

分数阶系统的动力性质及反馈控制

吴新星, 朱培勇, 郑远明

(电子科技大学 数学科学学院, 四川 成都 611731)

摘要: 利用一元连续函数的介值定理和Gerschgorin圆盘定理, 分别给出了分数阶系统混沌性和稳定性的一个充分判据. 应用该判据, 可以对所有的分数阶混沌系统进行反馈控制. 最后将此理论应用于文献[12]新提出的分数阶混沌金融系统, 仿真结果验证了此理论的正确性.

关键词: 分数阶系统; 稳定性; 反馈控制

中图分类号: TP 18 **文献标识码:** A

The dynamical properties of fractional systems and feedback control

WU Xin-xing, ZHU Pei-yong, ZHENG Yuan-ming

(School of Mathematics Science, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu Sichuan 611731, China)

Abstract: By using the theorem of the existence of roots and Gerschgorin's theorem, we obtain criterions of chaoticity and stability of fractional systems. By using this criterion, we can use the method of feedback control to control all the chaotic fractional systems. Finally, this theorem is applied to fractional financial system in [12]. Numerical simulation validates the effectiveness of the theorem.

Key words: fractional system; stability; feedback control

1 引言(Introduction)

自分数阶微积分提出以来, 距今已有300多年, 但由于其本身的复杂性而发展缓慢. 近年来, 学者们将分数阶微分算子引入非线性动力学系统以及经济金融的研究中, 发现利用分数阶微积分算子能更准确的描述实际系统的动力学性质. 分数阶微积分算子在物理学中的成功应用, 解决了许多物理学中的问题^[1-7], 如复杂系统的量子演化^[4]、diffsion波^[5]、统计力学^[6]和量子力学^[7]; 同时也得到了许多经典的模型, 如分数阶金融模型^[8]、分数阶幸福模型^[9]、分数阶超混沌系统^[10]等. 2001年, 吕金虎和陈关荣等^[11]提出一种新的混沌系统——统一混沌系统, 这个系统连接了Lorenz混沌吸引子和Chen混沌吸引子, 并且实现了在整个参数谱上从一个系统到另一个系统的连续演化, 从而可能产生更加复杂的动力学行为. 在文献[12]中, 辛宝贵等主要定性地分析一类分数阶混沌金融系统的均衡解的稳定性及Hopf分岔发生的条件.

本文就一般的有限维分数阶自治系统进行研究. 首先, 得出该系统在平衡点处不稳定和稳定的判据. 然后利用此判据证明所有的分数阶不稳定自治系统均可通过线性反馈控制使其稳定(甚至渐进稳定)到平衡点. 从而为分数阶自治系统的混沌控制提供了一个普适性的方法. 最后, 用MATLAT对文献[12]中

新提出的分数阶混沌金融系统进行仿真, 并用此方法实现了该系统的反馈控制. 实验结果验证了该反馈控制方法的有效性.

对于分数阶微积分, 常见的有Riemann-Liouville定义和Caputo定义. 由于应用Caputo定义进行Laplace变换时, 不需要已知分数阶微分的初始值, 所以本文均采用Caputo定义.

Caputo分数阶定义:

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_\alpha^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (1)$$

式中: $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数, $n-1 \leq \alpha < n$.

2 一般分数阶系统的混沌性及反馈控制 (The chaoticity and feedback control of general fractional systems)

本文考察一般的分数阶自治系统:

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x_1}{dt^{q_1}} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{d^{q_2} x_2}{dt^{q_2}} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \frac{d^{q_n} x_n}{dt^{q_n}} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (2)$$

其中: $0 < q_1, q_2, \dots, q_n < 1$, $f_i (1 \leq i \leq n)$ 均为连续可微函数. 由于分数阶微分的平移不变性, 本文不妨假设坐标原点 $(0, 0, \dots, 0)$ 为系统(2)的平衡点.

设系统(2)在平衡点处的线性化矩阵为 $J^{(2)}(0)$, 易知

$$J^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0, \dots, 0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(0, \dots, 0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(0, \dots, 0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(0, \dots, 0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(0, \dots, 0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(0, \dots, 0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(0, \dots, 0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(0, \dots, 0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(0, \dots, 0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

对于系统(2), 因梯度函数 $\nabla V = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(0, \dots, 0)}{\partial x_i}$ $= \text{tr}(J^{(2)}(0))$, 其中 $\text{tr}(J^{(2)}(0))$ 为矩阵 $J^{(2)}(0)$ 的迹. 因此, 若须使系统(2)耗散, 只需 $\text{tr}(J^{(2)}(0)) < 0$. 此时, 系统则以指数率 $\frac{dV}{dt} = e^{\text{tr}(J^{(2)}(0))t}$ 收敛, 系统的所有轨线最终被限制在一个体积为零的极限子集上. 如果同时还满足式(2)的不稳定性(例如, 存在正的特征值), 则该系统在平衡点附近渐近运动趋向于一个吸引子. 本文已经知道: 若对于矩阵 $J^{(2)}(0)$ 的任意特征值 λ 都满足 $|\arg(\lambda)| \geq \frac{\pi}{2} \cdot \max_{1 \leq i \leq n} (q_i)$, 则系统(2)在原点处是稳定的. 特别地, 如果是严格大于的, 则系统(2)在原点处是渐近稳定的. 大家知道, 对于一般的 n 阶方阵而言, 要判断其不稳定性是一件很困难的事. 故本文先给出一个简单易行的判别方法.

定理 1 若 $(-1)^n \det(J^{(2)}(0)) < 0$, 则系统(2)在原点处是不稳定的.

证 设 $J^{(2)}(0)$ 的特征多项式为

$$f(\lambda) = \det[\lambda I - J^{(2)}(0)] = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n, \quad (4)$$

易知 $a_n = (-1)^n \det(J^{(2)}(0))$, 所以 $f(0) = a_n < 0$.

同时注意到 $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda) = +\infty$, 因此, 据价值定理有: 存在 $\xi \in (0, +\infty)$, 使得 $f(\xi) = 0$, 即 $J^{(2)}(0)$ 存在正的特征值. 于是有系统(2)在原点处是不稳定的.

本文将给出系统(2)的一个简单易行的反馈控制器, 将其稳定到平衡点附近. 设式(2)的受控系统为

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x_1}{dt^{q_1}} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) - k_1 x_1, \\ \frac{d^{q_2} x_2}{dt^{q_2}} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) - k_2 x_2, \\ \vdots \\ \frac{d^{q_n} x_n}{dt^{q_n}} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) - k_n x_n, \end{cases} \quad (5)$$

自然, 原点也是系统(5)的平衡点. 证毕.

引理 1 (Gerschgorim圆盘定理) 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (其中 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 为所有的 n 阶复方阵构成的集合), 则 A 的任意特征值

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\}. \quad (6)$$

定理 2 1) 若任意的 $1 \leq i \leq n$,

$$k_i - \frac{\partial f_i(0, \dots, 0)}{\partial x_i} \geq \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial f_j(0, \dots, 0)}{\partial x_j} \right|,$$

则系统(5)在原点处是稳定的.

2) 若任意的 $1 \leq i \leq n$, $k_i - \frac{\partial f_i(0, \dots, 0)}{\partial x_i} >$

$\sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial f_j(0, \dots, 0)}{\partial x_j} \right|$, 则系统(5)在原点处是渐近稳定的.

证 易知系统(5)在平衡点 $(0, \dots, 0)$ 处的线性化矩阵 $J^{(5)}(0)$ 为

$$J^{(5)}(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0, \dots, 0)}{\partial x_1} - k_1 & \frac{\partial f_1(0, \dots, 0)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(0, \dots, 0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(0, \dots, 0)}{\partial x_2} - k_2 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(0, \dots, 0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(0, \dots, 0)}{\partial x_2} \\ \dots & \frac{\partial f_1(0, \dots, 0)}{\partial x_n} \\ \dots & \frac{\partial f_2(0, \dots, 0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots \\ \dots & \frac{\partial f_n(0, \dots, 0)}{\partial x_n} - k_n \end{pmatrix}. \quad (7)$$

设 λ 为 $J^{(5)}(0)$ 的任意特征值, 由 Gerschgorim 圆盘定理知

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbb{C} : |z - (\frac{\partial f_i(0, \dots, 0)}{\partial x_i} - k_i)| \leq \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial f_j(0, \dots, 0)}{\partial x_j} \right|\}. \quad (8)$$

1) 如果任意的 $1 \leq i \leq n$, $k_i - \frac{\partial f_i(0, \dots, 0)}{\partial x_i} \geq$

$\sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial f_j(0, \dots, 0)}{\partial x_j} \right|$, 则

$$\bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbb{C} : |z - (\frac{\partial f_i(0, \dots, 0)}{\partial x_i} - k_i)| \leq \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial f_j(0, \dots, 0)}{\partial x_j} \right|\} \subset \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \leq 0\}. \quad (9)$$

由式(8)–(9)知, $\text{Re}(\lambda) \leq 0$, 即 $J^{(5)}(0)$ 特征值的实部均不大于 0.

因此, 式(5)在原点处是稳定的.

2) 如果任意的 $1 \leq i \leq n, k_i - \frac{\partial f_i(0, \dots, 0)}{\partial x_i} > \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial f_j(0, \dots, 0)}{\partial x_j} \right|$, 则 $\bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbb{C} : |z - (\frac{\partial f_i(0, \dots, 0)}{\partial x_i} - k_i)| \leq \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial f_j(0, \dots, 0)}{\partial x_j} \right|\} \subset \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 0\}$. (10)

由式(8)和式(10)知, $\text{Re}(\lambda) < 0$, 即 $J^{(5)}(0)$ 特征值的实部均小于 0.

因此, 式(5)在原点处是渐近稳定的. 证毕.

由定理 2 知, 只要控制参数 k_1, k_2, \dots, k_n 足够大, 便总能使系统 (5) 稳定在平衡点附近, 甚至还能使其渐近稳定到平衡点附近. 此方法无需求解矩阵 $J^{(2)}(0)$ 的特征值, 运算简单, 便于操作和实现.

3 仿真分析(Simulation analysis)

本节将上面所提的反馈控制方法应用于文献 [12] 中的分数阶混沌金融系统. 由于文献 [12] 中的系统平衡点为 $(0, \frac{1}{b}, 0)$, 所以本文对其施加一个平移变换 $x_1 = x, y_1 = y - \frac{1}{b}, z_1 = z$, 便得到如下系统:

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x_1}{dt^{q_1}} = z_1 + (y_1 + \frac{1}{b} - 1)x_1, \\ \frac{d^{q_2} y_1}{dt^{q_2}} = -by_1 - x_1^2, \frac{d^{q_3} z_1}{dt^{q_3}} = -x_1 - cz_1. \end{cases} \quad (11)$$

由于平移变换不改变系统的动力学行为, 因此系统 (11) 和文献 [12] 中的系统具有相同的动力学性质. 易知 $(0, 0, 0)$ 为该系统的平衡点. 并且当 $q_1 = 0.88, q_2 = 0.98, q_3 = 0.92, a = 4, b = 0.1, c = 1$ 时, 其线性化 Jacobic 矩阵为

$$J^{(11)}(0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

由定理 1 知, 系统 (11) 是不稳定的. 为了更好地观察该系统的动力学行为, 本文利用 MATLAB 进行数值仿真. 取初始值为 $(0.2, -5, 0.2)$, 系统吸引子在 $x_1-y_1-z_1$ 的三维图见图 1.

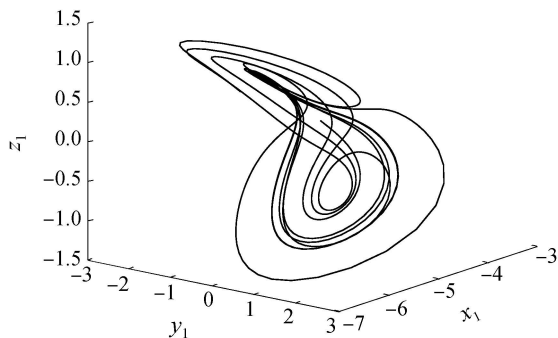


图 1 系统(11)的三维相图

Fig. 1 Phase portrait of system (11)

取初始值为 $(0.2, -5, 0.2)$, 系统吸引子在 $x_1-y_1, x_1-z_1, y_1-z_1$ 相图如图 2-4 所示.

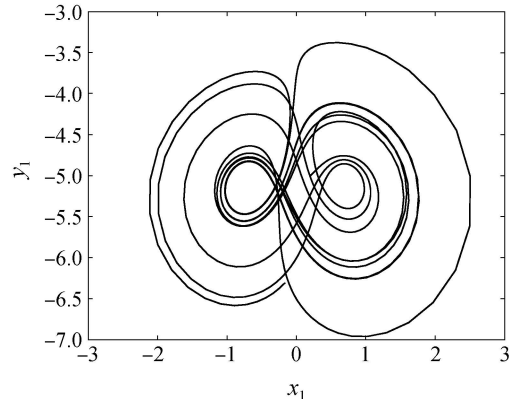


图 2 系统(11)的 x_1-y_1 相图

Fig. 2 x_1-y_1 -phase portrait of system (11)

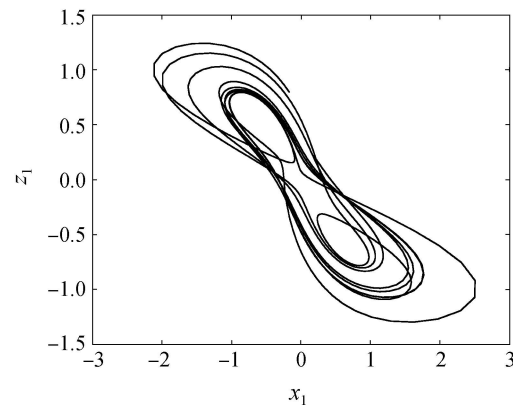


图 3 系统(11)的 x_1-z_1 相图

Fig. 3 x_1-z_1 -phase portrait of system (11)

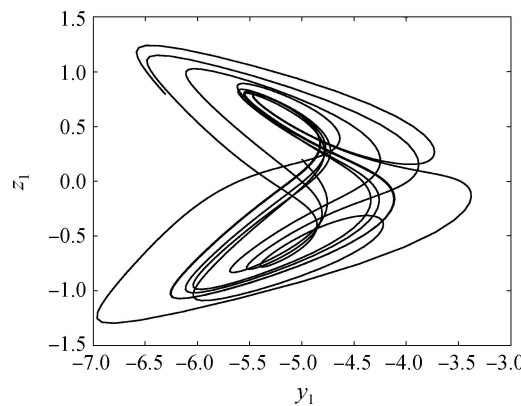


图 4 系统(11)的 y_1-z_1 相图

Fig. 4 y_1-z_1 -phase portrait of system (11)

对该分数阶混沌系统加入反馈控制项, 将其渐近稳定到平衡点位置. 其受控系统为

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x_1}{dt^{q_1}} = z_1 + (y_1 + \frac{1}{b} - 1)x_1 - k_1 x_1, \\ \frac{d^{q_2} y_1}{dt^{q_2}} = -by_1 - x_1^2 - k_2 y_1, \\ \frac{d^{q_3} z_1}{dt^{q_3}} = -x_1 - cz_1 - k_3 z_1. \end{cases} \quad (13)$$

由定理2知, 只要控制参数 $k_1 - 6 > 1$, $k_2 + 0.1 > 0$, $k_3 + 1 > 1$, 系统(13)便渐进稳定到平衡点(0, 0, 0).

下面, 本文取 $k_1 = 7.2$, $k_2 = 0.1$, $k_3 = 0.2$, 对系统进行控制, 同时用MATLAB进行数值仿真, 在 $t = 100$ 时加入控制信号. 受控系统变量 x_1 , y_1 , z_1 的时域波形仿真结果如图5-7所示.

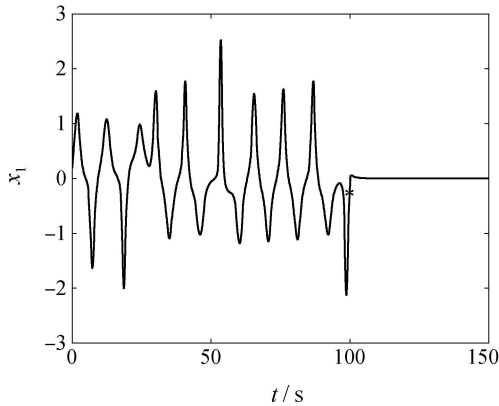


图5 受控系统变量 x_1 波形图

Fig. 5 State of the variable x_1

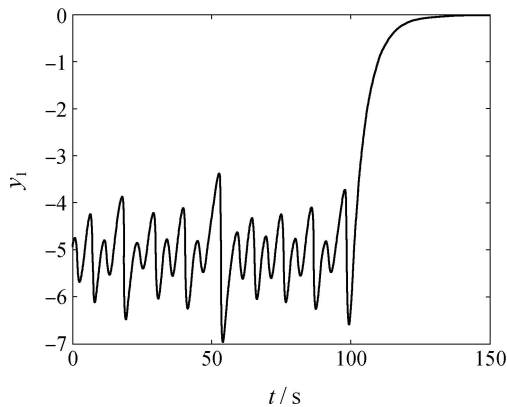


图6 受控系统变量 y_1 波形图

Fig. 6 State of the variable y_1

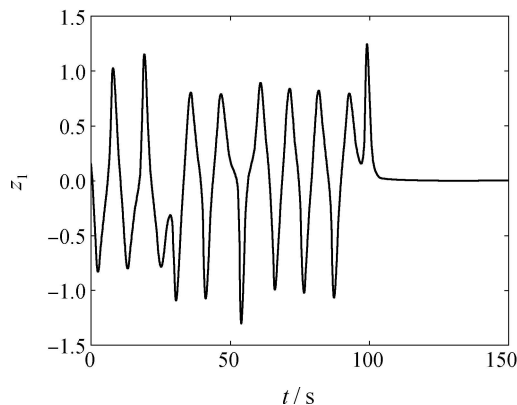


图7 受控系统变量 z_1 波形图

Fig. 7 State of the variable z_1

4 结论(Conclusion)

本文提出了一个判断任意有限维分数阶自治系

统混沌性的简易方法以及具有普适性的线性反馈控制器, 简单、有效、易于实现. 数值仿真进一步验证了此控制方法的有效性.

参考文献(References):

- [1] 胡建兵, 韩焱, 赵灵冬. 分数阶系统的一种稳定性判定定理及在分数阶统一混沌系统同步中的应用 [J]. 物理学报, 2009, 58 (7): 4402 - 4407.
(HU Jianbing, HAN Yan, ZHAO Lingdong. A stability theorem about fractal systems and synchronizing fractional unified chaotic systems based on the theorem [J]. *Acta Physico-Chimica Sinica*, 2009, 58 (7): 4402 - 4407.)
- [2] ZHANG R X, YANG S P. Chaos in fractional-order generalized Lorenz system and its synchronization circuit simulation [J]. *Chinese Physics B*, 2009, 18(8): 3295 - 3302.
- [3] 刘勇, 谢勇. 分数阶FitzHugh-Nagumo模型神经元的动力学特性及其同步 [J]. 物理学报, 2010, 59(3): 2147 - 2155.
(LIU Yong, XIE Yong. Dynamical characteristics of the fractional-order FitzHugh-Nagumo model neuron and its synchronization [J]. *Acta Physico-Chimica Sinica*, 2010, 59(3): 2147 - 2155.)
- [4] KUSNEZOV D, BULGAC A, DANG G D. Quantum levy processes and fractional kinetics [J]. *Physical Review Letters*, 1999, 82(6): 1136 - 1139.
- [5] EL-SAYED A M A. Fractional-order diffusion-wave equation [J]. *International Journal of Theoretical Physics*, 1996, 35(2): 311 - 322.
- [6] LUTZ E. Fractional transport equations for Lévy stable processes [J]. *Physical Review Letters*, 2001, 86(11): 2208 - 2211.
- [7] LASKIN N. Fractional quantum mechanics [J]. *Physical Review Letters*, 2000, 85(3): 3135 - 3145.
- [8] CHEN W C. Dynamics and control of a financial system with time-delayed feedbacks [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, 37(14): 1198 - 1207.
- [9] SONG L, XU S, YANG J. Dynamical models of happiness with fractional order [J]. *Communication Nonlinear Science Numerical Simulation*, 2010, 15(3): 616 - 628.
- [10] 黄丽莲, 辛方, 王霖郁. 新分数阶超混沌系统的研究与控制及其电路实现 [J]. 物理学报, 2011, 60(1): 010505.
(HUANG Lillian, XIN Fang, WANG Linyu. Circuit implementation and control of a new fractional-order hyperchaotic system [J]. *Acta Physico-Chimica Sinica*, 2011, 60(1): 010505.)
- [11] LÜ J H, CHEN G R, ZHANG S C. Dynamical analysis of a new chaotic attractor [J]. *International Journal of Bifurcation Chaos*, 2002, 2(5): 1001 - 1015.
- [12] 辛宝贵, 陈通, 刘艳芹. 一类分数阶混沌金融系统的复杂性演化研究 [J]. 物理学报, 2011, 60(4): 048901.
(XIN Baogui, CHEN Tong, LIU Yanqin. Complexity evolution of a chaotic fractional-order financial system [J]. *Acta Physico-Chimica Sinica*, 2011, 60(4): 048901.)

作者简介:

吴新星 (1986-), 男, 目前研究方向为动力系统、混沌学理论和混沌控制, E-mail: wuxinxing5201314@163.com;

朱培勇 (1956-), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为一般拓扑学和动力系统, E-mail: zpy6940@sina.com.cn;

郑远明 (1988-), 男, 目前研究方向为偏微分方程数值解理论及其应用, E-mail: zhengym@uestc.org.