feedback controller design for networked control systems [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 2008, 55(5): 464 – 468.
- [11] GAO H J, CHEN T W, LAM J. A new delay system approach to network-based control [J]. *Automatica*, 2008, 44(1): 39 – 52.
- [12] JIANG X F, HAN Q L, LIU S R, et al. A new H-infinity stabilization criterion for networked control systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(4): 1025 – 1032.
- [13] YU M, WANG L, CHU T, et al. Stabilization of networked control systems with data packet dropout and transmission delays: Continuous-time case [J]. *European Journal of Control*, 2005, 11(1): 41 – 49.
- [14] MIRKIN L. Some remarks on the use of time-varying delay to model sample-and-hold circuits [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(6): 1109 – 1112.
- [15] FUJIOKA H. Stability analysis of systems with aperiodic sample-and-hold devices [J]. *Automatica*, 2009, 45(3): 771 – 775.
- [16] HU L S, LAM J, CAO Y Y, et al. A linear matrix inequality approach to robust H<sub>2</sub> sampled-data control for linear uncertain systems [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2003, 33(1): 149 – 155.
- [17] NAGHSHTABRIZI P, HESPANHA J P, TEEL A R. Exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2008, 57(5): 378 – 385.
- [18] FRIDMAN E. A refined input delay approach to sampled-data control [J]. *Automatica*, 2010, 46(2): 421 – 427.
- [19] CHEN W H, ZHENG W X. Input-to-state stability for networked control systems via an improved impulsive system approach [J]. *Automatica*, 2011, 47(4): 789 – 796.
- [20] 王武, 林琼斌, 杨富文. 具有随机通讯时延的离散网络化系统的H<sub>∞</sub>滤波器设计 [J]. 控制理论与应用, 2007, 24(3): 366 – 371. (WANG W, LIN Q B, YANG F W. H-infinity filter design for discrete-time networked systems random communication delays [J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(3): 366 – 371.)
- [21] 王武, 林琼斌, 蔡逢煌, 等. 随机时延网络控制系统的H<sub>∞</sub>输出反馈控制器设计 [J]. 控制理论与应用, 2008, 25(5): 920 – 924. (WANG W, LIN Qiongbin, CAI Fenghuang, et al. Design of H-infinity output feedback controller for networked control system with random delays [J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(5): 920 – 924.)

#### 作者简介:

唐斌 (1979–), 男, 博士, 讲师, 主要研究方向为网络化控制系统, E-mail: tangbin316@163.com;

曾启杰 (1977–), 男, 博士研究生, 讲师, 主要研究方向为网络化控制、智能控制, E-mail: jie2000@gdut.edu.cn;

章云 (1963–), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为智能控制与信息处理技术、控制网络与集成、机器人技术与自动化装备, E-mail: yz@gdut.edu.cn.