

# 一种分数阶修正比例导引律

朱竹婷<sup>1</sup>, 廖增<sup>1,2</sup>, 彭程<sup>1</sup>, 王永<sup>1</sup>

(1. 中国科学技术大学自动化系, 安徽合肥 230027; 2. 中国人民解放军63818部队, 四川西昌 615000)

**摘要:** 针对导弹的机动目标追踪问题, 本文提出了一种基于分数阶微积分的修正比例导引律(modified proportional navigation law based on fractional calculus, FO-PPN). 通过选取Lyapunov-like函数, 从理论上证明了FO-PPN制导下的理想导弹能够击中带有变加速度向加速度的机动目标. 仿真结果表明, 修正后的比例导引律在保持原有追踪性能的同时, 还可以有效改善传统比例导引下导弹在命中点处法向过载突变的不足.

**关键词:** 分数阶微积分; 比例导引律; Lyapunov-like方法

**中图分类号:** TJ765.3 **文献标识码:** A

## A fractional-order modified proportional navigation law

ZHU Zhu-ting<sup>1</sup>, LIAO Zeng<sup>1,2</sup>, PENG Cheng<sup>1</sup>, WANG Yong<sup>1</sup>

(1. Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei Anhui 230027, China;

2. People's Liberation Army 63818, Xichang Sichuan 615000, China)

**Abstract:** A modified proportional navigation law based on fractional calculus (FO-PPN) can effectively solve the control problem for the capture of a target with randomly maneuvers... By means of the Lyapunov-like method, we prove that under certain conditions, an ideal missile guided by the FO-PPN law can always hit a target with time-varying normal acceleration. The simulation results show that the FO-PPN not only maintains the tracking performance, but also reduces the sudden change of the normal overload received by the missile receives at the point of impact.

**Key words:** fractional calculus; proportional navigation; Lyapunov-like method

### 1 引言(Introduction)

随着科学技术的飞速发展, 导弹命中精度要求的不断提高, 制导技术的重要性日益凸显. 研究与实践表明, 比例导引律形式简单, 调整方便, 技术上易于实现, 是目前应用最为广泛的导引技术<sup>[1-11]</sup>. 但是, 传统的比例导引律的指令加速度过载较大, 尤其在命中点导弹需用法向过载同时受到导弹速度和攻击方向的影响<sup>[1]</sup>, 常出现法向过载突变的情况. 随着战术指标的不断提高, 众多学者对比例导引律进行了改进和深入研究. 改进的主要思想是在比例导引的基础上对导弹的加速度、航向误差角、目标机动影响等进行补偿.

分数阶微积分是整数阶微积分的延拓<sup>[12-14]</sup>. 分数阶微积分将传统的整数阶微积分的阶次推广到了非整数阶, 其反映的不再是点或者局部的性质, 而是综合考虑了历史和全局分布的信息<sup>[15]</sup>. 本文利用分数阶微积分理论的这一性质, 对传统的基于整数阶微积分理论的比例导引律进行了改进, 得到了基于分数阶微积分的修正比例导引律(modified proportional navigation law based on fractional calcu-

lus, FO-PPN). 本文以导弹-目标的非线性运动方程为模型, 通过选取Lyapunov-like函数, 从理论上证明了对时变机动目标, FO-PPN制导律可以保证理想导弹准确命中目标. 仿真结果表明, FO-PPN可以明显改善PPN制导下命中点导弹法向过载突变的不足, 同时在追踪性能上依然保持PPN的原有优势.

### 2 问题描述(Problem description)

导弹的三维制导问题可以通过忽略耦合将目标角速度分解到两个垂直平面中解决. 本文考虑俯仰平面内的导弹导引律设计问题. 俯仰平面内的机动目标追踪问题如图1描述. 以导弹质心为原点, 初始目标线为参考方向建立相对极坐标系, 则导弹-目标的运动方程可以表示为

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_t = A_t/V_t, \\ \dot{\sigma}_m = A_m/V_m, \\ \dot{r} = V_t \cos(\sigma_t - \lambda) - V_m \cos(\sigma_m - \lambda), \\ r\dot{\lambda} = V_t \sin(\sigma_t - \lambda) - V_m \sin(\sigma_m - \lambda), \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $r$ 为导弹与目标的相对距离,  $A_t$ 表示机动目标的法向加速度,  $V_t$ 表示机动目标的速度.  $A_m$ 表示导

弹法向加速度,  $V_m$ 表示导弹的速度. 机动目标和导弹速率大小保持恒定.  $\lambda$ 表示视线角.  $\sigma_t$ 和 $\sigma_m$ 分别表示目标与导弹的航迹角.  $\eta_t$ 和 $\eta_m$ 为目标速度和导弹速度与视线方向的夹角, 满足几何关系 $\eta_t = \sigma_t - \lambda$ ,  $\eta_m = \sigma_m - \lambda$ .

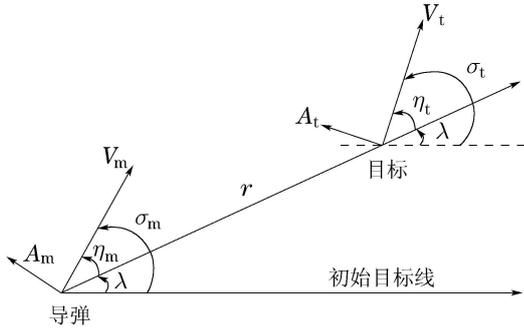


图1 导弹-目标平面运动图

Fig. 1 Missile-target engagement in a plane.

类似于文献[16], 这里假设:

- A1) 导弹和目标在俯仰通道中的运动视为质点运动;
- A2) 导弹的制导系统的工作是理想的;
- A3) 导弹速度 $V_m$ 和目标速度大小 $V_t$ 保持恒定不变;
- A4) 导弹具有速度优势, 即目标与导弹速度比 $\rho = V_t/V_m$ 满足 $0 < \rho < 1$ .
- A5) 目标加速度是关于时间的分段连续有界函数, 函数上界为 $\alpha$ , 即

$$|A_t(t)| \leq \alpha, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

A6) 导弹初始航向误差足够小, 即

$$\begin{cases} |\rho \sin(\eta_t(0)) - \sin(\eta_m(0))| < \beta, \quad \beta \in (0, 1 - \rho), \\ |\eta_m(0)| < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (3)$$

A7) 制导常数不可选择过小. 具体为

$$N > 1 + \rho + \{\alpha r(0) / \beta |V_m|^2\} / \sqrt{1 - (\rho + \beta)^2}. \quad (4)$$

### 3 分数阶微积分(Fractional calculus)

分数阶微分算子定义如下:

$${}_a D_t^p = \begin{cases} \frac{d^p}{dt^p}, & \text{Re}(p) > 0, \\ 1, & \text{Re}(p) = 0, \\ \int_0^t (d\tau)^{-p}, & \text{Re}(p) < 0, \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $p$ 表示分数阶微积分的阶次,  $\text{Re}(p)$ 表示 $p$ 的实部,  $a$ 表示初始时刻.  ${}_a D_t^p$ 算子将分数阶微分运算和积分运算统一起来.

**定义 1** Caputo分数阶微积分定义<sup>[12]</sup>: 函数 $f(t)$ 在定义域上 $n$ 阶可导,  $n - 1 \leq p < n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , 则有

$${}_a D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - p)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{p+1-n}} d\tau, \quad (6)$$

式中:  $\Gamma(\cdot)$ 为Gamma函数,  $a$ 为初始时刻, 实际问题中一般初始时刻为0, 简记为 $D^p f(t)$ .

**定义 2** Grünwald-Letnikov分数阶微积分定义<sup>[12]</sup>

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \sum_{j=0}^{[(t-a)/h]} \omega_j^{(p)} f(t - jh), \quad (7)$$

式中:

$$\omega_j^{(p)} = \frac{(-1)^j \Gamma(p + 1)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(p - j + 1)},$$

$[x]$ 表示不大于 $x$ 的最大整数.  $\omega_j^{(p)}$ 的计算可以通过递推进行实现, 即

$$\omega_0^{(p)} = 1, \quad \omega_j^{(p)} = [1 - \frac{1}{j}(\alpha + 1)] \omega_{j-1}^{(p)}, \quad j \in \mathbb{N},$$

上述两个定义在数学意义上完全等价. 但是定义1涉及高阶求导和积分运算, 通常用于理论分析中. 定义2采用极限求和来定义分数阶微积分, 如果选择合适的计算步长即可很容易地计算出函数的分数阶微积分.

### 4 分数阶修正比例导引律(Fractional order modified proportional navigation law)

传统的PPN由下式给出:

$$A_m = NV_M \dot{\lambda}, \quad (8)$$

其中:  $N$ 为制导系数, 视线角速率 $\dot{\lambda}$ 由追踪目标的探测器在线测量.

本文基于分数阶微积分理论对传统的PPN进行修正, 修正后的导引律(FO-PPN)如下:

$$A_m = \begin{cases} NV_M \dot{\lambda} + p \frac{(D^p \lambda)^2}{\dot{\lambda}} V_m, & \dot{\lambda} \neq 0, \\ 0, & \dot{\lambda} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

其中分数阶微分阶次的取值范围为 $0 \leq p \leq 1$ . 由上式可知, 当分数阶微分阶次取0或1, FO-PPN则退化为导引常数分别为 $N$ 或 $N + 1$ 时的传统PPN, 因此传统的PPN是FO-PPN的特殊情况.

为了证明FO-PPN能够确保理想导弹击中机动目标, 保持PPN的追踪性能, 首先给出如下的引理和定理1.

**引理 1**<sup>[17]</sup> 若A1)–A4)条件满足, 且

$$|\rho \sin(\eta_t(t)) - \sin(\eta_m(t))| < \beta, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (10)$$

$$|\eta_m(t_0)| < \frac{\pi}{2}, \quad (11)$$

其中:  $t_0, t_1 \in [0, \infty)$ ,  $\beta \in (0, 1 - \rho)$ . 则当 $t_0 \leq t \leq t_1$ 时有

$$|\eta_m(t)| < \arcsin(\rho + \beta), \quad (12)$$

$$\cos(\eta_m(t)) > \sqrt{1 - (\rho + \beta)^2}, \quad (13)$$

$$\dot{r}(t) < -V_m \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2}. \quad (14)$$

**定理 1** 设A1)–A7)条件均满足. 如果对于某一常数  $t_2 \in (0, \infty)$ , 有

$$|\eta_m(t)| \leq \arcsin(\rho + \beta), \quad 0 \leq t \leq t_2, \quad (15)$$

则FO–PPN仍可以保证

$$\dot{r}(t) < -V_m \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2}, \quad 0 \leq t \leq t_2. \quad (16)$$

**证** 设上述结论不成立, 则存在  $t_3 \in (0, t_2]$ , 当  $0 \leq t < t_3$  时, 有

$$\dot{r}(t) < -V_m \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2}, \quad (17)$$

$$\dot{r}(t_3) = -V_m \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2}. \quad (18)$$

由引理1,

$$\dot{r}(0) < -V_m \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2},$$

故

$$r(t) \leq r(0), \quad 0 \leq t \leq t_3. \quad (19)$$

本文选择如下Lyapunov-like函数:

$$V(t) = \frac{1}{2} |r(t)\dot{\lambda}(t)|^2. \quad (20)$$

由式(1)可得

$$r\ddot{\lambda} = -2\dot{r}\dot{\lambda} + A_t \cos \eta_t - A_m \cos \eta_m. \quad (21)$$

对  $V$  计算关于  $t$  的微分, 则有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= r\dot{\lambda}(-\dot{r}\dot{\lambda} + A_t \cos \eta_t - A_m \cos \eta_m) \\ &= r\dot{\lambda}\{A_t \cos \eta_t - (A_m - V_m\dot{\lambda}) \cos \eta_m\} - \rho r|\dot{\lambda}|^2 V_m \cos \eta_t = \\ &= r\dot{\lambda}\{A_t \cos \eta_t - [NV_m\dot{\lambda} + p\frac{(D^p\lambda)^2}{\dot{\lambda}} - V_m\dot{\lambda}] \cos \eta_m\} - \rho r\dot{\lambda}^2 V_m \cos \eta_t = \\ &= r\dot{\lambda}A_t \cos \eta_t + r\dot{\lambda}^2 V_m[-\rho \cos \eta_t + (1-N) \cos \eta_m] - rp(D^p\lambda)^2 \cos \eta_m. \end{aligned}$$

由引理1可得

$$\cos \eta_m \geq \sqrt{1 - (\rho + \beta)^2} > 0, \quad 0 \leq t \leq t_3. \quad (22)$$

由A7)可得

$$1 - N < -[\rho + \frac{\alpha r(0)}{\beta V_m}] \sqrt{1 - (\rho + \beta)^2} < 0. \quad (23)$$

当  $0 \leq t \leq t_3$  时, 则有

$$\begin{aligned} \dot{V} &< r\dot{\lambda}A_t \cos \eta_t - \rho r\dot{\lambda}^2 V_m \cos \eta_t - \\ &= r\dot{\lambda}^2 V_m [\rho + \frac{\alpha r(0)}{\beta V_m}] < \\ &= r\dot{\lambda}\alpha + r\dot{\lambda}^2 V_m(-\rho \cos \eta_t - \rho) - r\dot{\lambda}^2 \frac{\alpha r(0)}{\beta V_m} \leq \\ &= r\dot{\lambda}\alpha - \dot{\lambda}^2 \frac{\alpha r(0)r}{\beta V_m} < r\dot{\lambda}\alpha - \frac{\alpha r^2 \dot{\lambda}^2}{\beta V_m} = \end{aligned}$$

$$\alpha\sqrt{2V} - \frac{2\alpha}{\beta V_m} V.$$

上式即为

$$\sqrt{V}(t) < \frac{\beta V_m}{\sqrt{2}} + [\sqrt{V}(0) - \frac{\beta V_m}{\sqrt{2}}] \exp[\frac{-\alpha t}{\beta V_m}]. \quad (24)$$

由式(1)和A6)可知  $\sqrt{V}(0) < \frac{\beta V_m}{\sqrt{2}}$ , 因此  $\sqrt{V}(t) < \frac{\beta V_m}{\sqrt{2}}$ , 即当  $0 \leq t \leq t_3$  时, 有

$$|\rho \sin(\eta_t(t)) - \sin(\eta_m(t))| < \beta. \quad (25)$$

由引理1, 当  $0 \leq t \leq t_3$  时, 有

$$\dot{r}(t) < -V_m \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2}, \quad (26)$$

显然

$$\dot{r}(t_3) < -V_m \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2},$$

与式(18)矛盾. 因此原命题式成立. 证毕.

事实上, 在A1)–A7)条件下, 式(15)可以成立, 详见定理2.

**定理 2** 设A1)–A7)条件满足, 则有

$$|\eta_m(t)| < \arcsin(\rho + \beta), \quad t \geq 0, \quad (27)$$

且存在一个有限的时间  $t_f$  使得  $r(t_f) = 0$ , 其中

$$t_f < \frac{r(0)}{V_m} \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2}. \quad (28)$$

**证** 由引理1可得

$$|\eta_m(0)| < \arcsin(\rho + \beta). \quad (29)$$

设式(27)不成立, 则必然存在一个  $t_3 \in (0, \infty)$ , 有

$$|\eta_m(t)| < \arcsin(\rho + \beta), \quad 0 \leq t < t_3, \quad (30)$$

$$|\eta_m(t_3)| = \arcsin(\rho + \beta). \quad (31)$$

由定理1及其证明过程可得到

$$\dot{r}(t) < -V_m \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2}, \quad 0 \leq t \leq t_3, \quad (32)$$

$$|\rho \sin(\eta_t(t)) - \sin(\eta_m(t))| < \beta, \quad 0 \leq t \leq t_3. \quad (33)$$

由引理1, 式(33)即为

$$|\eta_m(t)| < \arcsin(\rho + \beta), \quad 0 \leq t \leq t_3. \quad (34)$$

显然式(34)与式(31)矛盾, 因此式(27)成立. 由定理1可知, 对  $\forall t_0 \in [0, \infty)$ , 有

$$\dot{r}(t) < -V_m \sqrt{(1-\rho)^2 - \beta^2}, \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (35)$$

因此存在一个有限的时间  $t_f$  使得  $r(t_f) = 0$ , 其中  $t_f$  满足式(28). 证毕.

由定理2容易发现, 当制导常数选择合适且初始航向误差足够小的时候, FO–PPN制导下的理想导弹必然可以在有限时间内命中目标.

### 5 仿真分析(Simulation analysis)

本文采用MATLAB构建试验仿真系统, 导弹目标运动方程如前文所示. 考虑到制导常数常在[2, 6]内取值, 同时当分数阶微分阶次在[0, 1]范围内取值时, FO-PPN在两个端点处的情况可以归一到制导常数相差为1的PPN导引律, 因此本文将FO-PPN与制导常数为  $N = 3$  和  $N = 4$  时PPN进行仿真对比分析. 导弹目标的各项参数取值如表1所示. 目标机动时法向加速度为  $A_t = 10 \cos t$ . 微分阶次  $p$  通过如下代价函数确定

$$J = \int_0^{t_f} (A_m^2 + W_t) dt,$$

其中权重  $W_t = 10^6$ . 本文采用遍历寻优, 计算步长0.1, 得到最优  $p = 0.8$ . 上述3种制导律的打击时间如表2所示. 导弹目标的相对距离变化情况如图2所示. 制导过程中导弹加速度的变化情况如图3所示.

表1 仿真数据

Table 1 Simulation data	
导弹目标参数	设定值
$r(0)$	20000 m
$\lambda(0)$	$0^\circ$
$\sigma_t(0)$	$85^\circ$
$\sigma_m(0)$	$85^\circ$
$V_t$	800 m/s <sup>2</sup>
$V_m$	1000 m/s <sup>2</sup>
$\alpha$	10 m/s <sup>2</sup>
$\beta$	0.25

表2 FO-PPN/PPN制导下的打击时间

Table 2 The missile interception time under FO-PPN/PPN laws

导引律	FO-PPN( $p = 0.8$ )	PPN( $N = 3$ )	PPN( $N = 4$ )
打击时间/s	40.27	42.17	40.84

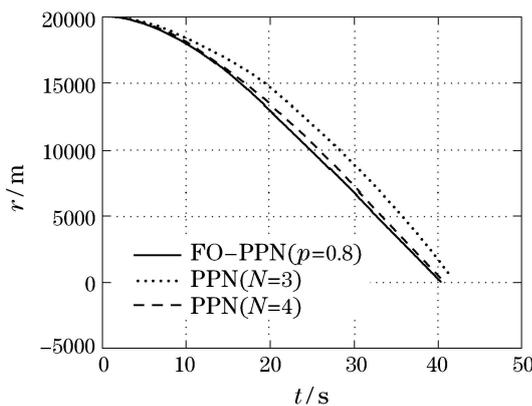


图2 FO-PPN/PPN制导下弹目相对距离

Fig. 2 The relative distance between missile and target under FO-PPN/PPN laws

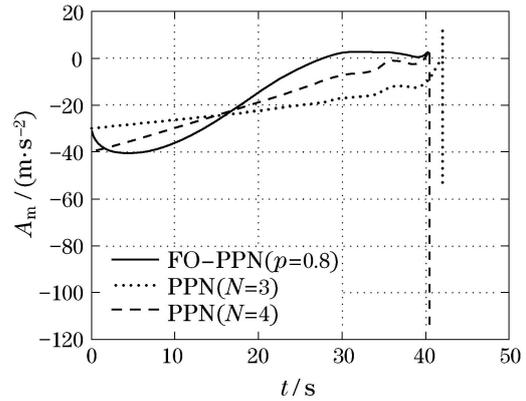


图3 FO-PPN/PPN制导下的法向导引加速度

Fig. 3 The normal acceleration of missile under FO-PPN/PPN laws

显然FO-PPN可以使导弹有效击中目标, 同时修正比例导引律命中机动目标所需的时间比传统的比例导引律更短, 说明其很好的保持着传统比例导引律在追踪性能方面的优势.

由图2所示, FO-PPN制导下的导弹加速度在飞行前15 s左右控制量略大于PPN制导下的两种情况; 而飞行的后25 s控制量明显小于PPN制导下的两种情况. 尤其值得注意的地方, 在导弹即将命中目标的时刻, 不论  $N$  取何值, PPN制导下导弹所需的法向载荷都会突然明显增大, 而这在实际情况下往往无法达到. 使用分数阶微积分进行修正后, FO-PPN很好的解决了这一问题. 由图中可以看出, FO-PPN制导下的导弹法向加速度在飞行的后半程几乎稳定在0的附近, 在命中点同样也没有突变.

### 6 结论(Conclusion)

本文针对带有时变法向加速度的机动目标打击问题, 提出了一种基于分数阶微积分的修正比例导引律(FO-PPN). 使用Lyapunov-like方法证明了在FO-PPN导引下的导弹在满足一定限制条件下, 总可以在有限时间内命中目标. 仿真实例表明, FO-PPN不仅打击时间更短, 而且可以有效解决传统PPN导引下在命中点处导弹法向加速度大幅突变的不足.

### 参考文献(References):

- [1] 李新国, 方群. 有翼导弹飞行动力学 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2005.  
(LI Xinguo, FANG Qun. *The Flight Dynamics of Winged Missile* [M]. Xi'an: Northwestern University Press, 2005.)
- [2] MURTAUGH S A, CRIEL H E. Fundamentals of proportional navigation [J]. *IEEE Spectrum*, 1966, 3(12): 75 - 85.
- [3] YUAN P J, CHERN J S. Solutions of true proportional navigation for maneuvering and non-maneuvering targets [J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1992, 15(1): 268 - 271.
- [4] YUAN P J, HSU S C. Solutions of generalized proportional navigation for maneuvering and non-maneuvering targets [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1995, 31(1): 496 - 474.