

# 视觉与惯性传感器融合的隐式卡尔曼滤波位置估计算法

杜光勋<sup>1</sup>, 全 权<sup>1,2</sup>, 蔡开元<sup>1</sup>

(1. 北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191;

2. 北京航空航天大学 虚拟现实技术与系统国家重点实验室, 北京 100191)

**摘要:** 机器人对自身位置的实时感知在机器人技术中非常重要. 本文主要研究机器人技术中一类基于视觉与惯性传感器的位置估计问题. 与传统的状态估计问题不同的是, 所研究位置估计问题为带有隐式观测方程的线性状态估计问题. 为此提出一种能够解决此类估计问题的隐式卡尔曼滤波器, 并给出了详细的滤波器设计过程. 另外采用扩展变量法将加速度信息中的偏移量作为滤波器状态来估计, 以补偿其对位置估计结果的影响. 仿真结果显示, 所给出的隐式卡尔曼滤波器收敛, 加速度偏移带来的影响被有效的补偿.

**关键词:** 视觉; 惯性; 传感器融合; 位置估计; 隐式卡尔曼滤波器

**中图分类号:** TP249      **文献标识码:** A

## Implicit Kalman filter for position estimation with visual and inertial sensor fusion

DU Guang-xun<sup>1</sup>, QUAN Quan<sup>1,2</sup>, CAI Kai-yuan<sup>1</sup>

(1. School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China;

2. State Key Laboratory of Virtual Reality Technology and Systems, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract:** In mobile robotics, position-sensing is crucial to a robot. We investigate a type of online position estimations based on visual and inertial sensor fusion. Being different from the traditional state estimation, our position estimation is a linear state estimation with implicit observation equations. To this end, an implicit Kalman filter is proposed and designed in details for this position estimation. Furthermore, a state augmentation method is employed in which the accelerometer bias is taken as a state of the filter to compensate for its effect to the position estimation results. Simulation results show that the implicit Kalman filter is convergent, and the effect of the accelerometer bias is eliminated from the position estimation.

**Key words:** vision; inertia; sensor fusion; position estimation; implicit Kalman filter

### 1 引言(Introduction)

在机器人技术中, 机器人能否实时感知自身的位置和运动状态非常重要<sup>[1]</sup>. 通常机器人的位置和姿态可以利用角速率陀螺和加速度的测量信息积分获得, 也可以利用计算机视觉的方法来估计<sup>[1-2]</sup>. 近年来, 由于视觉与微机械惯性传感器具有成本低、体积小、不需要外部设备(全球定位系统需要的定位卫星, 即为外部设备)以及各传感器之间的互补性等优势, 而在机器人技术中得到推广<sup>[3]</sup>.

在机器人技术中, 视觉与惯性传感器融合技术自从在文献[4]中被提出后, 逐渐得到学者关注. 惯性传感器适合测量高速和高加速运动物体的信息, 但测量低速运动物体信息时误差较大. 视觉传感器可以精确地跟踪低速运动物体, 却不能有效的跟踪高速运动物体. 这两种传感器具有明显的互补性, 如果

结合使用, 不仅可以得到丰富的信息、降低测量误差, 还能够增强测量系统的鲁棒性<sup>[1]</sup>. 近年来, 出现了大量关于视觉与惯性传感器融合的研究<sup>[1-4]</sup>.

文献[2]在视觉与惯性传感器融合研究中具有非常重要的作用. 作者研究了基于惯性传感器与单目摄像机的刚体位姿估计问题, 为视觉与惯性传感器融合提出了一个系统的理论框架. 其中, 视觉信息通过线图像特征匹配获得, 惯性信息通过惯性测量单元(inertial measurement unit, IMU)获得. 作者将刚体姿态估计与位置估计解耦, 首先利用控制理论的方法为姿态估计问题设计了局部收敛的观测器, 然后利用姿态估计的结果将位置估计问题表示为一个输出方程为隐式约束形式的线性系统状态估计问题. 然而作者并没有解决位置估计问题, 原因如下: 1) 位置估计的观测方程为隐式约束形式, 不能表示为位

置的显式表达,所以传统的状态估计方法不能解决这个问题;2)位置状态方程不稳定,作者针对这类观测方程为隐式约束形式的状态估计问题而给出的观测器<sup>[5]</sup>不能使用。

本文主要解决了文献[2]中未解决的位置估计问题.利用文献[2]中的工作,本文将位置估计问题表示为带有隐式观测方程的线性状态估计问题.这类带有隐式观测方程的线性状态估计问题,可以使用隐式卡尔曼滤波器来解决.隐式卡尔曼滤波器主要适用于处理带隐式观测方程的状态估计问题,由Soatto在文献[6]中首次给出完整递推表达式的推导,后来被学者引用<sup>[7-10]</sup>,也有的学者针对带有隐式状态方程的系统给出一类隐式卡尔曼滤波器<sup>[11]</sup>.本文根据文献[6]中隐式卡尔曼滤波器的设计思路,给出了位置估计问题的隐式卡尔曼滤波器.通常IMU给出的加速度计信息中带有常值或慢变的偏移量,针对这个问题,本文利用扩展变量法,将加速度计偏移作为系统状态来估计,实时的补偿其对位置估计结果的影响.在实际中,惯性传感器与视觉传感器的采样频率不同,考虑到这一点,本文对前面的隐式卡尔曼滤波器进行了修正,给出了多采样频率下相应的隐式卡尔曼滤波器递推方程.最后,本文对所给出的滤波器进行了仿真验证。

本文主要贡献如下:1)利用文献[2]中的工作,将位置估计问题表示为带有隐式观测方程的线性状态估计问题;2)利用文献[6]中隐式扩展卡尔曼滤波器的设计思路,为本文的位置估计问题设计了线性隐式卡尔曼滤波器;3)给出了补偿加速度计偏移的解决方法;4)为满足工程应用,给出了多采样频率下相应的隐式卡尔曼滤波器递推方程。

## 2 问题描述(Problem formulation)

考虑在空间中自由运动的刚体如图1所示,刚体上装备有单目摄像机和惯性测量单元(IMU).下面根据文献[2]的思路给出本文所研究问题的数学描述。

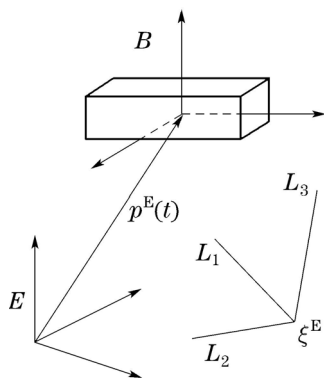


图1 刚体在空间中运动

Fig. 1 Rigid body moving in space

### 2.1 刚体运动学方程(Rigid body kinematics)

由于文献[2]已经解决了刚体姿态估计的问题,笔者主要研究刚体在惯性空间中的位置估计问题.如图1中:惯性坐标系被记为 $E$ ,与刚体固连的刚体坐标系被记为 $B$ ,设 $B$ 坐标系相对于 $E$ 坐标系的旋转姿态矩阵为 $R$ 已知.令 $x$ 为空间中任意一点,那么它在惯性系中的坐标记为 $x^E$ ,在刚体坐标系中的坐标记为 $x^B$ ,这两者之间的关系为

$$x^B = R(x^E - q^E), \quad (1)$$

其中 $q^E$ 为 $B$ 坐标系原点在 $E$ 坐标系中的坐标,其随着刚体在空间中运动而变化.假设摄像机中心与刚体中心重合(如果不重合,可以通过传感器标定来得到两者之间的相对位置关系),那么 $q^E$ 就是摄像机在惯性系中的位置.令 $n$ 为空间中任意一个向量,那么它在惯性系中的坐标记为 $n^E$ ,在刚体坐标系中的坐标记为 $n^B$ ,两坐标之间的关系为

$$n^B = Rn^E. \quad (2)$$

如果记 $p^E(t) = q^E$ ,  $v^E(t) = \frac{dq^E}{dt}$ 并且 $a^E(t) = \frac{d^2q^E}{dt^2}$ ,那么根据刚体运动学可得到摄像机运动的数学描述

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}p^E(t) = v^E(t), \\ \frac{d}{dt}v^E(t) = a^E(t), \end{cases} \quad (3)$$

其中: $p^E(t)$ 为摄像机在惯性系中的位置, $v^E(t)$ 为摄像机在惯性系中的运动速度, $a^E(t)$ 为摄像机在惯性系中的运动加速度。

### 2.2 传感器测量信息(Sensor measurements)

首先,分析IMU给出的测量信息.摄像机在刚体坐标系中的加速度为 $a^B(t)$ ,则其满足

$$a^B(t) = R(a^E(t) - g^E), \quad (4)$$

其中: $g^E = (0, 0, (-g))^T$ 为惯性系中的重力向量,取 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .那么根据式(4)可以得到

$$a^E(t) = R^T a^B(t) + g^E. \quad (5)$$

IMU可以直接给出摄像机在刚体坐标系中的加速度的测量值 $a_m^B(t)$ ,但是含有白噪声和常值偏移量(通常偏移量为常值或慢变的,本文为了分析方便假设其为常值)

$$a_m^B(t) = a^B(t) + \delta + \varepsilon(t), \quad (6)$$

其中: $\delta$ 为固定偏移量, $\varepsilon(t)$ 为均值为零的白噪声.所以有

$$a^B(t) = a_m^B(t) - \delta - \varepsilon(t). \quad (7)$$

将式(7)代入式(5),可得

$$a^E(t) = R^T a_m^B(t) + g^E - R^T \delta - R^T \varepsilon(t). \quad (8)$$

记 $r(t) = R^T a_m^B(t) + g^E$ ,则有

$$a^E(t) = r(t) - R^T \delta - R^T \varepsilon(t). \quad (9)$$

下面, 本文分析视觉传感器单目摄像机给出的测量信息(如图2所示).  $O_C-xyz$ 为摄像机坐标系. 本文假设摄像机坐标系与刚体 $B$ 坐标系重合(如果不重合可通过多传感器标定的方法得到两坐标系的相对关系, 这对本文的问题没有影响), 则摄像机相对于惯性系的姿态矩阵为 $R$ .  $O-XY$ 为摄像机图像坐标系. 图1中的 $L_i (i = 1, 2, 3)$ 为空间中3条位置已知且相交于一点的直线, 作为视觉传感器单目摄像机的特征标志物<sup>[2]</sup>(这种特征在现实中比较常见, 比如屋内的墙角等建筑物拐角处), 要求3条直线不共面. 如图2所示, 3直线 $L_i (i = 1, 2, 3)$ 相交于在惯性坐标系中位置已知的点 $\xi^E$ ,  $d_i^E$ 为相应直线的方向向量. 设摄像机图像平面为 $P_1$ , 直线 $L_i$ 与摄像机中心 $O_C$ 构成的平面为 $P_C^i$ . 由式(2), 惯性系中向量 $d_i^E$ 和 $(p^E(t) - \xi^E)$ 在摄像机坐标系内为 $Rd_i^E$ 和 $R(p^E(t) - \xi^E)$ , 且都位于平面 $P_C^i$ 内. 于是平面 $P_C^i$ 的法向量 $\eta_i$ 为

$$\eta_i = (Rd_i^E) \times (R(p^E(t) - \xi^E)), \quad (10)$$

其中“ $\times$ ”为向量叉乘符号.

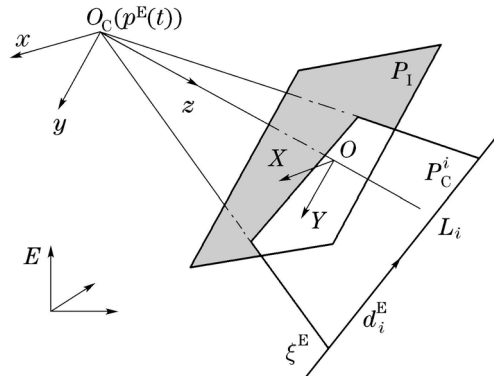


图 2 直线投影到图像平面示意图

Fig. 2 Line projected on the image plane

设直线 $L_i$ 在图像平面上投影直线为 $l_i$ (可以通过直线特征提取得到直线在图像平面内的方程). 记 $l_i$ 在图像坐标系内方向向量为 $d_{li} = (x_{li}, y_{li})^T$ , 由于图像平面与摄像机坐标系 $O_C-xy$ 平面平行, 直线 $l_i$ 在摄像机坐标系内方向向量为 $d_{li}^C = (x_{li}, y_{li}, 0)^T$ . 取 $l_i$ 上任意一点 $Q = (x_u, y_v)^T$ , 由于图像平面与摄像机坐标系 $z$ 轴垂直, 且与摄像机中心距离为摄像机焦距 $f$ ( $f$ 可通过摄像机标定得到), 则该点在摄像机坐标系内的坐标为 $Q^C = (x_u, y_v, f)^T$ . 那么摄像机坐标系内, 摄像机坐标系原点 $O_C$ 与点 $Q^C$ 构成的向量为 $q^C = (x_u, y_v, f)^T$ . 向量 $d_{li}^C$ 与 $q^C$ 都位于平面 $P_C^i$ 内且互不平行, 又由于 $\eta_i$ 为平面 $P_C^i$ 的法向量, 所以 $\eta_i$ 可以由下式计算得到:

$$\eta_i = d_{li}^C \times q^C. \quad (11)$$

根据式(11)得到的法向量依赖于直线在图像平面上

的投影, 为了将观测归一化需要对法向量 $\eta_i$ 的长度作出一定的假设<sup>[2]</sup>:

**假设 1**  $\|\eta_i\| \neq 0$ .

这个假设是合理的, 因为考虑 $\|\eta_i\| = 0$ 的情况, 如果以屋内墙角为参考点, 则摄像机坐标系的 $z$ 轴与所观测的两墙面的交线重合, 这是不可能的. 这样根据式(10)–(11)可使用下面等式作为视觉信息观测量<sup>[2]</sup>:

$$y_i = \mu_i \frac{\eta_i}{\|\eta_i\|} = \mu_i \frac{R\rho_i(t)}{\|\rho_i(t)\|}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (12)$$

其中 $\mu_i \in \{-1, 1\}$ 为未知符号参数, 并且

$$\rho_i(t) = d_i^E \times (p^E(t) - \xi^E), \quad (13)$$

显然向量 $(p^E(t) - \xi^E)$ 与向量 $\rho_i(t)$ 垂直. 那么, 由式(12)–(13)可得观测量 $y_i$ 的隐式约束:

$$(p^E(t) - \xi^E)^T R^T y_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (14)$$

### 2.3 位置估计问题(Position estimation problem)

根据前面的描述和分析, 可以由式(3)(9)将摄像机的运动学方程总结为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} p^E(t) = v^E(t), \\ \frac{d}{dt} v^E(t) = r(t) - R^T \delta - R^T \varepsilon(t), \end{cases} \quad (15)$$

其中加速度偏移 $\delta$ 为常量. 为了对其进行补偿本文将其作为系统状态处理, 同时考虑到 $\xi$ 为常量, 式(15)可以增广为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (p^E(t) - \xi^E) = v^E(t), \\ \frac{d}{dt} v^E(t) = r(t) + R^T(-\delta) - R^T \varepsilon(t), \\ \frac{d}{dt} (-\delta) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

将隐式约束(14)等号两边同时转置, 可以得到

$$y_i^T R(p^E(t) - \xi^E) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17)$$

令 $Y_1 = (y_1, y_2, y_3)_{3 \times 3}$ , 则由式(17)可以得到约束方程

$$Y_1^T R(p^E(t) - \xi^E) = 0. \quad (18)$$

约束方程(18)中要求 $Y_1$ 为真实值, 实际中由式(11)计算得到的 $\eta_i$ 与真实值有一定的偏差, 因此得到的是 $Y_1$ 的测量值 $M_1$ , 两者关系如下:

$$M_1 = Y_1 + V_1, \quad (19)$$

其中 $V_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 为测量噪声, 本文假设为白噪声.

记

$$x(t) = [(p^E(t) - \xi^E)^T \quad v^E(t)^T \quad (-\delta)^T]^T,$$

由式(16)(18)–(19)可得到摄像机位置估计问题的数学描述

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Br(t) + FW(t), \\ 0 = Y^T \bar{R}x(t), \\ M = Y + V, \end{cases} \quad (20)$$

其中:  $W(t) = -R^T \varepsilon(t) \in \mathbb{R}^3$  为系统噪声,

$$\begin{cases} A = \begin{pmatrix} 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & R^T \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{9 \times 9}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ I_3 \\ 0 \end{pmatrix}_{9 \times 3}, \\ F = \begin{pmatrix} 0 \\ I_3 \\ 0 \end{pmatrix}_{9 \times 3}, \bar{R} = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{9 \times 9}, \\ M = \begin{pmatrix} M_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{9 \times 3}, Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{9 \times 3}, \\ V = \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{9 \times 3}, \end{cases} \quad (21)$$

于是摄像机位置估计问题转化为式(20)所示系统的状态估计问题. 与传统的估计问题不同, 这里的观测方程为隐式约束形式, 测量信息为  $M$  (可由图像处理得到), 被观测状态为  $x$ , 摄像机姿态矩阵  $R$  已知. 由于传统的线性系统状态估计方法中用到的观测方程均为系统状态的显式表达, 所以传统的状态估计方法在这里不适用. 由式(21)中系数矩阵  $A$  的对角线元素为 0 可知系统不稳定, 所以文献[5]中的观测器在这里不适用. 下一部分将介绍如何设计能够解决这类带有隐式约束观测方程的线性状态估计问题的滤波器.

### 3 隐式卡尔曼滤波器设计 (Implicit Kalman filter design)

在实际应用中, 本文的滤波算法是离散形式的, 所以设计滤波器前需要对系统(20)进行离散化. 设系统(20)的状态在某时刻的最优预测值为  $\hat{x}$ , 测量值为  $M$ , 本文中隐式卡尔曼滤波器的设计思路是: 将隐式约束的观测方程在参考点  $(\hat{x}, M)$  处线性化, 得到等效的线性观测方程, 然后利用经典卡尔曼滤波器的设计过程得到本文滤波器的递推方程. 设计流程参见图3.

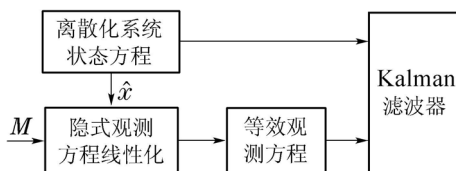


图3 隐式卡尔曼滤波器设计

Fig. 3 Implicit Kalman filter design

### 3.1 系统离散化 (System discretization)

考虑到实际应用, 将式(20)所示系统离散化. 设系统采样周期为  $T_s$ , 为了简化离散过程中的计算, 假设采样周期内系统输入及噪声无变化, 得到离散系统状态方程

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi(k+1, k)x(k) + G(k+1, k)r(k) + \\ &\quad \Gamma(k+1, k)W(k) \end{aligned} \quad (22)$$

和带有隐式约束的观测方程

$$\begin{cases} H(x(k+1), Y(k+1)) = \\ Y^T(k+1)\bar{R}(k+1)x(k+1) = 0, \\ M(k+1) = Y(k+1) + V(k+1), \end{cases} \quad (23)$$

其中:

$$\begin{cases} \Phi(k+1, k) = e^{A(k+1-k)T_s} = e^{AT_s} = \\ \begin{pmatrix} I_3 & T_s I_3 & \frac{1}{2} T_s^2 R^T(k) \\ 0 & I_3 & T_s R^T(k) \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}_{9 \times 9}, \\ G(k+1, k) = \\ \int_k^{k+1} \Phi(k+1, \tau) B(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} T_s^2 I_3 \\ T_s I_3 \\ 0 \end{pmatrix}_{9 \times 3}, \\ \Gamma(k+1, k) = \\ \int_k^{k+1} \Phi(k+1, \tau) F(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} T_s^2 I_3 \\ T_s I_3 \\ 0 \end{pmatrix}_{9 \times 3}. \end{cases} \quad (24)$$

### 3.2 等效观测方程 (Equivalent observation equation)

设  $k$  时刻系统状态最优估计值为  $\hat{x}(k|k)$ , 则  $k+1$  时刻系统状态的预测值为

$$\hat{x}(k+1|k) = \Phi(k+1, k)\hat{x}(k|k) + G(k+1, k)r(k). \quad (25)$$

根据文献[6]中设计隐式卡尔曼滤波器的思想, 将观测方程(23)中的隐式约束方程在参考点  $(\hat{x}(k+1|k), M(k+1))$  处线性化, 为了表示方便, 记  $\alpha = \hat{x}(k+1|k)$ ,  $\beta = M(k+1)$ , 有

$$\begin{aligned} H(x(k+1), Y(k+1)) &= \\ H(\alpha, \beta) + C(\alpha, \beta)(x(k+1) - \alpha) + \\ D(\alpha, \beta) \text{vec}(Y(k+1) - \beta) + \Theta(\delta^2) &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

其中:  $\text{vec}(\cdot)$  为矩阵拉直运算符,  $\Theta(\delta^2)$  为可以忽略的线性化误差量,

$$C(\alpha, \beta)_{3 \times 9} = \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_{|\alpha, \beta} = \beta^T \bar{R},$$

$$D(\alpha, \beta)_{3 \times 27} = \left( \frac{\partial \text{vec}(H)}{\partial \text{vec}(Y)} \right)_{|\alpha, \beta} = I_3 \otimes (\bar{R}\alpha)^T,$$

$$\delta^2 \triangleq$$

$$\{ \|x(k+1) - \alpha\|^2, \|Y(k+1) - \beta\|^2 \}. \quad (27)$$

根据式(23)(26), 可得系统等效观测方程

$$H(\alpha, \beta) = -C(\alpha, \beta)(x(k+1) - \alpha) + D(\alpha, \beta)\bar{V}(k+1), \quad (28)$$

其中  $\bar{V}(k+1) = \text{vec}(V(k+1)) \in \mathbb{R}^{27}$  为等效观测噪声. 传统的状态估计问题中的观测方程为如下形式:

$$Z = H_Z x_Z + V_Z, \quad (29)$$

其中:  $Z$  为直接测量量,  $H_Z, V_Z$  为系数矩阵,  $x_Z$  为系统状态. 则等效观测方程(28)与式(29)的对应如下:

$$\begin{cases} Z = H(\alpha, \beta), \\ H_Z = -C(\alpha, \beta), \\ V_Z = D(\alpha, \beta)\bar{V}(k+1). \end{cases} \quad (30)$$

这样通过对隐式约束形式的观测方程进行处理得到等效观测方程, 把一个隐式卡尔曼滤波设计问题变成了一个经典的卡尔曼滤波器设计问题, 下一部分将给出卡尔曼滤波器的设计. 滤波器的稳定性证明请参考附录内容.

### 3.3 隐式卡尔曼滤波器(Implicit Kalman filter)

由系统状态方程(22)和等效观测方程(28), 可以根据经典线性卡尔曼滤波器的设计方法得到隐式卡尔曼滤波器递推方程:

预测方程: 假设  $k$  时刻滤波结果为  $\hat{x}(k|k)$ , 估计误差的协方差矩阵为  $P(k|k)$ , 则

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1|k) = \\ \Phi(k+1, k)\hat{x}(k|k) + G(k+1, k)r(k), \\ P(k+1|k) = \\ \Phi(k+1, k)P(k|k)\Phi^T(k+1, k) + \\ \Gamma(k+1, k)Q_k\Gamma^T(k+1, k), \end{cases} \quad (31)$$

其中建模误差的协方差矩阵  $Q_k = \text{var}(W(k)) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . 滤波更新方程为

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1) \cdot \Delta, \\ K(k+1) = \\ -P(k+1|k)C^T[CP(k+1|k)C^T + R_{k+1}]^{-1}, \\ P(k+1|k+1) = \\ P(k+1|k) + K(k+1)CP(k+1|k), \end{cases} \quad (32)$$

其中:  $R_{k+1} = D\text{var}(\bar{V})D^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  为测量误差的协方差矩阵, 系数矩阵  $C, D$  的值根据式(27)得到,  $\Delta$  为修正量, 计算如下:

$$\begin{aligned} \Delta &= H(\hat{x}(k+1|k), M) + \\ & (C(\hat{x}(k+1|k), M)(\hat{x}(k+1|k) - \\ & \hat{x}(k+1|k))) = H(\hat{x}(k+1|k), M) + 0 = \\ & M^T \bar{R} \hat{x}(k+1|k). \end{aligned} \quad (33)$$

## 4 多采样频率滤波器设计(Multirate filter design)

在第3部分中, 笔者默认视觉与惯性传感器的采样频率相同. 但是实际应用中, 视觉信息需要经过特征提取和匹配处理, 这会占用一定的时间, 再加上视觉传感器采样频率通常比惯性传感器低, 所以需要前面给出的滤波器进行修正.

假设在本文所研究系统中, IMU的采样周期为  $T_i$ , 视觉信息采样周期为  $T_v$ , 则本文采用文献[13]中设计切换卡尔曼滤波器的思想, 给出如下修正: 在式(22)中, 令  $T_s = T_i$ , 且当有IMU信息, 即  $t_k = kT_i$  时,

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) = \\ \Phi(k+1, k)\hat{x}(k|k) + G(k+1, k)r(k), \\ P(k+1|k+1) = \\ \Phi(k+1, k)P(k|k)\Phi^T(k+1, k) + \\ \Gamma(k+1, k)Q_k\Gamma^T(k+1, k). \end{cases} \quad (34)$$

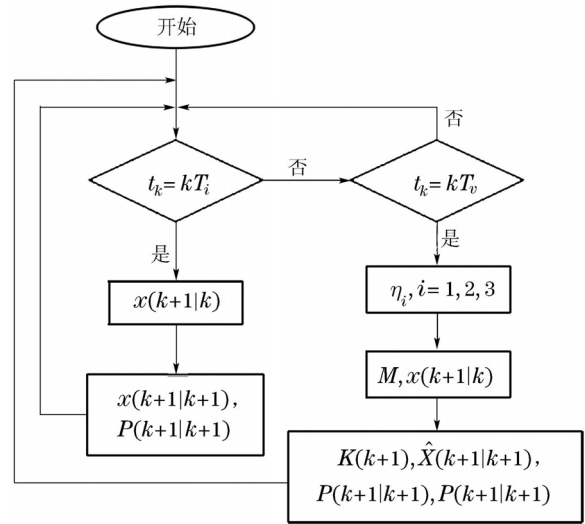


图4 隐式卡尔曼滤波器滤波流程图

Fig. 4 Implicit Kalman filter

当有视觉信息, 即  $t_k = kT_v$  时,

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1|k) = \\ \Phi(k+1, k)\hat{x}(k|k) + G(k+1, k)r(k), \\ \hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1) \cdot \Delta, \\ K(k+1) = \\ -P(k+1|k)C^T[CP(k+1|k)C^T + R_{k+1}]^{-1}, \\ P(k+1|k+1) = \\ P(k+1|k) + K(k+1)CP(k+1|k), \\ P(k+1|k) = \\ \Phi(k+1, k)P(k|k)\Phi^T(k+1, k) + \\ \Gamma(k+1, k)Q_k \cdot \Gamma^T(k+1, k). \end{cases} \quad (35)$$

式(34)–(35)就是本文最终所要给出的多采样频率隐式卡尔曼滤波器递推方程, 滤波器流程图参见图4.

### 5 仿真结果(Simulation results)

为了验证前面所给出的多采样频率隐式卡尔曼滤波器的稳定性, 本文进行了仿真验证. 实验时: 设加速度计偏移量为 $\delta = 0.05 \text{ m/s}^2$ , 引入的白噪声均值为0, 标准差为 $q = 0.05 \text{ m/s}^2$ . 式(19)中 $V_1$ 各元素均值为0, 标准差为 $\sigma = 0.01 \text{ m}$ . 则式(31)–(32)中的系统误差协方差矩阵 $Q_k = q^2 I_3$ , 其中 $I_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 为单位阵. 测量误差协方差矩阵 $R_{k+1}$ 计算如下:

$$R_{k+1} = D \begin{pmatrix} R_v & 0 & 0 \\ 0 & R_v & 0 \\ 0 & 0 & R_v \end{pmatrix} D^T,$$

其中 $D$ 为系统等效观测方程的系数矩阵, 参见式(27). 令 $r_v = \sigma^2 I_3$ , 则

$$R_v = \begin{pmatrix} r_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{9 \times 9}.$$

假设系统姿态 $R$ 已知, 取IMU采样周期 $T_i = 0.01 \text{ s}$ , 视觉信息采样周期 $T_v = 0.1 \text{ s}$ , 初值 $\hat{x}(0|0) = 0 \in \mathbb{R}^9$ ,  $P(0|0) = I_9$ . 视觉传感器观测的空间3条直线交点 $\xi$ 在惯性系中的坐标为 $[0 \ 0 \ 0]^T$ , 摄像机在惯性系内位置运动如下<sup>[2]</sup>:

$$p^E(t) = \begin{pmatrix} 6.6 \\ 6.7 \\ 6.6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \sin(\frac{2\pi}{5}t) \\ 3 \sin(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{6}) \\ 3 \sin(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}. \quad (36)$$

摄像机的姿态变化如下:

$$\begin{cases} \psi = \frac{\pi}{4} \sin(\frac{\pi}{2}t), \\ \theta = \frac{\pi}{4} \sin(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}), \\ \phi = \frac{\pi}{4} \sin(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}). \end{cases} \quad (37)$$

上面的姿态角可以转变为姿态矩阵 $R$ 的形式.

图5–10给出了本文的仿真结果. 其中图5给出了加速度计偏移为 $0.05 \text{ m/s}^2$ 时的估计位置和真实位置. 图5中: 实线为摄像机的真实位置, 虚线为摄像机的估计位置;  $p_x, p_y, p_z$ 分别为摄像机位置 $p^E$ 在惯性坐标系中的3个分量. 设位置估计误差向量为 $E_p$ , 位置估计误差取 $E_p$ 的2-范数 $\|E_p\|$ , 则图6给出了加速度偏移为 $0.05 \text{ m/s}^2$ 时位置估计结果的估计误差. 从图6中可以看出位置估计误差最后收敛, 但是会受到一些限制, 可以参照人眼定位: 当物体距离人很近时, 人眼能很精确的定位物体; 而当物体距离人较远时,

人眼只能确定物体的大概距离.

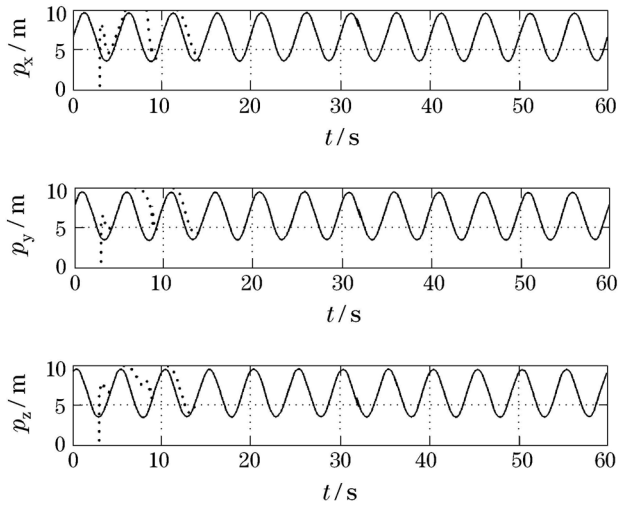


图5 加速度计偏移为 $0.05 \text{ m/s}^2$ 时摄像机真实位置(实线)与估计位置(虚线)变化

Fig. 5 There is a accelerometer offset of  $0.05 \text{ m/s}^2$  used in the simulation: true(solid line) and estimated(dotted line) camera position

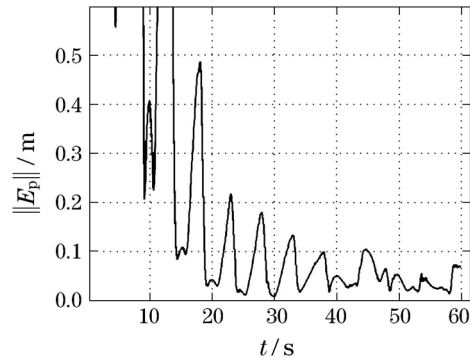


图6 加速度计偏移为 $0.05 \text{ m/s}^2$ 时位置估计误差

Fig. 6 Position estimation error for the case with  $0.05 \text{ m/s}^2$  accelerometer offset

本文的方法也是这样: 当摄像机位置距离点 $\xi$ 很小时, 位置估计精度较高; 当摄像机位置距离点 $\xi$ 较大时, 位置估计精度会相对变低. 图7给出了位置按照公式(38)中 $p_1^E(t)$ 变化时的估计误差 $\|E_{p1}\|$ 的变化及其与 $\|E_p\|$ 的对比, 从图7中可以看出摄像机按照 $p_1^E(t)$ 运动时位置估计精度更高.

$$p_1^E(t) = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.7 \\ 0.6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3 \sin(\frac{2\pi}{5}t) \\ 0.3 \sin(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{6}) \\ 0.3 \sin(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}. \quad (38)$$

为了说明加速度噪声、测量噪声和加速度偏移量大小对滤波器估计误差的影响, 本文对不同加速度噪声、测量噪声和不同加速度偏移的情况进行了

仿真, 见图8-10. 图中:  $\text{std-a}$ 表示加速度噪声标准差,  $\text{offset-a}$ 表示加速度偏移量,  $\text{std-V}$ 表示测量噪声标准差. 从图8-10可以看出, 滤波器估计误差受测量噪声影响较大, 而加速度噪声和偏移量对滤波器估计误差影响较小. 这主要是因为, 在式(26)-(27)中计算等效观测方程及其系数矩阵时用到了带有测量噪声的测量量 $M(k+1)$ .

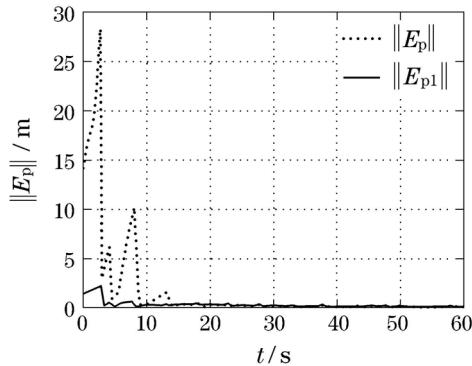


图 7 摄像机按 $p^E(t)$ 和 $p_1^E(t)$ 运动时的位置估计误差 $\|E_p\|$ 和 $\|E_{p1}\|$ 对比  
Fig. 7 Position estimation error  $\|E_p\|$  and  $\|E_{p1}\|$  for  $p^E(t)$  and  $p_1^E(t)$

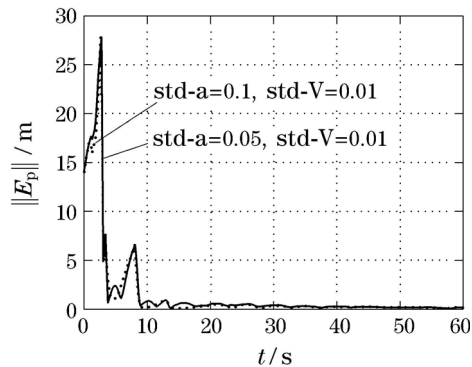


图 8 加速度噪声标准差为 $0.05 \text{ m/s}^2$ (实线)与 $0.1 \text{ m/s}^2$ (虚线)时位置估计误差 $\|E^p\|$ 的变化  
Fig. 8  $\|E^p\|$  for the case with  $0.05 \text{ m/s}^2$ (solid line) and  $0.1 \text{ m/s}^2$ (dotted line) accelerometer noise

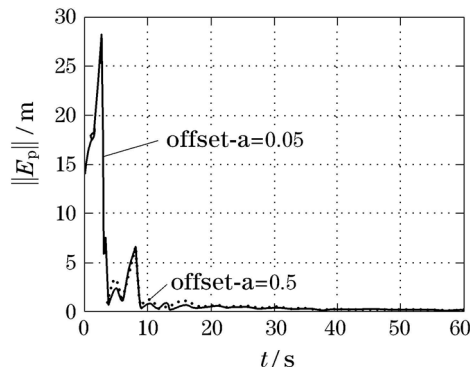


图 9 加速度偏移为 $0.05 \text{ m/s}^2$ (实线)与偏移为 $0.5 \text{ m/s}^2$ (虚线)时位置估计误差 $\|E^p\|$ 的变化  
Fig. 9  $\|E^p\|$  for the case with  $0.05 \text{ m/s}^2$ (solid line) and  $0.5 \text{ m/s}^2$ (dotted line) accelerometer offset

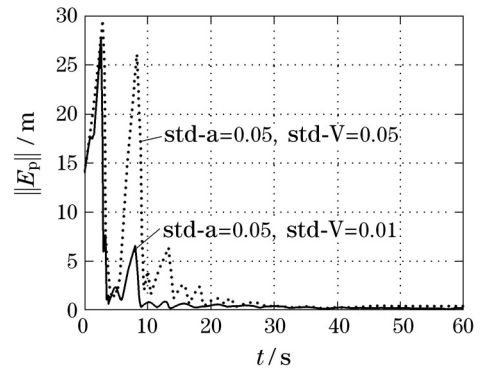


图 10 测量噪声标准差为 $0.01 \text{ m/s}^2$ (实线)和 $0.05 \text{ m/s}^2$ (虚线)时位置估计误差 $\|E^p\|$ 的变化  
Fig. 10  $\|E^p\|$  for the case with  $0.01 \text{ m/s}^2$ (solid line) and  $0.05 \text{ m/s}^2$ (dotted line) measurement noise

## 6 结论(Conclusion)

本文利用文献[2]的工作, 将基于线图像特征匹配的视觉与惯性传感器融合的位置估计问题总结为带有隐式约束观测方程的线性系统状态估计问题. 传统的估计方法在这里不适用, 本文根据文献[6]中提出的隐式卡尔曼滤波器设计思想, 针对位置估计问题给出了隐式卡尔曼滤波器递推方程. 为了减少加速度信息中自带的偏移量对位置估计结果的影响, 本文给出了加速度偏移的补偿方法. 由于视觉与惯性传感器采样频率不同, 本文为了满足实际需求, 给出了多采样频率下相应的隐式卡尔曼滤波器递推方程. 最后, 本文对所设计滤波器进行了仿真验证. 仿真结果表明, 文中所给出的滤波器收敛, 加速度偏移得到了有效的补偿. 本文的不足之处在于, 没有考虑如何进行线图像特征的提取与匹配.

## 参考文献(References):

- [1] CORKE P, LOBO J, DIAS J. An introduction to inertial and visual sensing [J]. *The International Journal of Robot Ics Research*, 2007, 26(6): 519 - 535.
- [2] REHBINDER H, GHOSH B K. Pose estimation using line-based dynamic vision and inertial sensors [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(2): 186 - 199.
- [3] MARTINELLI A. Closed-form solution for attitude and speed determination by fusing monocular vision and inertial sensor measurements [C]//*2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Piscataway, NJ: IEEE, 2011, 5: 4538 - 4545.
- [4] VIÉVILLE T, FAUGERAS O. Cooperation of the inertial and visual systems [J]//*Traditional and Nontraditional Robotic Sensors*. Berlin: Springer Verlag, 1990: 339 - 350.
- [5] MATVEEV A, HU X, FREZZA R, et al. Observers for systems with implicit output [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(1): 168 - 173.
- [6] SOATTO S, FREZZA R, PERONA P. Motion estimation via dynamic vision [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(3): 393 - 413.
- [7] LEE J W, YOU S, NEUMANN U. Large motion estimation for omnidirectional vision [C]//*Proceedings of IEEE Workshop on Omnidirectional Vision*. Piscataway, NJ: IEEE, 2000: 161 - 168.

- [8] GURFIL P, ROTSTEIN H. Computer vision-based estimation of aircraft dynamics [C] // *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*. Piscataway, NJ: IEEE, 2001, 12: 3746–3751.
- [9] WEBB T P, PRAZENICA R J, KURDILA A J, et al. Vision-based state estimation for uninhabited aerial vehicles [C] // *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. San Francisco: AIAA, 2005, 8: 1–18.
- [10] KITT B, RANFT B, LATEGAHN H. Detection and tracking of independently moving objects in urban environments [C] // *The 13th International IEEE Annual Conference on Intelligent Transportation Systems Madeira Island*. Piscataway, NJ: IEEE, 2010, 9: 1396–1401.
- [11] SKLIAR M, RAMIREZ W F. Kalman filter for discrete implicit systems [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Piscataway, NJ: IEEE, 1995, 6: 524–528.
- [12] HOL J. *Pose estimation and calibration algorithms for vision and inertial sensors* [D]. Sweden: Linköping University, 2008.
- [13] REHBINDER H, HU X. Drift-free attitude estimation for accelerated rigid bodies [J]. *Automatica*, 2004, 40(4): 653–659.
- [14] KALMAN R E. New methods in wiener filtering theory [C] // *Proceedings of the 1st Symposium Engineering Applications of Random Function Theory and Probability*. New York: Wiley, 1960: 270–388.

## 附录 滤波器稳定性(Appendix Stability of the filter)

卡尔曼从原系统出发, 经过证明, 得到如下稳定性定理: 如果系统是一致完全可控和一致完全可观测的, 那么它的线性最优滤波系统是一致渐近稳定的<sup>[14]</sup>. 所以本文也通过验证原系统的一致完全可控和一致完全可观测性质, 来说明滤波器的稳定性. 由于加速度为系统输入, 其引入的扩展变量加速度偏移为常值有界的, 所以只需要研究原系统的可控性和可观测性即可. 原系统离散状态方程为

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k)x(k) + G(k+1, k)r(k) + \Gamma(k+1, k)W(k).$$

带有隐式约束的观测方程为

$$Y^T(k+1)\bar{R}(k+1)x(k+1) = 0,$$

其中:

$$\Phi(k+1, k) = \begin{pmatrix} I_3 & T_s I_3 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix}_{6 \times 6},$$

$$G(k+1, k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} T_s^2 I_3 \\ T_s I_3 \end{pmatrix}_{6 \times 3},$$

$$\Gamma(k+1, k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} T_s^2 I_3 \\ T_s I_3 \end{pmatrix}_{6 \times 3}.$$

假设系统噪声协方差矩阵为  $Q_{i-1} = q^2 I_3$ , 则可以计算出原系统可控性矩阵如下:

$$W(k-N+1, k) = q^2 T^2 \begin{pmatrix} (\frac{N^3}{3} T_s^2 - \frac{N}{12} T_s^2) I_3 & \frac{N^2}{2} T I_3 \\ \frac{N^2}{2} T I_3 & N I_3 \end{pmatrix} > 0, N > 1.$$

由上可知系统是完全可控的, 又由于上述可控性矩阵与时间  $k$  无关, 所以系统是一致完全可控的.

由于本文的观测方程是隐式形式, 所以不能通过传统的可观测性矩阵来判断系统的一致完全可观测性. 假设隐式输出方程为

$$B(y(t))x(t) = 0,$$

则文献[5]给出了这类具有隐式输出系统的可观测性判定矩阵计算公式:

$$M(t_0, t) = \int_{t_0}^t e^{A^T \tau} B(y(t+\tau))^T B(y(t+\tau)) e^{A \tau} d\tau.$$

本论文中  $B(y(t)) = Y^T \bar{R}$ . 文献[2]利用上面的结果对本论文所研究系统的可观测性进行了分析, 并给出了不可观测子空间: 当摄像机运动位置变量  $p(t) - \xi(t)$  局限在一个包含坐标轴方向向量(即平行于惯性坐标系  $o-xyz$  的3个子平面  $o-xy$ ,  $o-xz$ ,  $o-yz$ )的平面上时, 系统不可观测, 滤波器不收敛. 在摄像机运动不满足上面条件时, 系统是可观的, 又由于系统是一致完全可控的, 则滤波器收敛. 实际上, 由于系统噪声等因素的存在, 摄像机运动很难满足上面的不可观测条件.

作者简介:

杜光勋 (1987-), 男, 博士研究生, 目前研究方向为视觉与惯性传感器融合技术, E-mail: duguangxun@126.com;

全权 (1981-), 男, 讲师, 目前研究方向为飞行控制中的精确控制和应急控制、基于视觉的导航等, E-mail: qq.buaa@buaa.edu.cn;

蔡开元 (1965-), 男, 长江学者特聘教授, 博士生导师, 目前研究方向为软件可靠性与测试、可靠飞行控制、软件控制论, E-mail: kycail@buaa.edu.cn.