

## 带Leader的不确定高阶多智能体系统的 $L_2-L_\infty$ 一致

莫立坡<sup>1</sup>, 周艳杰<sup>1</sup>, 周洪波<sup>2</sup>

(1. 北京工商大学 理学院, 北京 100048; 2. 南伊利诺伊大学 计算机科学系, 美国 卡本戴尔)

**摘要:** 针对一类存在外部干扰, 模型误差以及时滞的带Leader的高阶多智能体系统, 利用 $L_2-L_\infty$ 方法研究了其一致性问题. 首先给出了系统存在外部干扰和模型误差时的数学模型. 然后针对有时滞和有时滞两种情况, 利用Lyapunov函数的方法, 分析了满足 $L_2-L_\infty$ 性能指标下的一致问题, 分别得到了相应闭环系统达到一致的条件. 最后, 仿真结果验证了所得结果的有效性.

**关键词:**  $L_2-L_\infty$ 一致; 高阶多智能体系统; 不确定性; 时滞

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

### *L*-two-*L*-infinity consensus in uncertain high-order multi-agent systems with a leader

MO Li-po<sup>1</sup>, ZHOU Yan-jie<sup>1</sup>, ZHOU Hong-bo<sup>2</sup>

(1. School of Science, Beijing Technology and Business University, Beijing 100048, China;

2. Department of Computer Science, Southern Illinois University, Carbondale, USA)

**Abstract:** We use the method of *L*-two-*L*-infinity to investigate the consensus problem for a class of high-order multi-agent systems with a leader, under the condition of existing external disturbances, model errors and time-delay. The mathematical model is developed and the leader-following consensus with desired *L*-two-*L*-infinity performance is analyzed for networks with and without time-delay; thus, conditions for consensus of corresponding closed-loop systems are obtained respectively. Simulation results are provided to demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

**Key words:** *L*-two-*L*-infinity consensus; high-order multi-agent systems; uncertainty; time delay

## 1 引言(Introduction)

多智能体技术具有自主性、协调性和分布式的特点以及学习、推理、自组织等能力, 因此被广泛应用于无人驾驶机、多机器人、智能交通等领域. 从鸟群的飞翔与迁徙, 鱼群有序地在江海中游荡等生物的群居现象中得到启发, 提出了多智能体一致控制问题. 近些年, 该问题得到了广泛的关注, 提出了各种各样的分布式控制律. 例如, Vicsek等人用一些非常简单的方程描述智能体的动力学模型, 用网络描述个体间的信息传递及相互作用, 通过计算机模拟, 发现了出人意料的结果, 整个群体出现了行为上的一致性<sup>[1]</sup>. 随后, Jadbabaie等人用数学的方法从理论上解释了Vicsek模型<sup>[2]</sup>. 之后, 学者们运用稳定性方法研究多智能体系统的一致性问题取得了丰富的结果<sup>[3-20]</sup>. 最近, Hu等人研究了带Leader的时滞多智能体网络的一致问题, 得到了系统达到一致所需的条件<sup>[6]</sup>. 对于高阶多智能体系统, Ni等人得到了多智能体系统达到一致的条件<sup>[7]</sup>. 针对外部干扰的存在, Lin等人得到了系统满足 $H_\infty$ 性能下, 达到一致的充

分条件<sup>[8-9]</sup>. 对于具有外界干扰的无Leader高阶多智能体系统, 文献[10]给出了系统达到 $H_\infty$ 一致的条件.

正如文献[20]所说, 在实际工程中, 控制输出往往需要控制在一定的范围内, 研究外部干扰和时滞对控制系统性能的影响以及系统输出的极值问题都是很必要的. 在控制论中, 利用 $L_2-L_\infty$ 方法能够使系统的输出最小化. 目前关于多智能体系统的 $L_2-L_\infty$ 控制的文献比较少. 对于带Leader的二阶多智能体网络, 林等人得到了系统达到 $L_2-L_\infty$ 一致的充分条件<sup>[20]</sup>. 在文献[20]的模型中只考虑了外部干扰, 并且其控制律不仅用到了智能体的相对位置信息, 还利用了智能体间的相对速度信息. 然而, 实际工程和物理系统中不仅存在外界干扰还经常会有模型误差, 并且智能体可能不能获得其邻居的相对速度信息. 本文的主要目的是把文献[20]的结果推广到带Leader的高阶多智能体系统. 使用的控制律中只包含了智能体邻居的一阶信息(相对位置), 并且考虑了系统的外部干扰和建模误差. 针对智能体网络有时滞和有时滞两种情况, 分别得到了系统满足 $L_2-$

$L_\infty$ 性能指标下达到一致的条件. 并且通过仿真实验证实了所得到结果的合理性.

## 2 预备知识(Preliminaries)

设无向图  $G = (V, \varepsilon, A)$ , 其中:  $V = \{v_i : i = 1, 2, \dots, n\}$  是节点集,  $\varepsilon = \{e_{ij} = (v_i, v_j) : i, j \in I\}$  是图  $G$  的边集,  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  是指标集;  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是  $G$  的加权邻接矩阵, 其中  $a_{ii} = 0$  且  $a_{ij} = a_{ji} > 0$  当且仅当  $e_{ij} = (v_i, v_j) \in \varepsilon$ . 节点  $v_i$  的邻居用  $N_i = \{j : e_{ij} \in \varepsilon, j \neq i\}$  表示, 节点  $v_i$  的出度和入度分别用  $\deg_{\text{out}}(v_i)$  和  $\deg_{\text{in}}(v_i)$  表示, 且  $\deg_{\text{out}}(v_i) = \sum_{j \neq i} a_{ij}$ ,  $\deg_{\text{in}}(v_i) = \sum_{j \neq i} a_{ji}$ . 易知

$$\deg_{\text{out}}(v_i) = \deg_{\text{in}}(v_i).$$

图  $G$  的 Laplace 矩阵为

$$L := \text{diag}\{\deg_{\text{in}}(v_1), \dots, \deg_{\text{in}}(v_n)\} - A.$$

对于带 Leader 的多智能体网络, 其网络图可由  $\tilde{G} = G + \{v_0\}$  表示, 其中  $v_0$  代表 Leader, 此时, 称  $v_1, \dots, v_n$  为 follower-agents. 定义  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为 Leader 的邻接矩阵, 其中:  $D = \text{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ,  $\alpha_i = a_{i0}$ ,  $a_{i0} > 0$  当且仅当节点  $v_i$  是 Leader 的邻居. 设  $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_m\}$ , 即图  $G$  有  $m$  条边, 且每条边相应的权值为  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . 图  $G$  的 Laplace 矩阵具有如下性质:

**引理 1** 对于图  $G$ , 存在 0-1 矩阵  $D \in \mathbb{R}^{n \times 2m}$  和  $E \in \mathbb{R}^{2m \times n}$ , 使得  $L = DW(D^T - E)$ . 其中  $W = \text{diag}\{\omega_1, \omega_1, \dots, \omega_m, \omega_m\}$ .

**证** 令  $D = [D_{ij}]_{n \times 2m}$ ,  $E = [E_{ij}]_{2m \times n}$ . 在图  $G$  中有边关联的任何两个顶点间增加一个边, 这样有边关联的任何两个顶点间有且仅有两边, 分别给每条边指定一个方向, 且规定连接两个相同顶点的两条边方向相反, 这样就把无向图  $G$  变为了有向图. 类似于文献[9]中的证明, 可以得到该引理的结论.

## 3 系统模型(Models of systems)

考虑由  $n + 1$  个智能体  $v_0, v_1, \dots, v_n$  构成的多智能体动态网络系统, 其中  $v_0$  代表 Leader,  $v_1, \dots, v_n$  代表  $n$  个 Follower. 假定 Leader 的运动状态是独立的, 并且每个 Follower 的运动受 Leader 和其他 Follower 的影响.  $n$  个智能体的连续时间动态模型可以描述为

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i^{(0)}(t) = \xi_i^{(1)}(t), \\ \vdots \\ \dot{\xi}_i^{(l-2)}(t) = \xi_i^{(l-1)}(t), \\ \dot{\xi}_i^{(l-1)}(t) = u_i(t) + w_i(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\xi_i = (\xi_i^{(0)}, \xi_i^{(1)}, \dots, \xi_i^{(l-1)}) \in \mathbb{R}^l$  代表第  $i$  个智能体的状态,  $u_i(t) \in \mathbb{R}$ ,  $w_i(t) \in \mathbb{R}$  分别表示第  $i$  个智能体的控制输入和外部干扰. Leader 的动态模型可

以描述为

$$\begin{cases} \dot{\xi}_0^{(0)}(t) = \xi_0^{(1)}(t), \\ \vdots \\ \dot{\xi}_0^{(l-2)}(t) = \xi_0^{(l-1)}(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\xi_0^{l-1}$  是常数. 例如  $l = 2$  表示 Leader 的速度不变,  $l = 3$  表示 Leader 的加速度不变. 对于多智能体网络 (1)–(2), 类似于文献[6], 分别使用如下两种控制协议:

1) 无时滞:

$$\begin{aligned} u_i(t) = & -g_0 \sum_{j \in N_i(t)} (a_{ij} + \Delta a_{ij})(\xi_i^{(0)}(t) - \xi_j^{(0)}(t)) - \\ & \sum_{k=0}^{l-1} g_k (a_{i0} + \Delta a_{i0})(\xi_i^{(k)}(t) - \xi_0^{(k)}(t)). \end{aligned} \quad (3)$$

2) 有时滞:

$$\begin{aligned} u_i(t) = & -g_0 \sum_{j \in N_i(t)} (a_{ij} + \Delta a_{ij})(\xi_i^{(0)}(t - \tau) - \\ & \xi_j^{(0)}(t - \tau)) - \sum_{k=0}^{l-1} g_k (a_{i0} + \Delta a_{i0}) \cdot \\ & (\xi_i^{(k)}(t - \tau) - \xi_0^{(k)}(t - \tau)), \end{aligned} \quad (4)$$

其中:  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, n, j = 0, 1, \dots, n, i \neq j$ ) 刻画的是第  $j$  个智能体 (第 0 个智能体是 Leader) 对第  $i$  个智能体的影响,  $\Delta a_{ij}$  表示  $a_{ij}$  的误差, 当  $i \neq j$  且  $a_{ij} \neq 0$  时,  $|\Delta a_{ij}(t)| \leq \psi_{ij}$ , 否则  $|\Delta a_{ij}(t)| = 0$ , 其中  $\psi_{ij}$  是一个固定常数,  $i = 1, 2, \dots, n, j = 0, 1, \dots, n$ . 假设  $\Delta a_{ij}(t)$  是  $t$  的连续函数.

所谓带 Leader 的高阶多智能体网络实现 Leader-following 一致 (类似于文献[21]中的定义 1) 是指所有 Follower 和 Leader 的相对状态渐近趋于 0, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi_i(t) - \xi_0(t)\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中

$$\xi_0(t) = (\xi_0^{(0)}, \xi_0^{(1)}, \dots, \xi_0^{(l-1)}).$$

定义

$$x_i^{(k)} = \xi_i^{(k)} - \xi_0^{(k)},$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, 2, \dots, l - 1,$$

则多智能体网络动态模型可以改写成如下形式:

1) 无时滞:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (I_n \otimes A)x(t) - [(L + \Delta L) \otimes B_1]x(t) - \\ & [(D + \Delta D) \otimes B_2]x(t) + (I_n \otimes F)w(t). \end{aligned} \quad (5)$$

2) 有时滞:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (I_n \otimes A)x(t) - [(L + \Delta L) \otimes B_1]x(t - \tau) - \\ & [(D + \Delta D) \otimes B_2]x(t - \tau) + (I_n \otimes F)w(t), \end{aligned} \quad (6)$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times l},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times l},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_{l-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times l},$$

$$F = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T \in \mathbb{R}^{l \times 1}.$$

其中模型(5)和(6)中的 $\Delta L$ 可以看做是不确定Laplace矩阵, 即, 对应于Laplace矩阵 $L$ 的不确定量. 根据引理1, 存在矩阵 $E_1, E_2$ , 使得 $\Delta L = E_1 \Sigma(t) E_2$ , 其中

$$\Sigma(t) = \text{diag}\{\Delta w_1(t), \Delta w_1(t), \dots, \Delta w_m(t)\}$$

是对角矩阵,  $\Delta w_i(t) (i = 1, 2, \dots, m)$ 表示图 $G$ 的边的权值不确定性. 不失一般性, 假设 $\psi_{ij} = 1$ , 即 $\Sigma^T(t) \Sigma(t) \leq I$ . 同样 $\Delta D$ 代表 $D$ 的不确定性. 定义0-1矩阵 $E_3 = [E_3^{ij}]_{n \times n}$ , 其中 $E_3^{ij} = 1$ 当且仅当 $i = j$ 且 $d_i > 0$ . 则 $\Delta D = E_3 \Sigma_1(t) E_3$ . 同样假设 $\Sigma_1^T(t) \Sigma_1(t) \leq I$ .

$x(t)$ 描述的是所有Followers与Leader间的相对状态. 多智能体网络的一致性要求当时间 $t \rightarrow \infty$ 时, Followers与Leader的相对状态趋于零, 然而在实际系统工程中, 有时只要求Followers与Leader的相对状态被控制在一定的范围之内即可. 为了反映这种情况, 定义系统的输出为

$$z(t) = (I_n \otimes C)x(t), \tag{7}$$

其中:  $C = \text{diag}\{c_0, c_1, \dots, c_{l-1}\} \in \mathbb{R}^{l \times l}$ ,  $c_i > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, l-1$ . 系统输出 $y(t)$ 的表达式中的矩阵 $C$ 刻画Followers和Leader的相对状态的约束范围. 控制范围要求越小, 其对角元素取值越大. 因此, 可以通过改变 $C$ 的对角元的取值将 $\|z(t)\|_\infty$ 控制在要求的范围之内.

**注1** 文献[20]研究了二阶系统的 $L_2-L_\infty$ 控制问题, 其控制协议中包含了智能体的所有状态信息, 并且没有考虑系统模型误差, 然而, Followers也许只能获得其邻居Followers的一阶信息(位置信息), 并且建模误差不可避免,

为了应对这些情况, 协议(3)和(4)只利用了每个Follower邻居的一阶信息且考虑了系统的模型误差, 因此更符合实际.

本文的主要目的是在外部干扰和模型误差存在时, 如何就无时滞和有时滞两种情况设计协议 $u_i(t)$ 中的 $a_{ij} (i = 1, 2, \dots, n, j = 0, 1, \dots, n)$ , 以及 $g_k (k = 0, 1, \dots, l-1)$ , 使得高阶多智能体系统满足 $L_2-L_\infty$ 性能指标, 即在零初始条件下, 从 $w(t)$ 到 $z(t)$ 的闭环传递函数 $T_{zw}$ 满足

$$\|T_{zw}(s)\|_{L_2-L_\infty} = \sup_{w \neq 0, w \in L_2[0, +\infty)} \frac{\|z(t)\|_\infty}{\|w(t)\|_2} < \gamma,$$

其中 $\gamma > 0$ 为固定常数.

### 4 高阶多智能体网络的稳定性分析(Stability analysis of higher-order multi-agent networks)

这部分主要就网络信息传输中不存在时滞和存在时滞两种情况来分析高阶多智能体网络系统的稳定性, 为此, 首先介绍两个引理:

**引理2**<sup>[22-23]</sup> 考虑对称分块矩阵

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix}.$$

以下命题成立:

- 1)  $X > 0$ 的充要条件是如下条件之一成立:
  - a)  $X_{11} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{12}^T > 0$ 且 $X_{22} > 0$ ;
  - b)  $X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12} > 0$ 且 $X_{11} > 0$ ;
- 2) 当 $X_{22} \geq 0$ 时,  $X \geq 0$ 的充要条件是 $N(X_{22}) \subset N(X_{12})$ , 且 $X_{11} - X_{12} X_{22}^+ X_{12}^T \geq 0$ ;
- 3) 当 $X_{11} \geq 0$ 时,  $X \geq 0$ 的充要条件是 $N(X_{11}) \subset N(X_{12}^T)$ , 且 $X_{22} - X_{12}^T X_{11}^+ X_{12} \geq 0$ , 其中:  $N(\cdot)$ 表示矩阵的核空间,  $X^+$ 表示 $X$ 的拟逆阵.

**引理3**<sup>[24]</sup> 设向量 $x, y \in \mathbb{R}^n$ , 对于任意正定矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 有 $2x^T y \leq x^T Q^{-1} x + y^T Q y$ .

#### 4.1 无时滞网络(Networks without time-delay)

下面来分析高阶多智能体网络系统的稳定性.

**定理1** 考虑带Leader的高阶多智能体系统(5)-(7). 给定常数 $\gamma > 0$ . 若存在正定矩阵 $P \in \mathbb{R}^{nl \times nl}$ 以及正数 $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$ 使得

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} \\ * & \Gamma_{22} & 0 & 0 \\ * & * & \Gamma_{33} & 0 \\ * & * & * & \Gamma_{44} \end{bmatrix} < 0, \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} -P & -(I_n \otimes C) \\ * & -\gamma I_{nl} \end{bmatrix} \leq 0 \tag{9}$$

成立, 则闭环系统(5)-(7)是鲁棒稳定的并且满足

$\|T_{zw}(s)\|_{L_2-L_\infty} \leq \gamma$ , 其中:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= P(I_n \otimes A) + (I_n \otimes A)^T P - \\ &P(L \otimes B_1) - (L \otimes B_1)^T P - \\ &(D \otimes B_2)^T P - P(D \otimes B_2) + \\ &\epsilon_1(E_2^T E_2) \otimes I_l + \epsilon_2(E_3^T E_3) \otimes I_l, \\ \Gamma_{12} &= P(E_1 \otimes B_1), \Gamma_{13} = P(E_3 \otimes B_2), \\ \Gamma_{14} &= P(I_n \otimes F), \Gamma_{22} = -\epsilon_1 I, \\ \Gamma_{33} &= -\epsilon_2 I, \Gamma_{44} = -\gamma I, \end{aligned}$$

并且这里的矩阵都具有适当的维数.

**证** 设Lyapunov函数  $V(x) = x^T(t)Px(t)$ , 则  $V$  沿系统(5)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \\ &2x^T(t)P(I_n \otimes A)x(t) - 2x^T(t)P[(L + \\ &\Delta L) \otimes B_1]x(t) - 2x^T(t)P[(D + \\ &\Delta D) \otimes B_2]x(t) + 2x^T(t)P(I_n \otimes F)w(t) = \\ &2x^T(t)P(I_n \otimes A)x(t) - 2x^T(t)P(L \otimes B_1)x(t) - \\ &2x^T(t)P(D \otimes B_2)x(t) + 2x^T(t)P(I_n \otimes F)w(t) - \\ &2x^T(t)P(\Delta L \otimes B_1)x(t) - 2x^T(t)P(\Delta D \otimes B_2)x(t). \end{aligned}$$

利用引理3, 一方面,

$$\begin{aligned} &-2x^T(t)P(\Delta L \otimes B_1)x(t) \leq \\ &\frac{1}{\epsilon_1} x^T(t)P(E_1 \otimes B_1)(E_1 \otimes B_1)^T Px(t) + \\ &\epsilon_1 x^T(t)[(\Sigma(t)E_2) \otimes I_l]^T [(\Sigma(t)E_2) \otimes I_l]x(t) \leq \\ &\frac{1}{\epsilon_1} x^T(t)P[(E_1 E_1^T) \otimes (B_1 B_1^T)]Px(t) + \\ &\epsilon_1 x^T(t)[(E_2^T E_2) \otimes I_l]x(t), \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} &-2x^T(t)P(\Delta D \otimes B_2)x(t) \leq \\ &\frac{1}{\epsilon_2} x^T(t)P[(E_3 E_3^T) \otimes (B_2 B_2^T)]Px(t) + \\ &\epsilon_2 x^T(t)[(E_3 E_3^T) \otimes I_l]x(t), \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \\ &2x^T(t)P(I_n \otimes A)x(t) - \\ &2x^T(t)P(L \otimes B_1)x(t) - 2x^T(t)P(D \otimes B_2)x(t) + \\ &2x^T(t)P(I_n \otimes F)w(t) + \\ &\frac{1}{\epsilon_1} x^T(t)P[(E_1 E_1^T) \otimes (B_1 B_1^T)]Px(t) + \\ &\epsilon_1 x^T(t)[(E_2^T E_2) \otimes I_l]x(t) + \\ &\frac{1}{\epsilon_2} x^T(t)P[(E_3 E_3^T) \otimes (B_2 B_2^T)]Px(t) + \\ &\epsilon_2 x^T(t)[(E_3 E_3^T) \otimes I_l]x(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(t) - V(0) - \gamma \int_0^t w^T(s)w(s)ds &= \\ \int_0^t [\dot{V}(s) - \gamma w^T(s)w(s)]ds &\leq \\ \int_0^t \begin{bmatrix} x(s) \\ w(s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ w(s) \end{bmatrix} ds, \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \\ &P(I_n \otimes A) + (I_n \otimes A)^T P - P(L \otimes B_1) - \\ &(L \otimes B_1)^T P - P(D \otimes B_2) - (D \otimes B_2)^T P + \\ &\epsilon_1^{-1} P[(E_1 E_1^T) \otimes (B_1 B_1^T)]P + \epsilon_1(E_2^T E_2) \otimes I_l + \\ &\epsilon_2^{-1} P(E_3 E_3^T) \otimes (B_2 B_2^T)P + \epsilon_2(E_3^T E_3) \otimes I_l, \\ M_{12} &= P(I_n \otimes F), M_{22} = -\gamma I_n. \end{aligned}$$

利用引理2, 容易证明  $M < 0$  等价于  $\Gamma < 0$ . 故

$$V(t) < \gamma \int_0^t w^T(s)w(s)ds.$$

再次使用引理2可知, 式(9)成立等价于

$$(I_n \otimes C)^T (I_n \otimes C) - \gamma P \leq 0,$$

从而

$$z^T(t)z(t) \leq \gamma V(t) < \gamma^2 \int_0^t w^T(s)w(s)ds.$$

因此,  $\forall w(t) \in L_2, w(t) \neq 0$ , 有

$$\|z(t)\|_\infty^2 \leq \gamma^2 \|w(t)\|_2^2,$$

即  $\|T_{zw}(s)\|_{L_2-L_\infty} < \gamma$ . 该定理得证.

**注 2** 该定理给出了闭环系统鲁棒稳定且满足  $\|T_{zw}(s)\|_{L_2-L_\infty} < \gamma$  的充分条件. 利用文献[9]中的性质1的证明方法, 可以看出该定理条件中的  $\Gamma < 0$  在一定条件下是可以保证的. 事实上, 利用文献[9]中性质1及文献[25]中定理1的方法, 可以证明图 $\tilde{G}$ 连通是闭环系统鲁棒稳定且满足  $\|T_{zw}(s)\|_{L_2-L_\infty} < \gamma$  的必要条件.

### 4.2 有时滞网络(Networks with time-delay)

下面考虑系统存在时滞的情形.

**定理 2** 考虑高阶多智能体网络系统(6)-(7). 设  $\Delta L = 0, \Delta D = 0$ . 给定常数  $\gamma > 0$  和时滞  $\tau > 0$ . 若存在正定矩阵  $P, Q, R \in \mathbb{R}^{nl \times nl}$ , 使得

$$\begin{aligned} \Pi &= \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} & \pi_{15} \\ * & \pi_{22} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \pi_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & \pi_{44} & \pi_{45} \\ * & * & * & * & \pi_{55} \end{bmatrix} < 0, \\ &\begin{bmatrix} -P & I_n \otimes C \\ * & -\gamma I_{nl} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

成立, 则高阶多智能体网络是鲁棒稳定的并且满足

$\|T_{zw}(s)\| < \gamma$ . 其中:

$$\begin{aligned} \pi_{11} &= P(I_n \otimes A) + (I_n \otimes A)^T P - P(L \otimes B_1) - \\ &\quad (L \otimes B_1)^T P - P(D \otimes B_2) - (D \otimes B_2)^T P + \\ &\quad Q + \tau(I_n \otimes A)^T R(I_n \otimes A), \\ \pi_{12} &= P(L \otimes B_1), \quad \pi_{22} = -\frac{1}{2\tau} R, \\ \pi_{13} &= P(D \otimes B_2), \quad \pi_{33} = -\frac{1}{2\tau} R, \\ \pi_{14} &= -\tau(I_n \otimes A)^T R(L \otimes B_1) - \\ &\quad \tau(I_n \otimes A)^T R(D \otimes B_2), \\ \pi_{15} &= P(I_n \otimes F) + \tau(I_n \otimes A)^T R(I_n \otimes F), \\ \pi_{44} &= -Q + \tau(L \otimes B_1)^T R(L \otimes B_1) + \\ &\quad \tau(D \otimes B_2)^T R(D \otimes B_2) + \\ &\quad \tau(L \otimes B_1)^T R(D \otimes B_2) + \\ &\quad \tau(D \otimes B_2)^T R(L \otimes B_1), \\ \pi_{45} &= -\tau(L \otimes B_1)^T R(I_n \otimes F) - \\ &\quad \tau(D \otimes B_2)^T R(I_n \otimes F), \\ \pi_{55} &= \tau(I_n \otimes F)^T R(I_n \otimes F) - \gamma I_{nl}. \end{aligned}$$

证 构造如下候选Lyapunov函数:

$$V(t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(s)Qx(s)ds + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsd\theta.$$

利用引理3及 $x(t-\tau) = x(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)ds$ 可知

$$\dot{V}(t) \leq \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ * & N_{22} & N_{23} \\ * & * & N_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \\ w(t) \end{bmatrix},$$

其中:

$$\begin{aligned} N_{11} &= P(I_n \otimes A) + (I_n \otimes A)^T P - \\ &\quad P(L \otimes B_1) - (L \otimes B_1)^T P + \\ &\quad 2\tau P(L \otimes B_1)R^{-1}(L \otimes B_1)^T P - \\ &\quad P(D \otimes B_2) - (D \otimes B_2)^T P + \\ &\quad 2\tau P(D \otimes B_2)R^{-1}(D \otimes B_2)^T P + \\ &\quad Q + \tau(I_n \otimes A)^T R(I_n \otimes A), \\ N_{12} &= -\tau(I_n \otimes A)^T R(L \otimes B_1) - \\ &\quad \tau(I_n \otimes A)^T R(D \otimes B_2), \\ N_{13} &= P(I_n \otimes F) + \tau(I_n \otimes A)^T R(I_n \otimes F), \\ N_{22} &= -Q + \tau(L \otimes B_1)^T R(L \otimes B_1) + \\ &\quad \tau(D \otimes B_2)^T R(D \otimes B_2) + \\ &\quad \tau(L \otimes B_1)^T R(D \otimes B_2) + \\ &\quad \tau(D \otimes B_2)^T R(L \otimes B_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{23} &= -\tau(L \otimes B_1)^T R(I_n \otimes F) - \\ &\quad \tau(D \otimes B_2)^T R(I_n \otimes F), \\ N_{33} &= \tau(I_n \otimes F)^T R(I_n \otimes F). \end{aligned}$$

若零初始状态, 则

$$\begin{aligned} V(t) - \gamma \int_0^t w^T(s)w(s)ds &= \\ \int_0^t [\dot{V}(s) - \gamma w^T(s)w(s)]ds &\leq \\ \int_0^t \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s-\tau) \\ w(s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ * & N_{22} & N_{23} \\ * & * & \pi_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s-\tau) \\ w(s) \end{bmatrix} ds. \end{aligned}$$

利用Schur补引理可得

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ * & N_{22} & N_{23} \\ * & * & N_{33} - \gamma I_{nl} \end{bmatrix} < 0,$$

等价于 $\Pi < 0$ .

由

$$\begin{bmatrix} -P & I_n \otimes C \\ * & -\gamma I_{nl} \end{bmatrix} < 0$$

可知

$$z^T(t)z(t) \leq \gamma V(t) < \gamma^2 \int_0^t w^T(s)w(s)ds,$$

即, 对于任意的 $w(s) \in L_2$ 且 $w(t) \neq 0$ , 有

$$\|z\|_\infty^2 \leq \gamma^2 \|w(s)\|_2^2,$$

从而 $\|T_{zw}(s)\|_{L_2-L_\infty} < \gamma$ . 证毕.

**定理 3** 对高阶多智能体系统(6)-(7), 给定常数 $\gamma > 0$ 和时滞 $\tau > 0$ . 若存在正定矩阵 $P, Q, R \in \mathbb{R}^{nl \times nl}$ , 以及正数 $\epsilon_i > 0 (i = 1, 2, \dots, 14)$ , 使得 $\Phi < 0$ 及

$$\begin{bmatrix} -P & I_n \otimes C \\ * & -\gamma I_{nl} \end{bmatrix} < 0$$

成立. 则高阶多智能体网络系统是鲁棒稳定的且满足 $\|T_{zw}(s)\|_{L_2-L_\infty} < \gamma$ . 其中:

$$\Phi := \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} & \phi_{15} & 0 & 0 \\ * & \phi_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \phi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \phi_{44} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \phi_{55} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \phi_{66} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \phi_{77} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= \pi_{11} + \epsilon_1 P(E_1 \otimes B_1)(E_1 \otimes B_1)^T P + \\ &\quad \frac{1}{\epsilon_1} (E_2 \otimes I_l)^T (E_2 \otimes I_l) + \epsilon_2 P(E_1 \otimes \\ &\quad B_1)(E_1 \otimes B_1)^T P + \epsilon_3 \tau^2 (I_n \otimes A)^T R(E_1 \otimes \end{aligned}$$

$$B_1)(E_1 \otimes B_1)^T R(I_n \otimes A) + \epsilon_7 P(E_3 \otimes B_2)(E_3 \otimes B_2)^T P + \frac{1}{\epsilon_7} (E_3 \otimes I_l)^T (E_3 \otimes I_l) + \epsilon_8 P(E_3 \otimes B_2)(E_3 \otimes B_2)^T P + \epsilon_9 \tau^2 (I_n \otimes A)^T R(E_3 \otimes B_2)(E_3 \otimes B_2)^T R(I_n \otimes A),$$

$$\begin{aligned} \phi_{12} &= \pi_{12}, \phi_{13} = \pi_{13}, \phi_{14} = \pi_{14}, \phi_{15} = \pi_{15}, \\ \phi_{22} &= \pi_{22} + \frac{1}{\epsilon_2} (E_2 \otimes I_l)^T (E_2 \otimes I_l), \\ \phi_{33} &= \pi_{33} + \frac{1}{\epsilon_8} (E_3 \otimes I_l)^T (E_3 \otimes I_l), \\ \phi_{44} &= \pi_{44} + \frac{1}{\epsilon_3} (E_2 \otimes I_l)^T (E_2 \otimes I_l) + \epsilon_4 \tau^2 (L \otimes B_1) R(E_1 \otimes B_1)(E_1 \otimes B_1)^T R(L \otimes B_1) + \frac{1}{\epsilon_4} (E_2 \otimes I_l)^T (E_2 \otimes I_l) \epsilon_5 \tau^2 (D \otimes B_2)^T \cdot R(E_1 \otimes B_1)(E_1 \otimes B_1)^T R(D \otimes B_2) + \frac{1}{\epsilon_5} (E_2 \otimes I_l)^T (E_2 \otimes I_l) + \epsilon_6 (E_1 \otimes B_1) \cdot (E_1 \otimes B_1)^T + \frac{1}{\epsilon_9} (E_3 \otimes I_l)^T (E_3 \otimes I_l) + \epsilon_{10} \tau^2 (D \otimes B_2)^T R(E_3 \otimes B_2) \cdot (E_3 \otimes B_2)^T R(D \otimes B_2) + \frac{1}{\epsilon_{10}} (E_3 \otimes I_l)^T (E_3 \otimes I_l) + \epsilon_{11} \tau^2 (L \otimes B_1)^T \cdot R(E_3 \otimes B_2)(E_3 \otimes B_2)^T R(L \otimes B_1) + \frac{1}{\epsilon_{11}} (E_3 \otimes I_l)^T (E_3 \otimes I_l) + \epsilon_{12} (E_3 \otimes B_2) \cdot (E_3 \otimes B_2)^T + \epsilon_{13} \tau^2 (E_3 \otimes I_l)^T (E_3 \otimes I_l) + \epsilon_{14} \tau^2 (E_2 \otimes I_l)^T (E_2 \otimes I_l), \\ \phi_{55} &= \pi_{55} + \frac{1}{\epsilon_{13}} (I_n \otimes F)^T R(E_3 \otimes B_2)^T (E_3 \otimes B_2) R(I_n \otimes F) + \frac{1}{\epsilon_{14}} (I_n \otimes F)^T R(E_1 \otimes B_1)(E_1 \otimes B_1)^T R(I_n \otimes F), \\ \phi_{66} &= -\frac{1}{\tau} R^{-1} + \frac{1}{\epsilon_6} (E_2 \otimes I_l)^T (E_2 \otimes I_l), \\ \phi_{77} &= -\frac{1}{\tau} R^{-1} + \frac{1}{\epsilon_{12}} (E_3 \otimes I_l)^T (E_3 \otimes I_l). \end{aligned}$$

证 将定理2中的矩阵II中的所有的L用L + ΔL代替, D用D + ΔD代替, 得到新的矩阵II', 反复使用Schur补引理和引理3可以推得, 若Φ < 0, 则对于所有满足Σ<sup>T</sup>(t)Σ(t) ≤ I和Σ<sub>1</sub><sup>T</sup>(t)Σ<sub>1</sub>(t) ≤ I的不确定项ΔL和ΔD, 都有II' < 0. 由定理2可知定理3成立. 证毕.

注3 矩阵不等式Φ < 0中含有P及R与自身的耦合项, 可以利用Schur补引理将其分开, 这时矩阵的维数还会增加, 在此省略.

### 5 仿真(Simulation)

这部分主要通过仿真来验证前面所得结果的合理性. 图1表示一个具有1个Leader和4个Followers的网络拓扑. 假设该网络每条边的权重为1. Leader的初始速度为0.83. 取性能指标γ = 1, 容易得到g<sub>0</sub> = g<sub>1</sub> = 0.6并且τ = 0.1. 事实上, 设P = Q = R = I, τ = 0.1, 求解定理2中的线性矩阵不等式, 可以得到g<sub>0</sub>, g<sub>1</sub>的值.

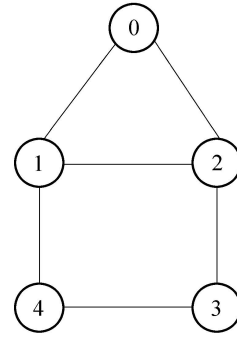


图1 网络拓扑

Fig. 1 The communication topology graph

图2和图3分别表示所有智能体在干扰w(t) = [1 2 3 -1]ω̄(t)下的位置和速度, 其中ω̄(t) = { 5, 0 ≤ t ≤ 1, 0, t < 0, t > 1.

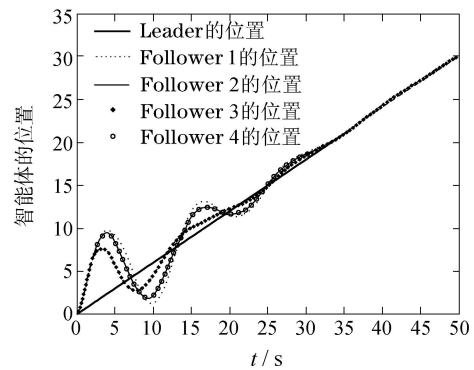


图2 智能体的位置

Fig. 2 The position of agents

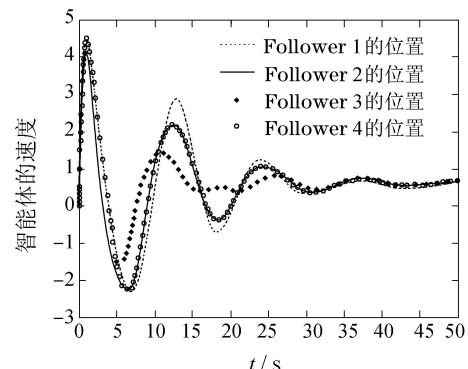


图3 智能体的速度

Fig. 3 The velocity of agents

## 6 结论(Conclusions)

本文研究了带Leader的高阶多智能体系统在存在外部干扰, 建模误差和时滞时的 $L_2-L_\infty$ 一致问题. 首先给出了系统存在建模误差时的数学模型. 然后针对具有信息传输时滞和无时滞两种情况, 通过构造Lyapunov函数的方法, 分析了高阶多智能体系统在满足 $L_2-L_\infty$ 性能指标下的一致问题, 分别得到了该系统达到一致的充分条件. 最后, 通过仿真实验检验了所得结果的有效性. 进一步的工作, 可以研究高阶多智能体系统达到一致的必要条件和充要条件.

## 参考文献(References):

- [1] VICSEK T, CZIROÓK A, BEN-JACOB E, et al. Novel type of phase transition in the system of self-derived particles [J]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(6): 1226 – 1229.
- [2] JADBABAIE A, LIN J, MORSE A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(6): 988 – 1001.
- [3] 洪奕光, 翟超. 多智能体系统动态协调与分布式控制设计 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(10): 1506 – 1512. (HONG Yiguang, ZHAI Chao. Dynamic coordination and distributed control design of multi-agent systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(10): 1506 – 1512.)
- [4] QU Z, WANG J, HULL R. A. Cooperative control of dynamical systems with application to autonomous Vehicles [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(4): 894 – 911.
- [5] 谭拂晓, 关新平, 刘德荣. 非平衡拓扑结构的多智能体网络系统一致性协议 [J]. 控制理论与应用, 2009, 26(10): 1087 – 1092. (TAN Fuxiao, GUAN Xinping, LIU Derong. Consensus protocol in networked multi-agent systems with non-balanced topology [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(10): 1087 – 1092.)
- [6] HU J, HONG Y. Leader-follower coordination of multi agent systems with coupling time delays [J]. *Physica A*, 2007, 374(2): 853 – 863.
- [7] NI W, CHENG D. Leader-following consensus of multi agent systems under fixed and switching topology [J]. *Systems & Control Letters*, 2010, 59(3/4): 209 – 217.
- [8] LIN P, JIA Y. Robust  $H_\infty$  consensus analysis of a class of second-order multi-agent systems with uncertainty [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(3): 487 – 498.
- [9] LIN P, JIA Y, LI L. Distributed robust  $H_\infty$  consensus control in directed networks of agents with time-delay [J]. *Systems & Control Letters*, 2008, 57(8): 643 – 653.
- [10] MO L P, JIA Y M.  $H_\infty$  consensus of a class of high-order multi-agent systems with time-delay [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2011, 5(1): 247 – 253.
- [11] WANG J, CHENG D, HU X. Consensus of multi-agent linear dynamic systems [J]. *Asian Journal of Control*, 2008, 10(2): 144 – 155.
- [12] XIAO F, WANG L. Consensus problems for high-dimensional multi-agent systems [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2007, 1(3): 830 – 837.
- [13] MO L P, JIA Y M, ZHENG Z M, et al. Robust  $H_\infty$  synchronization of uncertain nonlinear complex networks with fixed and switched coupling topology [C] // *Proceedings of the 29th Chinese Control Conference*. Beijing: IEEE, 2010: 4721 – 4727.
- [14] LIN P, ZHAO H M, SUN M. Average consensus of multi-agent systems with multiple time-delays and jointly-connected topologies [C] // *Proceedings of the 29th Chinese Control Conference*. Beijing: IEEE, 2010: 4595 – 4600.
- [15] WANG L, JIANG F C, XIE G M, et al. Controllability of multi-agent systems based on agreement protocols [J]. *Science in China, Series F: Information Sciences*, 2009, 52(11): 2074 – 2088.
- [16] JIANG X L, JIN X Z. Average consensus problems of a class of multi-agent systems against perturbations [C] // *Proceedings of the 2010 Chinese Control and Decision Conference*. Xuzhou, China: IEEE, 2010: 3518 – 3522.
- [17] WEN G, DUAN Z, CHEN G, et al. Second-order consensus for nonlinear multi-agent systems with intermittent measurements [C] // *Proceedings of the 2011 Chinese Control and Decision Conference*. Mi-nyang, China: IEEE, 2011: 3710 – 3714.
- [18] ZHAO Y, DUAN Z, WEN G, et al. Distributed  $H_\infty$  consensus of multi-agent systems: a performance region-based approach [J]. *International Journal of Control*, 2012, 85(3): 332 – 341.
- [19] ZHANG J, XU X, HONG L, et al. Consensus recovery of multi-agent systems subjected to failures [J]. *International Journal of Control*, 2012, 85(3): 280 – 286.
- [20] 李慧, 林鹏, 张春喜. 有Leader的二阶动态多智能体网络的 $L_2-L_\infty$ 控制 [J]. 物理学报, 2009, 58(1): 158 – 164. (LI Hui, LIN Peng, ZHANG Chunxi.  $L_2-L_\infty$  control for leader-following coordination of second-order multi-agent systems [J]. *Acta Physica Sinica* 2009, 58(1): 158 – 164.)
- [21] 梅生伟, 申铁龙, 刘康志. 现代鲁棒控制理论与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2008. (MEI Shengwei, SHEN Tielong, LIU Kangzhi. *Modern Robust Control Theory and Application* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008.)
- [22] SONG Q, CAO J D, YU W W. Second-order leader-following consensus of nonlinear multi-agent systems via pinning control [J]. *Systems & Control Letters*, 2010, 59(9): 553 – 562.
- [23] 贾英民. 鲁棒 $H_\infty$ 控制 [M]. 北京: 科学出版社, 2007. (JIA Yingmin. *Robust  $H_\infty$  Control* [M]. Beijing: Science Press, 2007.)
- [24] HORN R A, JOHNSON C R. *Matrix Analysis* [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1987.
- [25] YU W W, CHEN G R, CAO M. Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems [J]. *Automatica*, 2010, 46(6): 1089 – 1095.

## 作者简介:

莫立坡 (1980–), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为鲁棒控制、多智能体系统的一致性, E-mail: molipo@th.tbtu.edu.cn;

周艳杰 (1972–), 女, 硕士, 副教授, 目前研究方向为系统仿真、数值计算, E-mail: zhouyj@th.tbtu.edu.cn;

周洪波 (1983–), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为多智能体系统仿真、算法理论, E-mail: hongboz@siu.edu.