第 29 卷第 12 期
2012 年 12 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 29 No. 12
Dec. 2012

文章编号: 1000−8152(2012)12−1587−07

一类多项式非线性系统鲁棒$\mathbf{H}_\infty$控制

黄文超, 孙洪飞, 曾建平

(厦门大学 自动化系, 福建 厦门 361005)

摘要: 针对一类具有多项式向量场的仿射型不确定非线性系统, 给出一种基于多项式平方和(sum of squares, SOS)技术的鲁棒H_∞状态反馈控制器设计方法. 该方法的优点在于控制器的设计避开了直接求解复杂的哈密尔顿–雅可比不等式(Hamilton Jacobi inequality, HJI)和构造Lyapunov函数带来的困难. 将鲁棒稳定性分析和控制器设计问题转化为求解以Lyapunov函数为参数的矩阵不等式, 该类不等式可利用SOS技术直接求解. 此外, 在前文基础上研究了基于SOS规划理论与S-procedure技术的局部稳定鲁棒H_∞控制器设计方法. 最后以非线性质量弹簧阻尼系统作为仿真算例验证该方法的有效性.

关键词: 鲁棒H_∞控制; 非线性控制; 状态反馈; 多项式平方和

中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Robust H-infinity control for a class of polynomial nonlinear systems

HUANG Wen-chao, SUN Hong-fei, ZENG Jian-ping

(Department of Automation, Xiamen University, Xiamen Fujian 361005, China)

Abstract: By employing the sum of squares (SOS) technique, we investigate the robust H-infinity state-feedback controller design for a class of uncertain affine nonlinear systems with polynomial vector fields. The advantage of this approach lies in its avoidance of difficulties in solving the intricate Hamilton Jacobi inequality (HJI) and constructing Lyapunov functions. By using the SOS technique, both the robust stability analysis and the controller design problems are transformed into solving the matrix inequalities with parameters of the Lyapunov function as decision variables. Besides, the robust H-infinity controller which guarantees the local stability of the closed-loop system is presented by using the SOS programming and S-procedure simultaneously. Finally, the simulation results of the nonlinear mass-spring-damper system show the effectiveness of the proposed approach.

Key words: robust H-infinity control; nonlinear control; state feedback; sum of squares

1 引言(Introduction)

近20年来, 非线性H_∞控制受到广泛重视和研究, 并取得丰富的成果. Van der Schaft和Isidori等将线性系统H_∞控制思想应用于非线性系统, 研究状态反馈和输出反馈H_∞控制问题, 给出了非线性系统H_∞控制的哈密尔顿–雅可比方程组(HJEs)和哈密尔顿–雅可比不等式组(HJIs)的求解方法[1–2]. Lu等研究了基于输出估计的非线性H_∞动态输出反馈控制问题[3]. Shen等研究了非线性系统鲁棒H_∞状态反馈控制问题[4]. 文[5–6]分别研究了含不确定性非线性系统和一类摄动项依赖于状态微分的非线性系统动态输出反馈鲁棒H_∞控制问题. 然而, 上述研究均是以若干HJIs或HJEs设计H_∞控制器, 求解困难.

近年来, 多项式平方和(sum of squares, SOS)技术取得了重大进展, 已被广泛应用于非线性系统研究. Prempain将非线性系统的L_2–增益问题转化成SOS优化问题来求解, 避开了直接求解HJIs[7]. Zheng等基于SOS分解, 将非线性系统H_∞控制问题转化为一个可用SOS工具箱求解的凸优化问题[8]. Prajna等通过引入稠密函数方法, 研究了非线性系统状态反馈综合问题, 该方法对Lyapunov函数和控制器具有凸特性, 且对多项式非线性系统可直接利用SOS规划求解[9]. 文[10]提出一种新的依赖于部分状态变量的Lyapunov函数构造方法, 并将其与SOS规划结合研究非线性系统最优控制、H_∞控制等问题. 文[11]利用SOS规划, 研究了多面体不确定多项式非线性系统的鲁棒镇定问题及一类多项式非线性子系统集在共同Lyapunov函数、多Lyapunov函数两种情况下同时稳定问题. 此外, SOS技术还被用于研究非线性系统的容错控制、结构奇异值上界、非线性离散系统综合等问题[12–16].

在已有成果中, 应用SOS规划技术研究不确定非

收稿日期: 2011−09−16; 收修改稿日期: 2012−05−07.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61074004); 教育部留学回国人员科研启动基金资助项目[2009].

线性系统的鲁棒镇定问题还不多见. 本文考虑多项式不确定非线性系统, 给出了基于SOS的保证闭环系统渐近稳定的鲁棒H_∞控制器设计方法, 且该方法对适当的Lyapunov函数可保证闭环系统全局渐近稳定. 同时, 将S-procedure技术与SOS规划相结合, 给出了闭环系统状态在小范围内局部稳定鲁棒H_∞控制器设计方法. 本文所给出的方法优点在于, 避开了直接求解HJI和构造Lyapunov函数带来的困难, 且给出的状态在小范围内成立的鲁棒控制问题的可解性条件, 较之状态在全空间成立[11,16]更具实际意义.

本文以下部分安排如下: 第2部分介绍了SOS的相关概念及非线性鲁棒H_∞控制问题; 第3部分给出基于SOS规划技术的状态反馈鲁棒H_∞控制器的设计方法; 第4部分是一个仿真例子, 验证文中方法的有效性; 第5部分给出简短结论.

2 问题描述(Problems description)

2.1 SOS相关知识(Related knowledge of SOS)

定义 1[17] 称多变量多项式$p(x_1,\cdots,x_n)\triangleq p(\boldsymbol{x})$是SOS, 如果存在多项式$f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x})$, 使得

$$p(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{m}f_i^2(\boldsymbol{x}).$$

引理 1[17] 多项式$p(\boldsymbol{x})$是SOS, 当且仅当存在一个半正定矩阵Q, 使得

$$p(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})Q\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x}),$$

其中$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x})$是关于$\boldsymbol{x}$的单项式向量.

如果$p(\boldsymbol{x})$是SOS, 则$p(\boldsymbol{x})\geqslant 0$. 因此, 如果多项式$f(\boldsymbol{x})$可分解成SOS, 则$f(\boldsymbol{x})\geqslant 0$. SOS分解的这一特性在非线性系统控制研究中具有广泛的应用. 例如: 判别多项式型Lyapunov函数$V(\boldsymbol{x})$是正定的, 可转换为判别$p(\boldsymbol{x}):=V(\boldsymbol{x})-\varepsilon\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$是SOS, 其中$\varepsilon$是充分小的正数. 虽然SOS条件只是多项式非负定判断的一个充分条件, 然而数值仿真实验表明, 由此所带来的保守性很小[10,18], 已有学者证明, 在某些情况下, 多项式非负与该多项式是SOS二者是等价的[19].

2.2 非线性鲁棒H_∞控制问题(Nonlinear robust H_∞ control problem)

考虑一类多项式型不确定非线性系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=(A(\boldsymbol{x})+\Delta A(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{x}+B_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}+\\ \qquad (B_2(\boldsymbol{x})+\Delta B_2(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{u},\\ \boldsymbol{z}=(C(\boldsymbol{x})+\Delta C(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{x},\end{cases}\tag{1}$$

其中: $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^r$和$\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^q$分别表示系统状态、控制输入、外部干扰和被调输出; $A(\boldsymbol{x}),B_1(\boldsymbol{x}),B_2(\boldsymbol{x})$和$C(\boldsymbol{x})$为已知的多项式矩阵; $\Delta A(\boldsymbol{x}),\Delta B_2(\boldsymbol{x})$和$\Delta C(\boldsymbol{x})$为不确定性矩阵.

设系统满足:

假设 1[20] A1) $[\Delta A(\boldsymbol{x})\ \ \Delta B_2(\boldsymbol{x})]=E(\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x},t)[G_1(\boldsymbol{x})\ \ G_2(\boldsymbol{x})]$;

A2) $\Delta C^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\Delta C(\boldsymbol{x})\leqslant H^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x})$.

其中: $H(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{x}),G_1(\boldsymbol{x})$和$G_2(\boldsymbol{x})$为已知的适当维数的多项式矩阵; $F(\boldsymbol{x},t)$为系统不确定性, 且对于任意函数矩阵$\Psi(\boldsymbol{x})$满足

$$\int_0^{\infty}(||\Psi(\boldsymbol{x})||^2-||F(\boldsymbol{x},t)\Psi(\boldsymbol{x})||^2)\mathrm{d}t\geqslant 0.\tag{2}$$

注 1 式(2)等价于范数有界条件$||F(\boldsymbol{x},t)||^2\leqslant 1$.

令$A_j(\boldsymbol{x}),E_j(\boldsymbol{x}),\Delta A_j(\boldsymbol{x})$和$\Delta B_{2j}(\boldsymbol{x})$分别表示矩阵$A(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{x}),\Delta A(\boldsymbol{x})$和$\Delta B_2(\boldsymbol{x})$的第$j$行$(j=1,\cdots,n)$. 定义$J=\{j|e_j^{\mathrm{T}}B_1(\boldsymbol{x})=0,\ e_j^{\mathrm{T}}B_2(\boldsymbol{x})=0,\ \forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\}$, 其中$e_j$表示单位矩阵$I$的第$j$列元素. 不妨设$J$中的元素个数为$m$, 定义

$$E_J(\boldsymbol{x})=[E_{j_1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\ \ \cdots\ \ E_{j_m}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}},$$
$$\Delta A_J(\boldsymbol{x})=[\Delta A_{j_1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\ \ \cdots\ \ \Delta A_{j_m}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}},$$
$$\tilde{\boldsymbol{x}}=[\boldsymbol{x}_{j_1}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{x}_{j_m}]^{\mathrm{T}},\ j_k\in J,\ k=1,\cdots,m.$$

假设 2 A3) 若$B_{2j}(\boldsymbol{x})$为零, 则$\Delta B_{2j}(\boldsymbol{x})$为零, $j\in J$.

定义 2[13] 考虑非线性系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=A(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}+B(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u},\\ \boldsymbol{z}=C(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}+D(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}.\end{cases}$$

对于给定的标量$\gamma>0$, 称系统的L_2增益小于等于γ. 如果对于任意的$T>0$, 当$\boldsymbol{x}(0)=0$时, 有

$$\int_0^T\|\boldsymbol{z}(t)\|^2\mathrm{d}t\leqslant\gamma^2\int_0^T\|\boldsymbol{w}(t)\|^2\mathrm{d}t,\ \forall\boldsymbol{w}\in L_2[0,T].$$

针对系统(1)的状态反馈鲁棒H_∞控制问题是指, 求解控制器$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=K(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$, 使得对于所有容许的不确定性, 闭环系统内部稳定, 且L_2增益小于等于γ.

3 鲁棒H-infinity控制器设计(Robust H_∞ controller design)

引理 2(S-procedure)[21] 对$\sigma_1(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}Q_1\boldsymbol{y}\geqslant 0$, 假定存在一个$\tilde{\boldsymbol{y}}\in\mathbb{R}^m$, 使得$\sigma_1(\tilde{\boldsymbol{y}})>0$, 则以下两个条件是等价的:

a) 对使得$\sigma_1(\boldsymbol{y})\geqslant 0$的所有非零$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}Q_0\boldsymbol{y}>0$;

b) 存在$\tau\geqslant 0$, 使得$Q_0-\tau Q_1>0$.

引理 3[10] 设$P(\boldsymbol{x})$为对称的多项式矩阵, 如果$P(\boldsymbol{x})$对于所有的$\boldsymbol{x}$均为非奇异矩阵, 则有

$$\frac{\partial P}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=-P(\boldsymbol{x})\frac{\partial P^{-1}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})P(\boldsymbol{x}).$$

定理 1 设系统(1)满足假设A1)−A3), 对于给定的标量$\gamma>0$, $\varepsilon>0$, 多项式$\varepsilon_1(\boldsymbol{x})>0$, $\varepsilon_2(\boldsymbol{x})>0$. 若存在多项式矩阵$Q(\tilde{\boldsymbol{x}})>0$, $W(\boldsymbol{x})$以及一个SOS多项式$s(\boldsymbol{x})$, 且$s(\boldsymbol{x})>0$, 求解以下SOS优化问题:

$\min \rho$ 满足

$$\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}(Q(\tilde{\boldsymbol{x}})-\varepsilon I)\boldsymbol{\xi}_1\text{是SOS}, \tag{3}$$

$$-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\Xi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}\text{是SOS}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\rho(\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}})^2 & \boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})E_J(\boldsymbol{x})\\ E_J^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(\tilde{\boldsymbol{x}}) & I\end{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_2\text{是SOS}. \tag{5}$$

如果$\rho=0$, 则系统(1)的鲁棒H$_\infty$控制问题可解, 状态反馈控制器

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=W(\boldsymbol{x})Q^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{x}$$

保证闭环系统内部稳定, 且L_2增益小于等于γ, 其中:

$$\Xi(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\mathscr{M}_{\mathrm{QWS}}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}) & * & * & * & *\\ G_1(\boldsymbol{x})Q(\tilde{\boldsymbol{x}}) & -\varepsilon_1(\boldsymbol{x})I & * & * & *\\ H(\boldsymbol{x})Q(\tilde{\boldsymbol{x}}) & 0 & -I & * & *\\ G_2(\boldsymbol{x})W(\boldsymbol{x}) & 0 & 0 & -\varepsilon_2(\boldsymbol{x})I & *\\ C(\boldsymbol{x})Q(\tilde{\boldsymbol{x}}) & 0 & 0 & 0 & -I\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}&\mathscr{M}_{\mathrm{QWS}}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})=\\&Q(\tilde{\boldsymbol{x}})A^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})+A(\boldsymbol{x})Q(\tilde{\boldsymbol{x}})+B_2(\boldsymbol{x})W(\boldsymbol{x})+\\&W^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})B_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})+\gamma^{-2}B_1(\boldsymbol{x})B_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})+\\&(\varepsilon_1(\boldsymbol{x})+\varepsilon_2(\boldsymbol{x}))E(\boldsymbol{x})E^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})-\\&\sum_{j\in J}\frac{\partial Q}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{x}})A_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}+s(\boldsymbol{x})I,\end{aligned}$$

"$*$"表示由对称性得到的矩阵块, $\boldsymbol{\xi}=[\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ 为适当维数的任意列向量, 且满足$\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{b}}\in\mathbb{R}^{\dim(\boldsymbol{\xi})-n}$;

$$\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})=[\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial Q(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial x_{j_1}}\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}\ \cdots\ \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial Q(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial x_{j_m}}\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}].$$

证 系统(1)与状态反馈$\boldsymbol{u}=K(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$构成的闭环系统为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}&=A_{\mathrm{cl}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}+B_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w},\\ \boldsymbol{z}&=(C(\boldsymbol{x})+\Delta C(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{x},\end{aligned}\tag{6}$$

其中

$$A_{\mathrm{cl}}(\boldsymbol{x})=A(\boldsymbol{x})+\Delta A(\boldsymbol{x})+(B_2(\boldsymbol{x})+\Delta B_2(\boldsymbol{x}))K(\boldsymbol{x}).$$

受文[10]启发, 令$P(\tilde{\boldsymbol{x}})=Q^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}})$, 对闭环系统(6)定义如下Lyapunov函数:

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P(\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{x}. \tag{7}$$

记$\mathscr{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})=\dot{V}(\boldsymbol{x})+||\boldsymbol{z}||^2-\gamma^2||\boldsymbol{w}||^2$, 系统满足假设1, 计算可得

$$\begin{aligned}&\mathscr{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})\leqslant\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\psi_{pk}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{x}+||C(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}||^2+||\Delta C(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}||^2\leqslant\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\psi_{pkzc}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{x},\end{aligned}\tag{8}$$

其中:

$$\begin{aligned}&\psi_{pk}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})=\\&A^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})P(\tilde{\boldsymbol{x}})+P(\tilde{\boldsymbol{x}})A(\boldsymbol{x})+P(\tilde{\boldsymbol{x}})[(\varepsilon_1(\boldsymbol{x})+\\&\varepsilon_2(\boldsymbol{x}))E(\boldsymbol{x})E^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})+\gamma^{-2}B_1(\boldsymbol{x})B_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})]P(\tilde{\boldsymbol{x}})+\\&\varepsilon_1^{-1}(\boldsymbol{x})G_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})G_1(\boldsymbol{x})+P(\tilde{\boldsymbol{x}})B_2(\boldsymbol{x})K(\boldsymbol{x})+\\&K^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})B_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})P(\tilde{\boldsymbol{x}})+\\&\varepsilon_2^{-1}(\boldsymbol{x})K^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})G_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})G_2(\boldsymbol{x})K(\boldsymbol{x})+\\&\sum_{j\in J}\frac{\partial P}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{x}})(A_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}+\Delta A_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}),\\&\psi_{pkzc}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})=\\&\psi_{pk}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})+C^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})C(\boldsymbol{x})+H^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

由式(8)知, 若

$$\psi_{pkzc}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})<0, \tag{9}$$

则$\mathscr{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})<0$. 式(9)等价于

$$P^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}})\psi_{pkzc}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})P^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}})<0. \tag{10}$$

结合式(9)和式(10), 显然

$$P^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}})\psi_{pkzc}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})P^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}})+s(\boldsymbol{x})I\leqslant 0, \tag{11}$$

可保证式(10)成立, 进而$\mathscr{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})<0$.

由$Q(\tilde{\boldsymbol{x}})=P^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}})$, 令$W(\boldsymbol{x})=K(\boldsymbol{x})Q(\tilde{\boldsymbol{x}})$, 结合Schur补引理, 式(11)等价于

$$\Xi(\boldsymbol{x})-\begin{bmatrix}\sum_{j\in J}\frac{\partial Q(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial x_j}(\Delta A_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\leqslant 0. \tag{12}$$

由矩阵的性质知, 式(12)等价于

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\Xi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\sum_{j\in J}\frac{\partial Q}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{x}})(\Delta A_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}\leqslant 0. \tag{13}$$

注意到式(13)不等号左边第2项满足

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\sum_{j\in J}\frac{\partial Q}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{x}})(\Delta A_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}=\\&\sum_{j\in J}\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}^{T}\frac{\partial Q}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}(\Delta A_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x})=\\&[\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial Q(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial x_{j_1}}\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}\ \cdots\ \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial Q(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial x_{j_m}}\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}](\Delta A_J(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x})=\\&\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})E_J(\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x},t)G_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

考虑以下矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix}\rho(\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}})^2 & \boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})E_J(\boldsymbol{x})\\ E_J^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(\tilde{\boldsymbol{x}}) & I\end{bmatrix}\geqslant 0, \tag{14}$$

其中: $\rho\in\mathbb{R}$, $\rho\geqslant 0$. 式(14)等价于

$$\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})E_J(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})E_J(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\leqslant\rho(\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}})^2.$$

如果$\rho=0$, 则$\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})E_J(\boldsymbol{x})=0$, 式(13)等价于

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\Xi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}\leqslant 0. \tag{15}$$

显然，式(4)保证了式(15)成立, 进而$\mathscr{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})<0$.

一方面, $\mathscr{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})<0$保证了$\boldsymbol{w}\equiv 0$时, $\dot{V}(\boldsymbol{x})<0$, 故知闭环系统是内部稳定的. 另一方面, 对$\mathscr{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})<0$求$[0,T]$积分, 在零初始条件下有$V(\boldsymbol{x}(T))-V(\boldsymbol{x}(0))\geqslant 0$, 从而可得

$$0\leqslant-\int_0^T||\boldsymbol{z}(t)||^2\mathrm{d}t+\gamma^2\int_0^T||\boldsymbol{w}(t)||^2\mathrm{d}t.$$

由定义2知闭环系统的L_2增益小于等于γ. 证毕.

注 2 如果定理1中$\rho\neq 0$, 由式(4)知

$$-\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\mathscr{M}_{\mathrm{QWS}}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}\geqslant 0,$$

即

$$\begin{aligned}&-\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\mathscr{M}_{QW}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}+\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})E_J(\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x},t)G_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\geqslant\\&\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}s(\boldsymbol{x})I\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}+\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})E_J(\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x},t)G_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\geqslant\\&s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}-|\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})E_J(\boldsymbol{x})||F(\boldsymbol{x},t)G_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}|,\end{aligned}$$

其中$\mathscr{M}_{QW}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})=\mathscr{M}_{\mathrm{QWS}}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})-s(\boldsymbol{x})I$. 因此, 只要满足

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}G_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})F^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t)F(\boldsymbol{x},t)G_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\leqslant\frac{s^2(\boldsymbol{x})}{\rho},\tag{16}$$

则式(12)成立, 仍可保证闭环系统具有鲁棒H_∞性能.

定理1通过SOS规划中的优化算法, 给出了系统(1)状态反馈鲁棒H_∞控制问题的可解性条件. 定理1要求最优的ρ为零, 若$\rho\neq 0$, 通过式(16)仍可保证闭环系统的鲁棒H_∞性能. 然而, 式(16)结果在一定程度上限制了系统不确定性取值范围, 实际应用不便. 定理2则给出了该问题更为宽松的可解性条件.

定理 2 设系统(1)满足假设A1)−A3), 对于给定的标量$\gamma>0$, $\varepsilon>0$, 多项式$\varepsilon_1(\boldsymbol{x})>0$, $\varepsilon_2(\boldsymbol{x})>0$, SOS多项式$s_1(\boldsymbol{x})$, 若存在多项式矩阵$Q(\tilde{\boldsymbol{x}})>0$, $W(\boldsymbol{x})$以及SOS多项式$s(\boldsymbol{x})>0$, 使得表达式

$$\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}(Q(\tilde{\boldsymbol{x}})-\varepsilon I)\boldsymbol{\xi}_1,\tag{17}$$

$$-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\varXi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}(s_1(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}G_1(\boldsymbol{x})G_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}+1))\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}},\tag{18}$$

$$\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}s_1^2(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}})^2&\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})E_J(\boldsymbol{x})\\E_J^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(\tilde{\boldsymbol{x}})&I\end{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_2\tag{19}$$

是SOS, 则系统(1)的鲁棒H_∞控制问题可解, 状态反馈控制器

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=W(\boldsymbol{x})Q^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{x}$$

保证闭环系统内部稳定, 且L_2增益小于等于γ. 其中$\varXi(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})$定义同定理1.

证 式(19)等价于

$$\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})E_J(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})E_J(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\leqslant s_1^2(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}})^2.$$

由定理1证明可知, 如果

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\varXi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\sum_{j\in J}\frac{\partial Q}{\partial x_j}(\tilde{\boldsymbol{x}})\Delta A_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}=\\&\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\varXi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})E_J(\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x},t)G_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\leqslant 0\end{aligned}\tag{20}$$

成立, 则$\mathscr{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})<0$. 式(20)等价于

$$-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\varXi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})E_J(\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x},t)G_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\geqslant 0.\tag{21}$$

考虑如下关系式:

$$\begin{aligned}&-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\varXi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})E_J(\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x},t)G_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\geqslant\\&-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\varXi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}-\sqrt{\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})E_J(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})E_J(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\varOmega(\boldsymbol{x})}\geqslant\\&-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\varXi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}(s_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}G_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})G_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}+\\&s_1(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}},\end{aligned}\tag{22}$$

其中$\varOmega(\boldsymbol{x})=(F(\boldsymbol{x},t)G_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}F(\boldsymbol{x},t)G_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}+1$. 因此, 式(18)结合式(22), 可得出式(21)成立, 进而$\mathscr{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})<0$. 结合定理1的证明, 可得定理2的结论成立. 证毕.

注 3 定理1采用SOS优化算法处理ΔA_J, 要求ρ的最优解为零(即$\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})E_J(\boldsymbol{x})=0$)是较为苛刻的约束条件. 而定理2以多项式$s_1^2(\boldsymbol{x})$来约束$\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})E_J(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})E_J(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}$放宽了解存在的条件. 若定理1无法得到最优零解, 则所求出的最优ρ_{opt}可作为$s_1^2(\boldsymbol{x})$的参考量.

注 4 如果系统(1)中$J=\varnothing$, 则$P(\tilde{\boldsymbol{x}})$为常数矩阵, 那么$\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})=0$, 定理1, 2(此时$s_1(\boldsymbol{x})=0$)中式(5)和式(19)无约束作用. 此时, 定理1变为求解SOS规划的可行性问题, 满足式(3)和式(4)的解, 即为系统鲁棒H_∞控制问题的解.

注 5 定理1−2计算时, 为减少$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$带来的独立变量的数量. 某些情形下, 可对$\psi_{pkzc}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})$中的多项式矩阵进行合并, 降低$\varXi(\boldsymbol{x})$的维数. 例如: 若$\varepsilon_1^{-1}(\boldsymbol{x})G_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})G_1(\boldsymbol{x})$, $H^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x})$维数相同, 可设$\varUpsilon(\boldsymbol{x})=\varepsilon_1^{-1}(\boldsymbol{x})G_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})G_1(\boldsymbol{x})+H^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x})$, 则有$\varUpsilon(x)=N^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})N(\boldsymbol{x})$. 其中:

$$N(\boldsymbol{x})=U^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\mathrm{diag}\{\sqrt{\lambda_1(\varUpsilon(\boldsymbol{x}))},\cdots,\sqrt{\lambda_n(\varUpsilon(\boldsymbol{x}))}\}U(\boldsymbol{x}),$$
$$U^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\varUpsilon(\boldsymbol{x})U(\boldsymbol{x})=\mathrm{diag}\{\lambda_1(\varUpsilon(\boldsymbol{x})),\cdots,\lambda_n(\varUpsilon(\boldsymbol{x}))\}.$$

注 6 如果定理1−2中$Q(\tilde{\boldsymbol{x}})$满足: 当$||\boldsymbol{x}||\to\infty$时, $V(\boldsymbol{x})\to\infty$, 例如: $Q(\tilde{\boldsymbol{x}})$为常数矩阵或$\det(Q(\tilde{\boldsymbol{x}}))$为常数等. 则可得全局渐近稳定的鲁棒$\mathrm{H}_\infty$状态反馈控制器.

定理1−2可得到保证闭环系统渐近稳定的鲁棒H_∞状态反馈控制器, 且对于适当的$Q(\tilde{\boldsymbol{x}})$所得的控制器保证闭环系统全局渐近稳定. 然而, 定理1−2中H_∞问题的可解性条件要求对所有$\boldsymbol{x}$成立, 对于非线性系统并非易事, 研究使闭环系统在局部范围内稳定的控制器更有意义.

针对系统(1), 借助SOS规划技术与S-procedure技术, 可将具有状态约束的局部稳定鲁棒H_∞控制问题转化为无条件约束的问题来求解. 本文的局部稳定鲁棒H_∞控制问题是指, 寻找一个鲁棒H_∞状态反馈控制器, 保证当系统状态在指定区域内时, 闭环系统内部稳定, 且L_2增益小于等于γ.

定义如下集合:

$$\beta_\nu:=$$

$\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\,||x_i|\leqslant\nu_i,\ x_i\in\boldsymbol{x},\ \nu_i>0,\ i=1,\cdots,n\}.$

定理 3 设系统(1)满足假设A1)–A3), 对于给定的标量$\gamma>0$, $\varepsilon>0$, 多项式$\varepsilon_1(\boldsymbol{x})>0$, $\varepsilon_2(\boldsymbol{x})>0$, 若存在多项式矩阵$Q(\tilde{\boldsymbol{x}})>0$, $W(\boldsymbol{x})$以及SOS多项式$s(\boldsymbol{x})$, 且$s(\boldsymbol{x})>0$, 及标量$\pi_i\geqslant0$, $r_i\geqslant0$, $\nu_i>0(i=1,\cdots,n)$, 求解以下SOS优化问题:

$\min\rho$满足

$$\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}(Q(\tilde{\boldsymbol{x}})-\varepsilon I)\boldsymbol{\xi}_1-\sum_{i=1}^{n}\pi_i\ell_i^{\mathrm{T}}(\nu_i^2-x_i^2)\ell_i\text{是SOS},\quad(23)$$

$$-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\varXi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}-\sum_{i=1}^{n}r_i\varsigma_i^{\mathrm{T}}(\nu_i^2-x_i^2)\varsigma_i\text{是SOS},\quad(24)$$

$$\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\rho(\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{a}})^2 & \boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}})E_J(\boldsymbol{x})\\ E_J^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(\tilde{\boldsymbol{x}}) & I\end{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_2\text{是SOS}.\quad(25)$$

如果$\rho=0$, 则系统(1)的局部鲁棒H$_\infty$控制问题可解, 状态反馈控制器

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=W(\boldsymbol{x})Q^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{x}$$

保证了当状态满足$\boldsymbol{x}\in\beta_v$时, 闭环系统内部稳定, 且L_2增益小于等于γ. 其中: $\varXi(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}}),\boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2$的定义同定理1; $\ell_i,\ \varsigma_i$分别表示$\boldsymbol{\xi}_1$和$\boldsymbol{\xi}$中的元素, 即$\ell_i\in\boldsymbol{\xi}_1,\ \varsigma_i\in\boldsymbol{\xi}$.

证 定义如下矩阵:

$$\varPi:=\mathrm{diag}\{r_1\nu_1^2-r_1x_1^2,\cdots,r_n\nu_n^2-r_nx_n^2\},$$
$$r_i\geqslant0,\ \nu_i>0.$$

考虑多项式$\mathscr{F}(Q,\boldsymbol{\xi},\varsigma,\boldsymbol{x})$:

$$\mathscr{F}(Q,\boldsymbol{\xi},\varsigma,\boldsymbol{x}):=-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\varXi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}-\varsigma^{\mathrm{T}}\varPi\varsigma,$$

其中$\boldsymbol{\varsigma}\in\mathbb{R}^n$, 且$\boldsymbol{\varsigma}$中的元素属于$\boldsymbol{\xi}$, 即$\varsigma_i\in\boldsymbol{\varsigma},\ \varsigma_i\in\boldsymbol{\xi}$. 上式等价于

$$\mathscr{F}(Q,\boldsymbol{\xi},\varsigma,\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\varXi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}-\sum_{i=1}^{n}r_i\varsigma_i^{\mathrm{T}}(\nu_i^2-x_i^2)\varsigma_i.$$

假设$\mathscr{F}(Q,\boldsymbol{\xi},\varsigma,\boldsymbol{x})\geqslant0$, 如果$\mathscr{F}(Q,\boldsymbol{\xi},\varsigma,x)$是SOS, 结合引理1, 则$\mathscr{F}(Q,\boldsymbol{\xi},\varsigma,\boldsymbol{x})$可分解为

$$\mathscr{F}(Q,\boldsymbol{\xi},\varsigma,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\varOmega_0\boldsymbol{q}-\sum_{i=1}^{n}r_i\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\varOmega_i\boldsymbol{q}\geqslant0,\quad(26)$$

其中: $\boldsymbol{q}$表示由变量ς_i, ξ_i, x_i构成的适当的单项式向量; $\varOmega_0$, $\varOmega_i$表示适当维数的常数矩阵; ς_i, ξ_i分别表示向量$\boldsymbol{\varsigma}$, $\boldsymbol{\xi}$中的元素; x_i为系统状态量.

式(26)等价于一个半定约束:

$$\varOmega_0-\sum_{i=1}^{n}r_i\varOmega_i\geqslant0.\quad(27)$$

由引理2知$\mathscr{F}(Q,\boldsymbol{\xi},\varsigma,\boldsymbol{x})\geqslant0$, 若$\nu_i^2-x_i^2\geqslant0$, 即$\boldsymbol{x}\in\beta_\nu$, 则$-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\varXi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}\geqslant0$. 同理可证明若式(23)成立, 则当$\boldsymbol{x}\in\beta_\nu$, $Q(\tilde{\boldsymbol{x}})>0$. 结合定理1的证明, 可得出定理3结论成立. 证毕.

注 7 根据定理3的证明很容易得出定理2对应的局部稳定鲁棒H$_\infty$控制问题的可解性条件.

定理1, 2和3应用SOS技术给出了系统(1)的鲁棒H$_\infty$状态反馈控制器的设计方法, 定理中所涉及的求解SOS规划的可行性问题和优化问题均可利用MATLAB toolboxs SOSTOOLS 2.0[17]来实现.

4 仿真算例(Simulation example)

以文[8]中的非线性质量弹簧阻尼系统为例子:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{c_2}{m}-\dfrac{c_3}{m}x_1 & -\dfrac{c_1}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{m}+\dfrac{c_4}{m}x_1^2\end{bmatrix}\boldsymbol{u},$$

其中: x_1表示位移; x_2表示速度; $m=1$, $c_1=1$, $c_2=0.01$, $c_4=0.13$.

质量弹簧阻尼系统的外扰包含环境干扰和测量噪声. 考虑外扰的质量弹簧阻尼系统可表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.01-0.1x_1^2 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0 & 0.01\\ 0.5 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{w}+\begin{bmatrix}0\\ 1+0.13x_1^2\end{bmatrix}\boldsymbol{u},$$

$$\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.3\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}.$$

系统不确定性满足如下条件:

$$E(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}0.01 & 0\\ 0 & 0.1x_1+0.01\end{bmatrix},\ G_1(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0.1x_1\end{bmatrix},$$

$$G_2(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix},\ H(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}0 & 0.1x_1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

由参数满足的条件, 下列关系式成立:

$$\varepsilon_1^{-1}(\boldsymbol{x})G_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})G_1(\boldsymbol{x})+H^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x})=N^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})N(\boldsymbol{x}),$$

其中$N(\boldsymbol{x})=\sqrt{\varepsilon_1^{-1}(\boldsymbol{x})+1}[0\ \ 0.1x_1]$.

结合上文分析, 可将质量弹簧阻尼系统控制分为无状态约束(全局稳定)和有状态约束(局部稳定)两种情形, 并仿真验证文中结论的有效性.

1) 全局稳定情形.

由系统状态空间方程知, $\boldsymbol{x}=0$是唯一平衡点. 仿真参数为$\varepsilon=0.01$, $\varepsilon_1(\boldsymbol{x})=0.1$, $\varepsilon_2(\boldsymbol{x})=0.1$, $s(\boldsymbol{x})=0.0001$, $\gamma=0.91$. 系统满足$J=\varnothing$, 因此$P(\tilde{\boldsymbol{x}})$为常数矩阵, $Q(\tilde{\boldsymbol{x}})=P^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}})$满足注6条件. 取$\boldsymbol{\xi}=[1\ \ \kappa^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $\kappa\in\mathbb{R}^6$. 由定理1得保证系统平衡点$\boldsymbol{x}=0$全局渐近稳定的Lyapunov函数和相应的控制器为

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}26.471 & 0.411\\ 0.411 & 6.231\end{bmatrix}\boldsymbol{x},$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=$$
$$-4.295x_1-0.58x_1^3-0.814\mathrm{e}-4x_1^2-0.0667x_2-0.8095x_1^2x_2-0.752\mathrm{e}-7x_2^3-0.0012x_1x_2.$$

设系统所受外扰为$\boldsymbol{w}=0.01(\sin(0.05t)+\cos(0.05t))$, 取初始状态$\boldsymbol{x}_0=[0.5\ \ 1.5]^{\mathrm{T}}$. 仿真结果如图1–2所示.

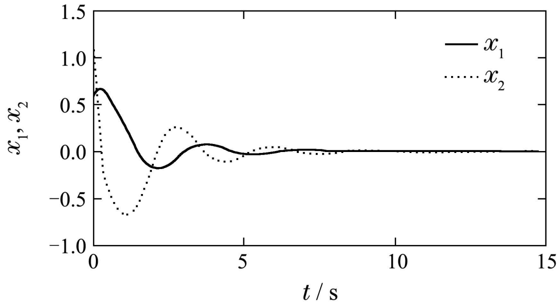

图 1 闭环系统状态时间响应

Fig. 1 State responses of the closed loop system

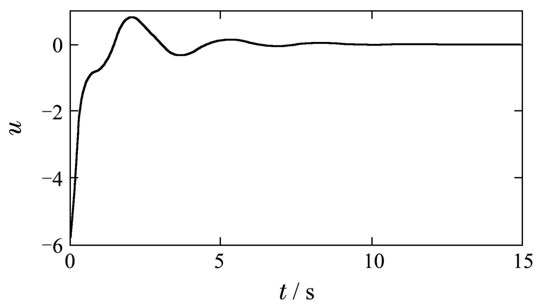

图 2 控制器时间响应

Fig. 2 Response of control input

2) 局部稳定情形.

设$\boldsymbol{x}\in\beta_\nu$, 且$\nu_1=1$, $\nu_2=1.5$, 取$r_1=0.01$, $r_2=0.02$, $\pi_1=0.05$, $\pi_2=0.05$, 其他参数同情形1), 由定理3可求得

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}12.225 & 0.275\\ 0.275 & 6.255\end{bmatrix}\boldsymbol{x},$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=$$

$$-1.99x_1-0.514x_1^3-0.1\mathrm{e}-7x_2^2x_1-5.6\mathrm{e}-5x_1^2-0.045x_2-11.7x_1^2x_2-2.5\mathrm{e}-7x_2^3-0.0013x_1x_2.$$

系统的初始状态与所受的外扰同情形1), 仿真结果如图3–4所示.

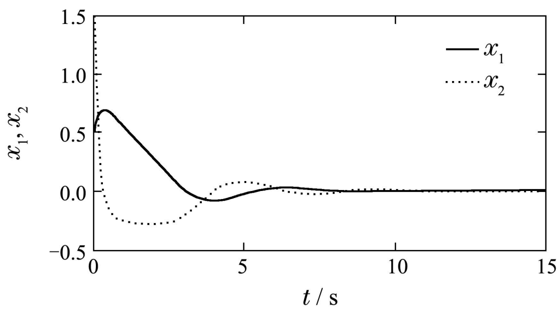

图 3 闭环系统状态时间响应

Fig. 3 State responses of the closed loop system

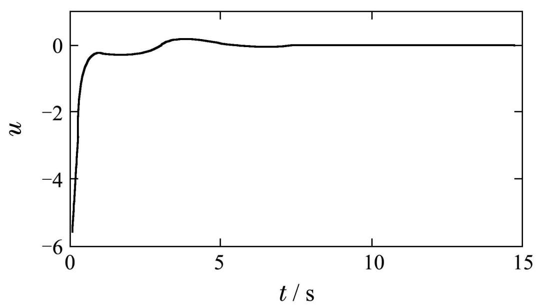

图 4 控制器时间响应

Fig. 4 Response of control input

上述仿真结果表明了文中的方法是可行的, 且所设计的控制器保证了闭环系统具有较好的鲁棒性和较强的干扰抑制能力.

5 结论(Conclusions)

考虑一类多项式型不确定非线性系统, 研究其鲁棒H_∞状态反馈控制器的设计方法. 利用SOS规划技术结合Lyapunov稳定性理论, 给出了一种求解控制器的方法, 该方法避开了直接求解HJI与构造Lyapunov函数带来的困难, 将非线性系统的鲁棒H_∞控制问题转化为SOS规划问题, 而后者已有有效的凸优化算法设计求解. 此外, 利用S-procedure思想给出了保证系统在局部区域内具有H_∞性能的鲁棒H_∞状态反馈控制器设计方法. 最后, 通过仿真算例验证了方法的正确性和可行性.

参考文献(References):

[1] VAN DER SCHAFT A J. L_2-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H_∞ control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(6): 770 – 784.

[2] ISIDORI A, ASTOLFI A. Disturbance attenuation and H_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(9): 1283 – 1293.

[3] LU W M, DOYLE J C. H_∞ control of nonlinear systems via output feedback: controller parameterization [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(12): 2517 – 2521.

[4] SHEN T L, KATSUTOSHI T. Robust H_∞ control of uncertain nonlinear system via state feedback [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(4): 766 – 768.

[5] LU G P, ZHENG Y F, DANIEL W C H. Nonlinear robust H_∞ control via dynamic output feedback [J]. *Systems & Control Letters*, 2000, 39(3): 193 – 202.

[6] FU Y S, TIAN Z H, SHI S J. Robust H_∞ control of uncertain nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2006, 42(9): 1547 – 1552.

[7] PREMPAIN E. An application of the Sum of Squares Decomposition to the L_2-gain computation for a class of nonlinear systems [C] //*Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*. Seville: IEEE, 2005: 6865 – 6868.

[8] ZHENG Q, WU F. Nonlinear output feedback H_∞ control for polynomial nonlinear systems [C] //*Proceedings of the American Control Conference*. Seattle, Washington: IEEE, 2008: 1196 – 1201.

[9] PRAJNA S, PARRILO P A, RANTZER A. Nonlinear control synthesis by convex optimization [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(2): 310 – 314.

[10] PRAJNA S, PAPACHRISTODOULOU A, WU F. Nonlinear control synthesis by Sum of Squares optimization: a Lyapunov-based approach [C] //*Proceedings of the 5th Asian Control Conference*. Australia: IEEE, 2004: 157 – 165.

[11] XU J, XIE L H, WANG Y Y. Simultaneous stabilization and robust control of polynomial nonlinear systems using SOS techniques [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(8): 1892 – 1897.

[12] MA H J, YANG G H. FTC synthesis for nonlinear systems: sum of squares optimization approach [C] //*Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, LA: IEEE, 2007: 2645 – 2650.

[13] ZACHARY J W, FEELEY R, TAN W H, et al. Some controls applications of sum of squares programming [C] //*Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. Hawaii, CA: IEEE, 2003: 4676 – 4681.

[14] PARRILO P A. *Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization* [D]. Pasadena, California: California Institute of Technology, 2000.

[15] XU J, XIE L H, WANG Y Y. Synthesis of discrete-time nonlinear systems: a SOS approach [C] //*Proceedings of the American Control Conference*. New York: IEEE, 2007: 4829 – 4834.

[16] NGUANG S K, SAAT S, KRUG M. Static output feedback controller design for uncertain polynomial systems: an iterative sums of squares approach [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2011, 5(9): 1079 – 1084.

[17] PRAJNA S, PAPACHRISTODOULOU A, SEILER P, et al. *SOSTOOLS: Sum of Squares optimization toolbox for MATLAB* [EB/OL]. California Institute of Technology, Pasadena, California, 2004, [May 2, 2012]. http://www.cds.caltech.edu/sostool/.

[18] PARRILO P A, STURMFELS B. Minimizing polynomial functions [M] //*DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*. Providence: American Mathematical Society, 2003: 83 – 100.

[19] REZNICK B. Some concrete aspects of Hilbert's 17th problem [M] //*Contemporary Mathematics*. Providence: American Mathematical Society, 2000: 251 – 272.

[20] NGUANG S K. Robust nonlinear H_∞ output feedback control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(7): 1003 – 1007.

[21] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 21 – 22.
(YU Li. *Robust Control–Linear Matrix Inequality Approach* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 21 – 22.)

作者简介:

黄文超 (1985–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为鲁棒控制, E-mail: ehwenc@gmail.com;

孙洪飞 (1970–), 男, 教授, 目前研究方向为鲁棒控制、复杂系统控制, E-mail: sunhf@xmu.edu.cn;

曾建平 (1966–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为鲁棒控制、复杂系统控制, E-mail: jpzeng@xmu.edu.cn.