

基于伪谱法的自由采样实时最优反馈控制及应用

张友安¹, 王丽英², 赵国荣¹

(1. 海军航空工程学院 控制工程系, 山东 烟台 264001; 2. 海军航空工程学院 系统科学与数学研究所, 山东 烟台 264001)

摘要: 利用高斯伪谱法收敛速率快、精度高的特点, 基于通用伪谱优化软件包在线求解非线性系统的最优控制问题. 将伪谱反馈控制理论与非线性最优控制理论结合起来, 给出了一种自由采样实时最优反馈控制算法, 该算法通过连续在线生成开环最优控制的方式提供闭环反馈. 考虑计算误差、模型参数不确定性和干扰的作用, 假定系统状态方程右侧的非线性向量函数关于状态、控制和系统参数是Lipschitz连续的, 利用Bellman最优性原理对闭环控制系统的有界稳定性进行了分析和理论证明. 最后, 以高超声速再入飞行器为应用对象, 研究了其再入制导问题, 仿真结果验证了该算法的可行性和有效性.

关键词: 高斯伪谱方法; 实时优化; 伪谱反馈控制; 再入制导

中图分类号: TJ765 **文献标识码:** A

Pseudospectral-based free sampling real-time optimal feedback control and its application

ZHANG You-an¹, WANG Li-ying², ZHAO Guo-rong¹

(1. Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai Shandong 264001, China;

2. Institute of Systems Science and Mathematics, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai Shandong 264001, China)

Abstract: Owing to fast convergence and high accuracy of Gauss pseudospectral method, we solve nonlinear optimal control problems subject to constraints by online using the general pseudospectral optimization software (GPOPS). Combining pseudospectral feedback control with nonlinear optimal control, we develop a real-time optimal feedback control algorithm with free sampling frequency, which continuously generates the open-loop optimal control for closed-loop feedback control application. Considering computational errors, model parameter uncertainties and disturbances, and assuming that the nonlinear vector function in the system state-equation is Lipschitz continuous on states, controls and parameters, we prove the bounded stability of the closed-loop control systems by using the principle of Bellman optimality. The above algorithm has been applied to solve reentry guidance problems for hypersonic vehicles. Simulation results show the validity of the algorithm.

Key words: Gauss pseudospectral method; real-time optimization; pseudospectral feedback control; reentry guidance

1 引言(Introduction)

最近几年, 非线性系统最优控制的实时计算受到了越来越多的关注, 而实现实时最优控制计算的前提条件是能够找到一种有效、可靠的数值最优控制算法. 文献[1]研究了一种基于直接多重打靶法的非线性最优反馈实时迭代算法, 以反馈线性化的形式提供闭环数值解. 随着数值计算能力的提高, 伪谱法在求解复杂、高度非线性的最优控制问题上显示出了越来越大的优势. 文献[2]给出了采用伪谱法求解最优控制问题数值解的统一框架. 文献[3]指出基于理论、算法和数值计算能力的进步.

伪谱法能够应用于实时最优控制的求解中, 并以其在军事和工业中的应用加以说明. 文献[4]给出了两种基于Radau伪谱方法(Radau pseudospectral

method, RPM)的实时反馈控制算法(自由采样、固定采样), 并针对自由采样的情况, 在仅考虑计算误差的影响下, 对闭环控制系统的稳定性进行了分析, 将其应用到机械臂和倒立摆的控制问题上. 文献[5]给出了基于伪谱方法的实时最优反馈控制的基本理论, 并介绍了其在航天领域中的应用. 文献[6]结合文献[5], 利用文献[4]中的算法解决了可重复使用运载器的再入制导问题, 并采用基于勒让德伪谱法(Legendre pseudospectral method, LPM)的直接-间接动态优化软件包实时求解了非线性系统的最优控制问题. 伪谱方法能够实时求解最优控制问题的优点, 使得通过实时开环最优控制构成闭环反馈成为可能, 但对于闭环应用来说, 解的收敛速率、精度和优化计算时间是3个重要的因素. 文献[7-8]针

对可反馈线性化的非线性动力学系统,给出了采用伪谱法求解非线性最优控制问题时,最优解的存在性和收敛性的相关结论,并指出其具有的(伪为节点个数,伪为最优轨迹的平滑度)收敛速率.文献[2,9]从理论上对3种伪谱法(高斯伪谱法(Gauss pseudospectral method, GPM)、LPM、RPM)进行了分析与比较,指出GPM在求解的精度和速度上具有优势.文献[10]指出解的精度、优化计算时间,同时还与节点的分布、配置情况有关,并基于全局伪谱法给出了一种自动网格重划分方法,通过特定的网格设计序列配置节点的分布,以较少的计算代价获得了较高精度的解.文献[11]给出了一种hp-自适应伪谱法,在节点的配置上采用了自适应网格重定义算法,与文献[10]类似,能够以更快的计算效率生成更高精度的解.文献[12]将文献[10]的思想集成于一个开源软件包——通用伪谱优化软件包(general pseudospectral optimization software, GPOPS)内,具体给出了基于GPM(或RPM)和稀疏非线性规划求解器(sparse nonlinear optimizer, SNOPT)所构成的求解非线性最优控制问题的算法代码.

结合文献[4],本文利用GPM收敛速率快、精度高的优点,采用GPOPS给出了一种在线求解非线性最优控制问题的算法;在考虑计算误差、模型参数不确定性和干扰的情况下,对闭环控制系统的稳定性进行了分析;以高超声速飞行器的再入段制导问题对该算法进行了仿真实验.

2 基于伪谱法的实时最优反馈控制算法(Real-time optimal feedback control algorithm based on pseudospectral method)

2.1 非线性系统最优反馈控制问题(Nonlinear optimal feedback control problems)

考虑一般形式的非线性系统模型

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}_0)$$

其中: \mathbf{p}_0 为系统标称参数; $t \rightarrow \mathbf{x}(t) \in X \subset \mathbb{R}^{N_x}$, $(t, \mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \in U \subset \mathbb{R}^{N_u}$, \mathbf{x} 为状态向量, \mathbf{u} 为控制向量, X 为状态空间, U 为控制空间; $\mathbf{f}: \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_u} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_x}$ 关于其变量是Lipschitz连续的.

非线性系统最优反馈控制是指求解下述Bolza类型代价函数的优化问题^[12]:

$$\begin{aligned} \min J[\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)] = & \\ & E(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt, \quad (1) \\ \text{s.t. } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}_0), \\ \Phi(\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f) = 0, \quad t \in [t_0, t_f], \\ C(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

其中: t_f 可以是有限的,也可以趋向于无穷; $\dot{\mathbf{x}}(\cdot) = \mathbf{f}(\cdot)$ 表示动态约束; $\Phi = 0$ 表示边界约束; $C \leq 0$ 表示路径约束.

本文采用GPM^[12]求解该类型的优化问题,在GPOPS内实施所有的计算.

而对于实际的非线性系统,如式(2)所示,需要引入闭环最优反馈控制来抑制模型参数不确定性和外界扰动的影响.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t; \mathbf{p}) + \mathbf{d}(t), \quad (2)$$

其中: \mathbf{p} 为系统参数,其标称值为 \mathbf{p}_0 ; $\mathbf{d}(t)$ 为系统受到的干扰.

2.2 实时最优反馈控制算法(Real-time optimal feedback control algorithm)

基于GPM离散化方法和GPOPS,通过在线生成开环最优控制的方式实现闭环反馈,以抑制系统(2)受到的模型参数不确定性和外界扰动的影响,如图1所示.

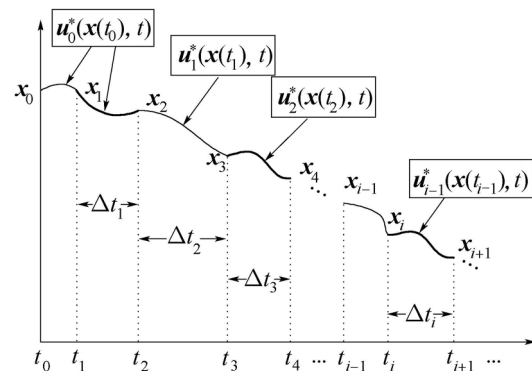


图1 开环最优控制的连续应用过程

Fig. 1 The consecutive application of open-loop optimal control

具体算法步骤如下:

步骤1 选定节点个数 N 、第1次采样时刻 t_1 , 初始状态 \mathbf{x}_0 , 应用GPOPS离线计算开环最优控制 $\mathbf{u}_0^*(\mathbf{x}(t_0), t)$;

步骤2 在区间 $[t_0, t_1]$ 内, 将最优控制 $\mathbf{u}_0^*(\mathbf{x}(t_0), t)$ 应用于系统上, 记 t_1 时刻的状态测量值为 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$, 令 $i = 1$;

步骤3 在区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 内, 将开环最优控制 $\mathbf{u}_{i-1}^*(\mathbf{x}(t_{i-1}), t)$ 应用于系统上; 同时, 根据 t_i 时刻的状态测量值 $\mathbf{x}(t_i)$, 应用GPOPS实时计算开环最优控制 $\mathbf{u}_i^*(\mathbf{x}(t_i), t)$, $t \in [t_i, t_f]$, 设 Δt_i 为优化计算时间, 则 $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$;

步骤4 令 $i = i + 1$, 返回步骤3.

以 $\mathbf{u}_2^*(\mathbf{x}(t_2), t)$ 为例, 来说明最优反馈控制的实施过程: 用 $\mathbf{u}_2^*(\mathbf{x}(t_2), t)$ 表示以 t_2 时刻状态测量值 \mathbf{x}_2 为初始条件、 \mathbf{x}_f 为末端条件, 采用GPOPS优化得到的开环最优控制, 记所需的优化时间为 Δt_2 , 在此期间, 作用于系统上的最优控制为前一次已经优化得到的开环最优控制 $\mathbf{u}_1^*(\mathbf{x}(t_1), t)$, 而在 $t_2 + \Delta t_2 = t_3$ 时刻后, 最优控制 $\mathbf{u}_2^*(\mathbf{x}(t_2), t)$ 才被应用于系统上, 且

应用时间长短取决于以 \mathbf{x}_3 为初始条件、 \mathbf{x}_f 为末端条件, 优化计算新的开环最优控制所需的时间。

开环最优控制的这一连续更新过程保证了该算法具备实时、在线应用能力。

注1 t_1 的选取是为了利用离线优化已经得到的开环最优控制 \mathbf{u}_0^* , 避免以 t_0 时刻的状态测量值 \mathbf{x}_0 为初始条件进行再次优化。

注2 算法的采样周期不固定, 取决于每次优化求解式(1)的时间 Δt_i 。

3 稳定性分析(Stability analysis)

下面, 在同时考虑计算误差、模型参数不确定性和外界干扰下, 对反馈控制系统的稳定性进行分析。假设以下条件成立(除特殊标明外, 均表示 L_2 范数):

1) 系统(2)受到的模型参数不确定性和外界干扰有界, 即存在 $\varepsilon_p > 0$ 和 $\varepsilon_d > 0$, 使得 $\|p - p_0\| \leq \varepsilon_p$, $\|d\|_{L_\infty} \leq \varepsilon_d$ 成立。

2) 函数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t; p)$ 关于其变量满足 Lipschitz 连续条件, 即存在常数 $L_{fx} > 0$, $L_{fu} > 0$, $L_{fp} > 0$, 使得下列不等式成立:

$$\|f(\mathbf{x}, \mathbf{u}; p) - f(\mathbf{y}, \mathbf{v}; q)\| \leq L_{fx}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + L_{fu}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + L_{fp}\|p - q\|.$$

3) 令 $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}^1, t)$ 和 $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}^2, t)$ 是以 \mathbf{x}^1 和 \mathbf{x}^2 (\mathbf{x}^1 和 \mathbf{x}^2 任意取定) 为初始状态的最优控制。假设存在 $L_1 > 0$, 对所有的 $t \in [t_0, \infty)$, 有

$$\|\mathbf{u}^*(\mathbf{x}^1, t) - \mathbf{u}^*(\mathbf{x}^2, t)\| \leq L_1\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|.$$

4) 设 $\mathbf{u}_i(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ 为通过 2.2 部分中的算法应用于系统上的控制, 由于计算误差的作用, 有 $\mathbf{u}_i(t) \neq \mathbf{u}_{i-1}^*(t)$, 假设计算误差一致有界, 则存在常数 $\varepsilon_1 > 0$, 使得对任意的 $t \in [t_i, t_{i+1}]$, 有 $\|\mathbf{u}_i(t) - \mathbf{u}_{i-1}^*(t)\| \leq \varepsilon_1$ 成立。

5) 对任意的初始条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, 式(1)都有一个最优解 $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0, t)$; 且对非线性系统 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0, t), p_0)$, 在一个 Lyapunov 函数 $V(\mathbf{x}) \in C^1$ 及常数 $c_i > 0$ ($i = 1, \dots, 4$), 满足

$$\begin{aligned} c_1\|\mathbf{x}\|^2 &\leq V(\mathbf{x}) \leq c_2\|\mathbf{x}\|^2, \\ \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0, t), p_0) &\leq -c_3\|\mathbf{x}\|^2, \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right\| &\leq c_4\|\mathbf{x}\|^2. \end{aligned}$$

设 $\mathbf{x}_R(t)$ 和 $\mathbf{x}_{M_i}(t)$ 分别表示采样区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 内, 以 $\mathbf{x}_R(t_i)$ 为初始条件, 在实际控制 $\mathbf{u}_i(t)$ 和开环最优控制 $\mathbf{u}_i^*(t)$ 驱动下的实际系统轨迹和参考系统轨迹, 则对 $t \in [t_i, t_{i+1}]$, 实际系统轨迹满足

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_R(t) &= f(\mathbf{x}_R(t), \mathbf{u}_i(t), p) + d(t), \\ \mathbf{x}_R(t_i) &= \mathbf{x}_R(t_i). \end{aligned}$$

参考系统轨迹满足

$$\dot{\mathbf{x}}_{M_i}(t) = f(\mathbf{x}_{M_i}(t), \mathbf{u}_i^*(t), p_0),$$

$$\mathbf{x}_{M_i}(t_i) = \mathbf{x}_R(t_i).$$

定理1 最优反馈控制按 2.2 节中的算法设计, 令 Δt_{\max} 和 Δt_{\min} 分别表示最大、最小采样周期, 假设 1)–5) 成立, 则存在一个固定的常数 ΔT (满足 $\Delta t_{\max} \leq \Delta T$), 使得对任意的初始条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, 闭环系统的状态对所有的 $t \in [t_0, \infty)$ 都是有界的, 即存在一个正常数 M_0 , 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_R(t)\| \leq (\varepsilon_1 L_{fu} + \varepsilon_p L_{fp} + \varepsilon_d) \cdot M_0,$$

$$\text{其中 } M_0 = \frac{2c_4 \Delta t_{\max} e^{L_{fx} \Delta t_{\max}}}{c_1 - c_1 e^{-c_3 \Delta t_{\min}}}.$$

证 设 $\mathbf{x}_{M(i-1)}(t_{i-1})$ 为第 $i-1$ 次采样时刻的参考状态, 则 $\mathbf{u}_{i-1}^*(t)$, $t \geq t_{i-1}$ 表示以 $\mathbf{x}_{M(i-1)}(t_{i-1})$ 为初始条件, 式(1)的最优解。由 Bellman 最优性原理可知, $\mathbf{u}_{i-1}^*(t)$, $t \geq t_i$ 是以 $\mathbf{x}_{M(i-1)}(t_i)$ 为初始条件的最优控制。因此, 对任意的 $t \in [t_i, t_{i+1}]$, 由假设 3) 和 4) 可知

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_i(t) - \mathbf{u}_i^*(t)\| &\leq \\ \|\mathbf{u}_i(t) - \mathbf{u}_{i-1}^*(t)\| + \|\mathbf{u}_{i-1}^*(t) - \mathbf{u}_i^*(t)\| &\leq \\ \varepsilon_1 + L_1 \|\mathbf{x}_{M(i-1)}(t_i) - \mathbf{x}_R(t_i)\|. \end{aligned} \quad (3)$$

由假设 1)–2) 及式(3)有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_R(t) - \mathbf{x}_{M_i}(t)\| &\leq \\ L_{fx} \int_{t_i}^t \|\mathbf{x}_R(\tau) - \mathbf{x}_{M_i}(\tau)\| d\tau + \\ L_{fu} \Delta t_i (\varepsilon_1 + L_1 \|\mathbf{x}_{M(i-1)}(t_i) - \mathbf{x}_R(t_i)\|) + \\ \Delta t_i L_{fp} \varepsilon_p + \Delta t_i \varepsilon_d. \end{aligned} \quad (4)$$

进一步, 由 Gronwall 不等式可得

$$\|\mathbf{x}_R(t) - \mathbf{x}_{M_i}(t)\| \leq [K_1 + L_{fu} L_1 \|\mathbf{x}_{M(i-1)}(t_i) - \mathbf{x}_R(t_i)\|] \Delta t_i e^{L_{fx} \Delta t_i},$$

其中 $K_1 = \varepsilon_1 L_{fu} + \varepsilon_p L_{fp} + \varepsilon_d$ 。

令 $t = t_{i+1}$, 则

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_R(t_{i+1}) - \mathbf{x}_{M_i}(t_{i+1})\| &\leq \\ K_1 \Delta t_i e^{L_{fx} \Delta t_i} + \\ L_{fu} L_1 \Delta t_i e^{L_{fx} \Delta t_i} \|\mathbf{x}_{M(i-1)}(t_i) - \mathbf{x}_R(t_i)\|. \end{aligned}$$

取 ΔT 使得下述等式成立:

$$2L_{fu} L_1 \Delta T e^{L_{fx} \Delta T} = 1. \quad (5)$$

于是, 对所有的 $\Delta t_{\max} \leq \Delta T$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_R(t_{i+1}) - \mathbf{x}_{M_i}(t_{i+1})\| &\leq \\ K_1 \Delta t_{\max} e^{L_{fx} \Delta t_{\max}} + \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_R(t_i) - \mathbf{x}_{M(i-1)}(t_i)\| &\leq \\ K_1 \Delta t_{\max} e^{L_{fx} \Delta t_{\max}} + \frac{1}{2} K_1 \Delta t_{\max} e^{L_{fx} \Delta t_{\max}} + \\ \frac{1}{2^2} \|\mathbf{x}_R(t_{i-1}) - \mathbf{x}_{M(i-2)}(t_{i-1})\| &\leq \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{2^k} K_1 \Delta t_{\max} e^{L_{fx} \Delta t_{\max}} + \frac{1}{2^i} \|\mathbf{x}_R(t_1) - \mathbf{x}_{M0}(t_1)\|.$$

由2.2节算法的步骤1-2可知

$$\|\mathbf{x}_R(t_1) - \mathbf{x}_{M0}(t_1)\| \leq K_1 \Delta t_{\max} e^{L_{fx} \Delta t_{\max}},$$

因此

$$\|\mathbf{x}_R(t_{i+1}) - \mathbf{x}_{Mi}(t_{i+1})\| \leq 2K_1 \Delta t_{\max} e^{L_{fx} \Delta t_{\max}}. \quad (6)$$

另一方面,由均值定理和条件5)可知, $\sqrt{V(\mathbf{x})}$ 关于 \mathbf{x} 是Lipschitz连续的,且对所有的 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}^n$,有下式成立:

$$|\sqrt{V(\mathbf{x}^1)} - \sqrt{V(\mathbf{x}^2)}| \leq \frac{c_4}{\sqrt{c_1}} \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|,$$

故

$$\sqrt{V(\mathbf{x}_R(t))} \leq \frac{c_4}{\sqrt{c_1}} \|\mathbf{x}_R(t) - \mathbf{x}_{Mi}(t)\| + \sqrt{V(\mathbf{x}_{Mi}(t))}. \quad (7)$$

同时,由假设5)及比较引理有

$$V(\mathbf{x}(t)) \leq e^{-\frac{c_3(t-t_0)}{c_2}} V(\mathbf{x}(t_0)). \quad (8)$$

在式(7)-(8)中令 $t = t_{i+1}$,结合式(6),有下列不等式成立:

$$\begin{aligned} \sqrt{V(\mathbf{x}_R(t_{i+1}))} &\leq \frac{c_4}{\sqrt{c_1}} \|\mathbf{x}_R(t_{i+1}) - \mathbf{x}_{Mi}(t_{i+1})\| + \sqrt{V(\mathbf{x}_{Mi}(t_{i+1}))} \\ &\leq \frac{c_4}{\sqrt{c_1}} \|\mathbf{x}_R(t_{i+1}) - \mathbf{x}_{Mi}(t_{i+1})\| + \\ &e^{-\frac{c_3(t_{i+1}-t_i)}{2c_2}} \sqrt{V(\mathbf{x}_{Mi}(t_i))} \leq \\ &K_1 K_2 + e^{-\frac{c_3(t_{i+1}-t_i)}{2c_2}} \sqrt{V(\mathbf{x}_{Mi}(t_i))}, \end{aligned}$$

其中 $K_2 = \frac{2c_4}{\sqrt{c_1}} \Delta t_{\max} e^{L_{fx} \Delta t_{\max}}$.

由于 $\mathbf{x}_{Mi}(t)$ 和 $\mathbf{x}_R(t)$ 是从相同初始状态出发的两条轨迹,故 $\mathbf{x}_{Mi}(t_i) = \mathbf{x}_R(t_i)$,从而

$$\begin{aligned} \sqrt{V(\mathbf{x}_R(t_{i+1}))} &\leq \\ K_1 K_2 + e^{-\frac{c_3(t_{i+1}-t_i)}{2c_2}} \sqrt{V(\mathbf{x}_R(t_i))} &\leq \\ K_1 K_2 + e^{-\frac{c_3(t_{i+1}-t_i)}{2c_2}} (K_1 K_2 + \\ e^{-\frac{c_3(t_i-t_{i-1})}{2c_2}} \sqrt{V(\mathbf{x}_R(t_{i-1}))}) &\leq \\ \vdots & \\ \frac{K_1 K_2}{1 - e^{-\frac{\Delta t_{\min} c_3}{2c_2}}} + e^{-\frac{c_3 t_{i+1}}{2c_2}} \sqrt{V(\mathbf{x}_R(t_0))}. &\quad (9) \end{aligned}$$

由假设5)可知 $\|\mathbf{x}\| \leq \frac{\sqrt{V(\mathbf{x})}}{c_1}$,结合不等式(9), $\mathbf{x}_R(t_i)$ 对所有的 $i = 1, 2, \dots$ 是有界的,即

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_R(t_i)\| \leq (\varepsilon_1 L_{fu} + \varepsilon_p L_{fp} + \varepsilon_d) M_0,$$

其中 $M_0 = \frac{2c_4 \Delta t_{\max} e^{L_{fx} \Delta t_{\max}}}{c_1 - c_1 e^{-c_3 \Delta t_{\min}}}$.

从定理1的证明过程还可以得到以下结论:

1) 由式(5)可知, ΔT 的取值与系统的Lipschitz常

数(L_{fx}, L_{fu})和 L_1 有关.

2) 由式(6)可知,实际轨迹与参考轨迹误差的界值大小受到计算误差、不确定性和扰动的影响.

4 应用实例(Application example)

下面以高超飞行器再入制导为应用对象,验证实时最优反馈算法对系统不确定性和外界干扰的抑制效果.

4.1 再入制导问题描述(Problems statement of reentry guidance)

考虑地球为旋转圆球时,高超声速飞行器无动力再入运动学方程如下:

$$r = V \sin \gamma, \quad \dot{\theta} = \frac{V \cos \gamma \sin \psi}{r \cos \phi}, \quad \dot{\phi} = \frac{V \cos \gamma \cos \psi}{r},$$

$$\dot{V} = -\frac{D}{m} - g \sin \gamma + \Omega^2 r \cos \phi \sin \gamma \cos \phi -$$

$$\Omega^2 r \cos \phi \cos \gamma \cos \psi \sin \phi$$

$$\dot{\gamma} = \frac{L \cos \sigma}{mV} + \left(\frac{V}{r} - \frac{g}{V}\right) \cos \gamma + 2\Omega \cos \phi \sin \psi +$$

$$\frac{\Omega^2 r}{V} \cos \phi (\cos \gamma \cos \phi - \sin \gamma \sin \phi \cos \psi)$$

$$\dot{\psi} = \frac{L \sin \sigma}{mV \cos \gamma} + \frac{V}{r} \cos \gamma \sin \psi \tan \phi -$$

$$\Omega (\tan \gamma \cos \phi \cos \psi - \sin \phi) +$$

$$\frac{\Omega^2 r}{V \cos \gamma} \sin \phi \cos \phi \sin \psi,$$

其中: r, V, Ω, g 表示地心距、速度、地球旋转角速度和重力加速度; $\theta, \phi, \gamma, \psi$ 表示经度、纬度、飞行路径角和航向角.

升力 L 、阻力 D 表示如下:

$$L = \frac{1}{2} \rho(r) V^2 C_L S_{\text{ref}}, \quad D = \frac{1}{2} \rho(r) V^2 C_D S_{\text{ref}},$$

其中: $\rho(r) = \rho_0 e^{-\beta(r-r_0)}$, $C_L(\alpha, M) = a_0 + a_1 \alpha$, $C_D(\alpha, M) = b_0 + b_1 \alpha + b_2 \alpha^2$, a_0, a_1, b_0, b_1, b_2 由文献[13]中的数据采用最小二乘法拟合得到.

为限制实际执行机构的变化速率,令 $\dot{\alpha} = u_1$, $\dot{\sigma} = u_2$,将原6状态运动方程改写为向量形式的8状态动力学与运动学模型,其状态空间 X 控制空间 U 定义如下(L 表示下界, U 表示上界):

$$X = \{(r, \theta, \phi, V, \gamma, \psi, \alpha, \sigma) \in \mathbb{R}^8 :$$

$$x_i^L \leq x_i \leq x_i^U, i = 1, \dots, 8\},$$

$$U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_i^L \leq u_i \leq u_i^U, i = 1, 2\}.$$

为保证飞行器在结构和热防护上的可靠性,再入过程要求严格满足热流、动压和过载约束:

$$\dot{Q} = k \sqrt{\rho(r)} V^{3.15} \leq \dot{Q}_{\max},$$

$$n = |L \cos \alpha + D \sin \alpha| \leq n_{Z \max},$$

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2 \leq q_{\max},$$

其中: $k = 4.47228 \times 10^{-9}$, $\dot{Q}_{\max} = 600 \text{ W/cm}^2$, $|n_{Z\max}| = 4$, $q_{\max} = 1000 \text{ kPa}$.

为提高末制导段的攻击精度, 在再入段结束时引入如下终端约束:

$$h_f \geq 20 \text{ km}, V_f \geq 1 \text{ km/s}, \theta_f = -70.3^\circ, \phi_f = 39.5^\circ.$$

热防护问题是高超声速再入飞行器系统设计的难点之一, 优化的一个重要指标就是减小气动热、降低隔热系统的重量, 增加有效载荷比重, 因此以再入过程的热流作为优化指标:

$$Q_s = \int_{t_0}^{t_f} \dot{Q} dt.$$

4.2 仿真结果与分析(Simulation results and analysis)

仿真中对各变量的限制如下:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -90^\circ \\ -89^\circ \\ 1 \text{ km/s} \\ -89^\circ \\ -180^\circ \\ -20^\circ \\ -80^\circ \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} h \\ \theta \\ \phi \\ V \\ \gamma \\ \psi \\ \alpha \\ \sigma \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 60 \\ 90^\circ \\ 89^\circ \\ 6 \text{ km/s} \\ 89^\circ \\ 180^\circ \\ 20^\circ \\ 80^\circ \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -3^\circ \\ -3^\circ \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\sigma} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3^\circ \\ 3^\circ \end{pmatrix}.$$

仿真中主要考虑模型误差(升力、阻力系数引起的误差, 波动范围设为 $\pm 20\%$)和阵风扰动(假设飞行器在飞行至200–300s之间遇到速度为91.6 m/s的正南方向阵风的干扰)的作用. 下面是实际系统与参考系统在上述干扰的作用下, 制导信号、状态轨迹与地面跟踪轨迹的对比结果.

图2给出了本文算法中开环最优制导信号的优化时间(横坐标表示第*i*次优化, 纵坐标为优化时间), 从图2中可以看出, 开环制导信号的平均优化时间在4–5s内. 开环最优制导信号的连续更新过程保证了本文算法的实时、在线应用能力.

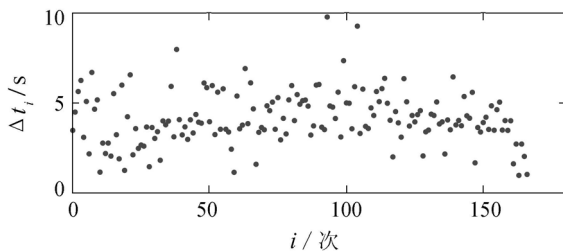


图2 开环制导信号的优化时间

Fig. 2 The optimization time of open-loop guidance signals

构成的实时最优反馈(闭环)制导信号与针对参考系统所设计的开环最优制导信号是不同的.

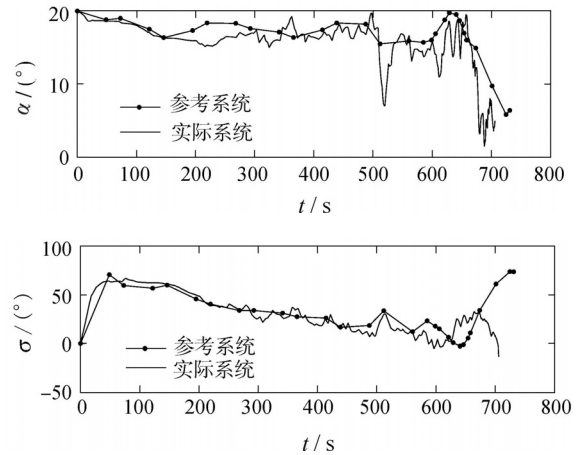
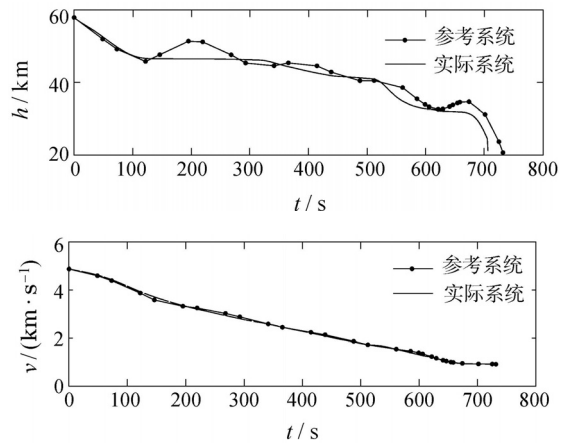


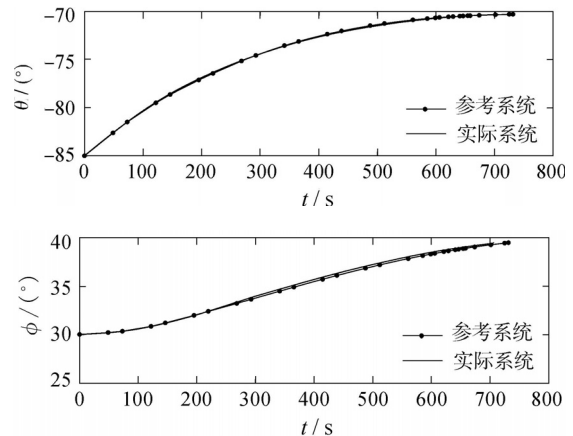
图3 制导信号

Fig. 3 Guidance signals

图4是不同制导信号作用下的状态轨迹. 由图4可见, 由于受到了模型参数不确定性和阵风扰动的作用, 实际系统轨迹明显偏离了参考系统轨迹, 但在闭环制导信号的作用下, 终端约束条件(高度、速度、经度和纬度)得到了满足.

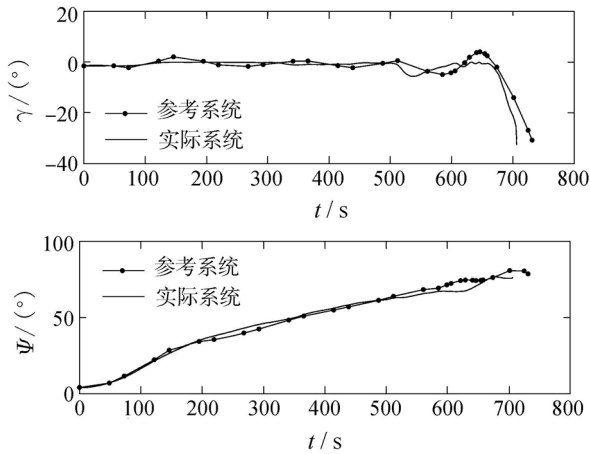


(a) 高度、速度曲线



(b) 经度、纬度曲线

图3为实际系统与参考系统的制导信号对比图. 从图中可以明显看出, 由连续开环最优制导信号所



(c) 飞行路径角、航向角曲线

图4 状态轨迹

Fig. 4 State trajectory

图5为地面跟踪轨迹的对比图. 从图5中可明显看出, 连续开环最优制导所构成的实时最优反馈(闭环)制导信号能够有效抑制模型参数不确定性和阵风干扰引起的制导误差, 使飞行器达到期望的终端位置.

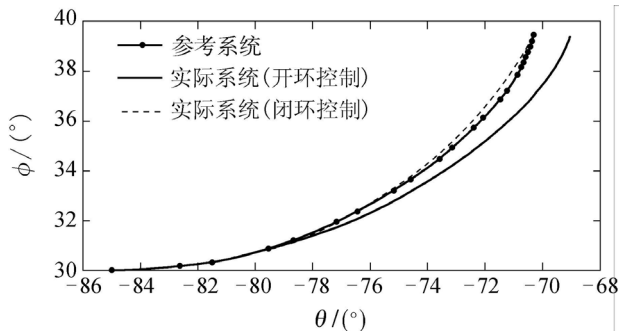


图5 地面跟踪轨迹

Fig. 5 Ground tracks

5 结束语(Conclusion)

利用基于高斯伪谱方法的优化软件在计算最优控制问题数值解上的优势, 给出了一种不要求解跟踪控制解析解的实时最优反馈控制算法, 并证明了闭环控制系统的有界稳定性.

该算法具有如下特点:

1) 在不考虑计算误差、模型不确定性和干扰的理想情况下, 采用该算法构成的闭环控制系统是渐近稳定的, 且闭环轨迹紧随开环轨迹; 在考虑计算误差、模型不确定性和干扰的情况下, 采用该算法构成的闭环控制系统是有界稳定的.

2) 由于在每个采样周期内均可获得实时最优解, 从而避免了传统控制增益调整问题. 仿真表明了该算法对飞行器再入飞行过程中的不确定性和扰动具有较强的鲁棒性.

参考文献(References):

- [1] MRITZ D, HANS G B. Real-time iterations for nonlinear optimal feedback control [C] // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*. New York: IEEE, 2005, 12: 12 – 15.
- [2] GARG D, MICHAEL P, HAGER W, et al. A unified framework for the numerical solution of optimal control problem using pseudospectral methods [J]. *Automatica*, 2010, 46(11): 1843 – 1851.
- [3] GONG Q, KANG W, ROSS I M, et al. Pseudospectral optimal control for military and industrial applications [C] // *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*. LA, USA: IEEE, 2007, 8: 4128 – 4142.
- [4] ROSS I M, GONG Q, FAHROO F, et al. Practical stabilization through real-time optimal control [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Minnesota, USA: IEEE, 2006, 6: 14 – 16.
- [5] ROSS I M, POOYA S, FLEMINGZET A, et al. Pseudospectral feedback control: foundations, examples and experimental results [C] // *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. Colorado, USA: AIAA, 2006, 8: 21 – 24.
- [6] KEVIN P. A pseudospectral feedback method for real-time optimal guidance of reentry vehicles [C] // *Proceeding of the 2007 American Control Conference*. New York: IEEE, 2007, 7: 3861 – 3867.
- [7] KANG W. The rate of convergence for a pseudospectral optimal control method [C] // *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*. Mexico: IEEE, 2008, 12: 9 – 11.
- [8] KANG W. Rate of convergence for the Legendre pseudospectral optimal control of feedback linearizable systems [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2010, 8(4): 391 – 405.
- [9] HUNTINGTON G T, BENSON D, RAO A V. A comparison of accuracy and computational efficiency of three pseudospectral methods [C] // *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*. South Carolina, USA: AIAA, 2007, 8(4): 20 – 23.
- [10] GONG Q, FAHROO F, ROSS I M. A spectral algorithm for pseudospectral methods in optimal control [J]. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2008, 31(3): 460 – 471.
- [11] DARBY C L, HAGERR W, RAO A V. An hp-adaptive pseudospectral method for solving optimal control problems [J]. *Optimal Control Application and Methods*, 2011, 32(4): 476 – 502.
- [12] RAO A V, BENSON D, HUNTINGTON G T, et al. Algorithm 902: GPOPS, a MATLAB software for solving multiple-phase optimal control problems using gauss pseudospectral methods [J]. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 2010, 37(2): 22 – 39.
- [13] CORPORATON T P. *A common aero vehicle model, description, and employment guide* [EB/OL]. www.dtic.mil/matris/sbir/sbir041/srch/af031a.doc, 2003.

作者简介:

张友安 (1963–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为导航、制导与先进控制技术, E-mail: zhangya63@sina.com;

王丽英 (1981–), 女, 博士研究生, 目前研究方向为先进控制技术及其在制导中的应用, E-mail: ytluyingwang@163.com;

赵国荣 (1964–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为导航、制导与控制, E-mail: grzhao6881@163.com.