

## 具有有限连续丢包网络控制系统的最优线性估值器

陈海霞<sup>1</sup>, 孙书利<sup>2</sup>

(1. 黑龙江大学 数学科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080; 2. 黑龙江大学 电子工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

**摘要:** 本文研究了观测数据和控制输入数据传输具有有限连续丢包的线性离散随机系统的最优估计问题. 利用两个满足Bernoulli分布的随机变量来分别描述从传感器到估值器和从控制器到执行器之间的数据丢包现象. 通过引入两组新的变量, 将原系统转化为一个带有随机参数的系统. 利用射影理论, 提出了线性最小方差最优线性估值器, 包括滤波器、预报器和平滑器. 最后研究了稳态线性估值器, 并给出了稳态存在的一个充分条件. 仿真例子验证了算法的有效性.

**关键词:** 有限连续丢包; 最优线性估值器; 射影理论; 稳态估值器; 网络控制系统

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Optimal linear estimators for networked control systems with finite consecutive packet dropouts

CHEN Hai-xia<sup>1</sup>, SUN Shu-li<sup>2</sup>

(1. School of Mathematics Science, Heilongjiang University, Harbin Heilongjiang 150080, China;

2. School of Electrical Engineering, Heilongjiang University, Harbin Heilongjiang 150080, China)

**Abstract:** This paper studies the optimal estimation problem for discrete-time stochastic linear systems with finite consecutive packet dropouts in the data transmission of measurements and control inputs. Two Bernoulli distributed random variables are employed to describe the phenomena of data losses from the sensor to the estimator and from the controller to the actuator, respectively. By introducing two groups of new variables, we convert the original system to one with the random parameters. Using the projection theory, we present the optimal linear estimators including the filter, the predictor and the smoother in the linear minimum variance sense. Finally, the steady-state linear estimators are studied and a sufficient condition for the existence of steady state is given. An example shows the effectiveness of the algorithms.

**Key words:** finite consecutive packet dropout; optimal linear estimator; projection theory; steady-state estimator; networked control system

### 1 引言(Introduction)

近几年, 网络控制系统受到了广泛的关注<sup>[1-3]</sup>. 在网络控制系统中, 由于传输通道的不可靠性, 以及元器件的老化等原因, 通过网络从传感器到估值器和从控制器到执行器的数据传输中, 可能会存在数据包的丢失和滞后, 从而导致系统不稳定或性能下降.

目前, 具有随机丢包和滞后的系统得到了广泛研究<sup>[4-14]</sup>. 文献[4-5]研究了带有数据包丢失和滞后的网络系统的估计问题, 其中数据包带有时间戳, 即滤波器每时刻知道数据包是否丢失或滞后. 文献[6]研究了具有重发机制网络系统的滤波器设计, 但数据重发可能带来网络拥塞. 而文献[7-8]研究了丢包和时滞系统的鲁棒估计问题. 文献[9]基于一个统一的参数模型对具有丢包和时滞的网络系统,

利用线性矩阵不等式设计了一个稳态次优滤波器. 文献[10-11]研究了从传感器到估值器单边具有无限连续丢包的线性离散系统的最优线性估计问题. 而文献[12]将文献[10]的结果推广到双边丢包. 然而, 在实际中连续丢包往往是有限的. 文献[13]对具有有限连续丢包系统, 利用配方法设计了一个具有Kalman递推结构的滤波器, 但所设计的滤波器是次优的. 对于同一问题, 文献[14]通过射影理论设计了最优线性估值器. 然而, 文献[13-14]仅仅考虑了单边丢包情况, 即只考虑了从传感器到估值器的数据丢包, 而没有考虑从控制器到执行器的数据丢失, 而对于双边丢包系统的滤波器设计不能由单边丢包的结果通过简单推广获得.

本文研究具有双边丢包网络控制系统的估计问题, 其中从传感器到估值器和从控制器到执行器存

在有限连续数据丢失. 应用射影理论, 推导了线性最小方差最优线性估值器. 并分析了稳态滤波的存在性. 由于传感器观测和控制输入通过网络传输给估值器和执行器, 且具有随机丢包, 使得估值器和执行器接收到的观测和控制数据是随机的. 这导致了所设计的滤波器的滤波增益和协方差阵都受到控制输入的影响. 这不同于带有确定性控制输入无丢包系统的标准的滤波器设计<sup>[15]</sup>, 可以由不带控制输入系统的滤波器通过简单增加确定项而获得. 而且标准滤波器的滤波增益和协方差阵不受确定性控制输入的影响.

### 2 问题阐述(Problem formulation)

考虑具有有限连续丢包的离散时不变随机系统:

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma \omega(t) + B u(t), \quad (1)$$

$$z(t) = H x(t) + v(t), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \underline{u}(t) = & r_1(t)u(t) + (1-r_1(t))r_1(t-1)u(t-1) + \\ & \dots + (1-r_1(t))(1-r_1(t-1))\dots \\ & (1-r_1(t-d_1+1))u(t-d_1), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} y(t) = & r_2(t)z(t) + (1-r_2(t))r_2(t-1)z(t-1) + \\ & \dots + (1-r_2(t))(1-r_2(t-1))\dots \\ & (1-r_2(t-d_2+1))z(t-d_2), \end{aligned} \quad (4)$$

其中:  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  是状态,  $z(t) \in \mathbb{R}^m$  是传感器的输出, 将通过网络传输给估值器;  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  是估值器接收到的输出,  $\omega(t) \in \mathbb{R}^r$  是输入噪声,  $v(t) \in \mathbb{R}^m$  是传感器的观测噪声,  $u(t) \in \mathbb{R}^h$  是已知的控制输入, 将通过网络传输给执行器,  $\underline{u}(t) \in \mathbb{R}^h$  是执行器接收到的输入.  $\Phi, \Gamma, B$  和  $H$  是适当维数的常矩阵,  $r_i(t), i = 1, 2$  是服从 Bernoulli 分布的随机变量, 满足概率:  $P\{r_i(t) = 1\} = \alpha_i, 0 \leq \alpha_i \leq 1, P\{r_i(t) = 0\} = 1 - \alpha_i$  且不相关于其他的随机变量.  $d_1$  和  $d_2$  表示连续丢包的最大次数.

模型(3)和(4)分别描述了控制输入和观测发生有限连续丢包的情况, 且连续丢包的次数不超过  $d_1$  和  $d_2$ . 将单边丢包<sup>[13-14]</sup>推广到双边丢包. 本文中的  $0$  和  $I$  表示适当维数的矩阵,  $T$  是转置号,  $E$  为数学期望,  $\delta_{tk}$  为 Kronecker delta 函数.

引入新的变量:

$$\begin{cases} U_{k_1}(t) = r_1(t)u(t) + (1-r_1(t))U_{k_1+1}(t-1), \\ U_{d_1}(t) = u(t), \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} Y_{k_2}(t) = r_2(t)z(t) + (1-r_2(t))Y_{k_2+1}(t-1), \\ Y_{d_2}(t) = z(t), \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $k_1 = 1, 2, \dots, d_1 - 1; k_2 = 1, 2, \dots, d_2 - 1$ . 把

式(2)代入式(6)中, 并注意

$$\begin{aligned} \underline{u}(t) &= r_1(t)u(t) + (1-r_1(t))U_1(t-1), \\ y(t) &= r_2(t)z(t) + (1-r_2(t))Y_1(t-1). \end{aligned}$$

定义

$$\begin{cases} X(t+1) = [x^T(t+1) \ U_1^T(t) \ \dots \ U_{d_1}^T(t) \\ \quad Y_1^T(t) \ \dots \ Y_{d_2}^T(t)]^T, \\ W(t) = [\omega^T(t) \ v^T(t)]^T. \end{cases} \quad (7)$$

系统(1)-(4)等价于增广系统

$$X(t+1) = \tilde{\Phi}(t)X(t) + \tilde{\Gamma}(t)W(t) + \tilde{B}(t)u(t), \quad (8)$$

$$y(t) = \tilde{H}(t)X(t) + r_2(t)v(t), \quad (9)$$

其中:

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}(t) = \Phi_0 + (1-r_1(t))\Phi_1 + r_2(t)\Phi_2 + \\ \quad (1-r_2(t))\Phi_3, \\ \tilde{\Gamma}(t) = \Gamma_0 + r_2(t)\Gamma_1, \ \tilde{B}(t) = B_0 + r_1(t)B_1, \\ \tilde{H}(t) = r_2(t)H_0 + (1-r_2(t))H_1, \end{cases} \quad (10)$$

且

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} \Phi & 0_{n \times (hd_1+md_2)} \\ 0_{(hd_1+(d_2-1)m) \times n} & 0_{(hd_1+(d_2-1)m) \times (hd_1+md_2)} \\ H & 0_{m \times (hd_1+md_2)} \end{bmatrix},$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & B \\ 0_{(d_1-1)h \times n} & 0_{(d_1-1)h \times h} \\ 0_{(md_2+h) \times n} & 0_{(md_2+h) \times h} \\ 0_{n \times (d_1-1)h} & 0_{n \times md_2} \\ I_{(d_1-1)h} & 0_{(d_1-1)h \times md_2} \\ 0_{(md_2+h) \times (d_1-1)h} & 0_{(md_2+h) \times md_2} \end{bmatrix},$$

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} 0_{(n+hd_1) \times n} & 0_{(n+hd_1) \times (hd_1+md_2)} \\ \tilde{H} & 0_{(d_2-1)m \times (hd_1+md_2)} \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times (hd_1+md_2)} \end{bmatrix},$$

$$\Phi_3 = \begin{bmatrix} 0_{(n+hd_1) \times (n+hd_1+m)} & 0_{(n+hd_1) \times (d_2-1)m} \\ 0_{(d_2-1)m \times (n+hd_1+m)} & I_{(d_2-1)m} \\ 0_{m \times (n+hd_1+m)} & 0_{m \times (d_2-1)m} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} \Gamma & 0_{n \times m} \\ 0_{(d_1h+(d_2-1)m) \times r} & 0_{(d_1h+(d_2-1)m) \times m} \\ 0_{m \times r} & I_m \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0_{(n+d_1h) \times r} & 0_{(n+d_1h) \times m} \\ 0_{(d_2-1)m \times r} & \hat{I}_2 \\ 0_{m \times r} & 0_{m \times m} \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0_{(n+(d_1-1)h) \times h} \\ I_h \\ 0_{md_2 \times h} \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} B \\ \hat{I}_1 \\ 0_{(md_2+h) \times h} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} H \\ H \\ \vdots \\ H \end{bmatrix}_{(d_2-1)m \times n}, \hat{I}_1 = \begin{bmatrix} I_h \\ I_h \\ \vdots \\ I_h \end{bmatrix}_{(d_1-1)h \times h},$$

$$\hat{I}_2 = \begin{bmatrix} I_m \\ I_m \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix}_{(d_2-1)m \times m}, H_0 = [H \quad 0_{m \times (hd_1+md_2)}],$$

$$H_1 = [0_{m \times (n+hd_1)} \quad I_m \quad 0_{m \times (d_2-1)m}].$$

**假设 1**  $\omega(t)$ 和 $v(t)$ 是相关的零均值白噪声, 方差阵分别为 $Q_\omega$ 和 $Q_v$ , 相关阵为 $S_{\omega v}$ , 且有

$$S = E[W(t)v^T(k)] = E\left\{\begin{bmatrix} \omega(t) \\ v(t) \end{bmatrix} v^T(k)\right\} = \begin{bmatrix} S_{\omega v} \\ Q_v \end{bmatrix} \delta_{tk}, \quad (11)$$

$$Q_W = E[W(t)W^T(k)] = E\left\{\begin{bmatrix} \omega(t) \\ v(t) \end{bmatrix} [\omega^T(k) \quad v^T(k)]\right\} = \begin{bmatrix} Q_\omega & S_{\omega v} \\ S_{\omega v}^T & Q_v \end{bmatrix} \delta_{tk}. \quad (12)$$

**假设 2** 初始状态 $x(0)$ 与白噪声 $\omega(t), v(t)$ 以及 $r_i(t)(i = 1, 2)$ 是不相关的, 且满足:

$$\begin{cases} E[x(0)] = \mu_0, \\ E\{[x(0) - \mu_0][x(0) - \mu_0]^T\} = P_0. \end{cases} \quad (13)$$

本文的目的是在假设1-2下, 基于观测 $(y(t+N), y(t+N-1), \dots, y(0))$ 求线性最小方差最优线性估值器 $\hat{x}(t|t+N)$ . 当 $N = 0$ 时为滤波器, 当 $N < 0$ 时为预报器, 当 $N > 0$ 时为平滑器.

### 3 最优线性估值器(Optimal linear estimators)

#### 3.1 预备引理(Preliminary lemmas)

在给出系统(8)-(9)的最优线性估值器之前, 首先介绍两个预备引理.

**引理 1** 本文有如下关系:

$$\begin{cases} E[r_i(t)] = \alpha_i, \text{cov}[r_i(t)] = \alpha_i(1 - \alpha_i), \\ E[r_i^2(t)] = \alpha_i, E[(1 - r_i(t))^2] = 1 - \alpha_i, \\ E[r_i(t)(1 - r_i(t))] = 0, \\ E[r_i(t)(1 - r_j(t))] = \alpha_i(1 - \alpha_j), \end{cases} \quad (14)$$

其中:  $i \neq j; i, j = 1, 2$ .

$$\begin{cases} \bar{\Phi} = E[\tilde{\Phi}(t)] = \Phi_0 + (1 - \alpha_1)\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2 + (1 - \alpha_2)\Phi_3, \\ \bar{\Gamma} = E[\tilde{\Gamma}(t)] = \Gamma_0 + \alpha_2\Gamma_1, \\ \bar{B} = E[\tilde{B}(t)] = B_0 + \alpha_1B_1, \\ \bar{H} = E[\tilde{H}(t)] = \alpha_2H_0 + (1 - \alpha_2)H_1, \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}(t) - \bar{\Phi} = (r_2(t) - \alpha_2)\hat{\Phi} - (r_1(t) - \alpha_1)\Phi_1, \\ \tilde{\Gamma}(t) - \bar{\Gamma} = (r_2(t) - \alpha_2)\Gamma_1, \\ \tilde{B}(t) - \bar{B} = (r_1(t) - \alpha_1)B_1, \\ \tilde{H}(t) - \bar{H} = (r_2(t) - \alpha_2)\hat{H}, \end{cases} \quad (16)$$

其中:  $\hat{\Phi} = \Phi_2 - \Phi_3, \hat{H} = H_0 - H_1$ .

**证** 首先, 由 $r_i(t)$ 的分布可得式(14). 再由式(10)直接取数学期望可得式(15). 最后由式(10)减去式(15)可得式(16).

根据引理1可得如下信息:

$$Q = E[\tilde{\Gamma}(t)W(t)W^T(t)\tilde{\Gamma}^T(t)] = \Gamma_0Q_W\Gamma_0^T + \alpha_2\Gamma_0Q_W\Gamma_1^T + \alpha_2\Gamma_1Q_W\Gamma_0^T + \alpha_2\Gamma_1Q_W\Gamma_1^T, \quad (17)$$

$$\bar{S} = E[\tilde{\Gamma}(t)W(t)v^T(t)r_2(t)] = \alpha_2(\Gamma_0 + \Gamma_1)S. \quad (18)$$

**引理 2** 系统(8)有状态均值 $\bar{X}(t) = E[X(t)]$ 和协方差阵 $q(t) = E[X(t)X^T(t)]$ 的计算公式:

$$\bar{X}(t+1) = \bar{\Phi}\bar{X}(t) + \bar{B}u(t), \quad (19)$$

$$q(t+1) = \alpha_2(1 - \alpha_2)\hat{\Phi}q(t)\hat{\Phi}^T + \bar{\Phi}q(t)\bar{\Phi}^T + \alpha_1(1 - \alpha_1)\Phi_1q(t)\Phi_1^T + G(t), \quad (20)$$

其中:

$$G(t) = \alpha_1(1 - \alpha_1)B_1u(t)u^T(t)B_1^T + \bar{B}u(t)u^T(t)\bar{B}^T - \alpha_1(1 - \alpha_1)B_1u(t)\bar{X}^T(t)\Phi_1^T - \alpha_1(1 - \alpha_1)\Phi_1\bar{X}(t)u^T(t)B_1^T + Q + \bar{\Phi}\bar{X}(t)u^T(t)\bar{B}^T + \bar{B}u(t)\bar{X}^T(t)\bar{\Phi}^T. \quad (21)$$

$$\text{初值为 } q(0) = \begin{bmatrix} P_0 + \mu_0\mu_0^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**证** 对式(8)两边取数学期望易得式(19). 由式(8)有

$$q(t+1) = E[X(t+1)X^T(t+1)] = E\{[\tilde{\Phi}(t)X(t) + \tilde{\Gamma}(t)W(t) + \tilde{B}(t)u(t)] \times [\tilde{\Phi}(t)X(t) + \tilde{\Gamma}(t)W(t) + \tilde{B}(t)u(t)]^T\} = E[\tilde{\Phi}(t)X(t)X^T(t)\tilde{\Phi}^T(t)] + E[\tilde{B}(t)u(t)u^T(t)\tilde{B}^T(t)] + Q + E[\tilde{\Phi}(t)X(t)u^T(t)\tilde{B}^T(t)] + E[\tilde{B}(t)u(t)X^T(t)\tilde{\Phi}^T(t)], \quad (22)$$

其中:

$$\begin{aligned} E[\tilde{\Phi}(t)X(t)X^T(t)\tilde{\Phi}^T(t)] &= E\{[(r_2(t) - \alpha_2)\hat{\Phi} - (r_1(t) - \alpha_1)\Phi_1 + \bar{\Phi}] \times X(t)X^T(t)[(r_2(t) - \alpha_2)\hat{\Phi} - (r_1(t) - \alpha_1)\Phi_1 + \bar{\Phi}]^T\} = \alpha_2(1 - \alpha_2)\hat{\Phi}q(t)\hat{\Phi}^T + \alpha_1(1 - \alpha_1)\Phi_1q(t)\Phi_1^T + \bar{\Phi}q(t)\bar{\Phi}^T, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
 & E[\tilde{B}(t)u(t)u^T(t)\tilde{B}^T(t)] = \\
 & E\{[(r_1(t) - \alpha_1)B_1 + \bar{B}]u(t) \times \\
 & u^T(t)[(r_1(t) - \alpha_1)B_1 + \bar{B}]^T\} = \\
 & \alpha_1(1 - \alpha_1)B_1u(t)u^T(t)B_1^T + \bar{B}u(t)u^T(t)\bar{B}^T, \\
 & E[\tilde{\Phi}(t)X(t)u^T(t)\tilde{B}^T(t)] = \\
 & E\{[(r_2(t) - \alpha_2)\hat{\Phi} - (r_1(t) - \alpha_1)\Phi_1 + \bar{\Phi}] \times \\
 & X(t)u^T(t)[(r_1(t) - \alpha_1)B_1 + \bar{B}]^T\} = \\
 & -\alpha_1(1 - \alpha_1)\Phi_1\bar{X}(t)u^T(t)B_1^T + \\
 & \bar{\Phi}\bar{X}(t)u^T(t)\bar{B}^T. \tag{24}
 \end{aligned}$$

再将式(23)–(24)代入式(22)可得到式(20)–(21).

**3.2 最优线性滤波器、预报器和平滑器(Optimal linear filter, predictor and smoother)**

**定理 1** 在假设1–2下, 系统(8)–(9)有如下递推的最优线性滤波器:

$$\hat{X}(t|t) = \hat{X}(t|t-1) + K(t)\varepsilon(t), \tag{25}$$

$$\hat{X}(t+1|t) = \bar{\Phi}\hat{X}(t|t-1) + L(t)\varepsilon(t) + \bar{B}u(t), \tag{26}$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \bar{H}\hat{X}(t|t-1), \tag{27}$$

$$K(t) = P(t|t-1)\bar{H}^T Q_\varepsilon^{-1}(t), \tag{28}$$

$$L(t) = [\bar{\Phi}P(t|t-1)\bar{H}^T + \hat{S}(t)]Q_\varepsilon^{-1}(t), \tag{29}$$

$$Q_\varepsilon(t) = \bar{H}P(t|t-1)\bar{H}^T + \hat{R}(t), \tag{30}$$

$$P(t+1|t) =$$

$$[\bar{\Phi} - L(t)\bar{H}]P(t|t-1)[\bar{\Phi} -$$

$$L(t)\bar{H}]^T + \hat{Q}(t) - \hat{S}(t)L^T(t) -$$

$$L(t)\hat{S}^T(t) + L(t)\hat{R}(t)L^T(t), \tag{31}$$

$$P(t|t) = P(t|t-1) - K(t)Q_\varepsilon(t)K^T(t), \tag{32}$$

其中:

$$\hat{S}(t) = \alpha_2(1 - \alpha_2)\hat{\Phi}q(t)\hat{H} + \bar{S}, \tag{33}$$

$$\hat{R}(t) = \alpha_2(1 - \alpha_2)\hat{H}q(t)\hat{H}^T + \alpha_2Q_v, \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{Q}(t) = & \alpha_2(1 - \alpha_2)\hat{\Phi}q(t)\hat{\Phi}^T + \\
 & \alpha_1(1 - \alpha_1)\Phi_1q(t)\Phi_1^T + Q + \\
 & \alpha_1(1 - \alpha_1)B_1u(t)u^T(t)B_1^T - \\
 & \alpha_1(1 - \alpha_1)\Phi_1\bar{X}(t)u^T(t)B_1^T - \\
 & \alpha_1(1 - \alpha_1)B_1u(t)\bar{X}^T(t)\Phi_1^T, \tag{35}
 \end{aligned}$$

其中:  $q(t)$ 由式(20)计算,  $\varepsilon(t)$ 是新息序列, 方差为  $Q_\varepsilon(t)$ ,  $P(t+1|t)$ 和  $P(t|t)$  分别为预报和滤波误差方差阵,  $K(t)$ 和  $L(t)$ 分别为滤波和预报增益矩阵, 并且初值为

$$\begin{aligned}
 \hat{X}(0|-1) &= [\mu_0^T \ 0]^T, \\
 P(0|-1) &= \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

**证** 由射影定理有

$$\hat{X}(t|t) = \hat{X}(t|t-1) + K(t)\varepsilon(t).$$

新息  $\varepsilon(t)$ 如下计算:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(t) &= y(t) - \hat{y}(t|t-1) = \\
 & (r_2(t) - \alpha_2)\hat{H}X(t) + \\
 & \bar{H}\tilde{X}(t|t-1) + r_2(t)v(t). \tag{36}
 \end{aligned}$$

把式(36)代入新息方差阵  $Q_\varepsilon(t) = E[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)]$ 中, 并且应用假设1和引理1可得式(30)和式(34).

滤波增益计算为

$$K(t) = E[X(t)\varepsilon^T(t)]Q_\varepsilon^{-1}(t). \tag{37}$$

由式(36)有

$$E[X(t)\varepsilon^T(t)] = P(t|t-1)\bar{H}^T,$$

并将其代入式(37)有式(28).

再应用射影定理有

$$\hat{X}(t+1|t) = \hat{X}(t+1|t-1) + L(t)\varepsilon(t). \tag{38}$$

对式(8)两边同时取射影有

$$\hat{X}(t+1|t-1) = \bar{\Phi}\hat{X}(t|t-1) + \bar{B}u(t). \tag{39}$$

把式(39)代入到式(38)有式(26).

预报增益计算为

$$L(t) = E[X(t+1)\varepsilon^T(t)]Q_\varepsilon^{-1}(t). \tag{40}$$

由式(8)和式(36), 并利用假设1和引理1,  $X(t) \perp v(t)$ ,  $\hat{X}(t|t-1) \perp \tilde{X}(t|t-1)$ , 则有

$$E[X(t+1)\varepsilon^T(t)] = \bar{\Phi}P(t|t-1)\bar{H}^T + \hat{S}(t), \tag{41}$$

而  $\hat{S}(t)$ 由式(33)定义. 将式(41)代入式(40)得式(29).

由式(8)(26)(36)可得一步预报误差方程为

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}(t+1|t) &= X(t+1) - \hat{X}(t+1|t) = \\
 & [\bar{\Phi} - L(t)\bar{H}]\tilde{X}(t|t-1) + \{[r_2(t) - \alpha_2] \times \\
 & [\hat{\Phi} - L(t)\hat{H}] - [r_1(t) - \alpha_1]\Phi_1\}X(t) + \\
 & \tilde{I}(t)W(t) + [\tilde{B}(t) - \bar{B}]u(t) - r_2(t)L(t)v(t). \tag{42}
 \end{aligned}$$

将式(42)代入预报误差方差阵的计算公式  $P(t+1|t) = E[\tilde{X}(t+1|t)\tilde{X}^T(t+1|t)]$ 中, 利用假设1和引理1, 以及  $X(t) \perp v(t)$ ,  $\tilde{X}(t|t-1) \perp W(t)$ ,  $\tilde{X}(t|t-1) \perp v(t)$ ,  $X(t) \perp W(t)$ 的事实, 可得到一步预报误差方差阵(31)和(35). 由式(25)得滤波误差为

$$\tilde{X}(t|t) = \tilde{X}(t|t-1) - K(t)\varepsilon(t). \tag{43}$$

将式(43)代入矩阵  $P(t|t) = E[\tilde{X}(t|t)\tilde{X}^T(t|t)]$ 中, 利用  $\hat{X}(t|t-1) \perp \varepsilon(t)$  和式(37)有

$$\begin{aligned} E[\tilde{X}(t|t-1)\varepsilon^T(t)] &= \\ E\{[X(t) - \hat{X}(t|t-1)]\varepsilon^T(t)\} &= \\ E[X(t)\varepsilon^T(t)] &= K(t)Q_\varepsilon(t), \end{aligned} \quad (44)$$

从而可得式(32).

**注 1** 由定理1可见滤波器的增益和协方差阵受到系统状态协方差的影响, 而状态协方差又受到控制输入的影响. 这与含有确定输入的无丢包系统的滤波器<sup>[15]</sup>不同, 其原因来自于随机丢包现象.

**定理 2** 在假设1-2下, 系统(8)-(9)有如下的最优 $N(N < -1)$ 步预报器:

$$\hat{X}(t|t+N) = \bar{\Phi}\hat{X}(t-1|t+N) + \bar{B}u(t-1). \quad (45)$$

预报误差方差阵为

$$P(t|t+N) = \bar{\Phi}P(t-1|t+N)\bar{\Phi}^T + \hat{Q}(t-1), \quad (46)$$

其中 $\hat{Q}(t-1)$ 由式(35)计算.

**证** 由式(8)得

$$\begin{aligned} X(t) &= \tilde{\Phi}(t-1)X(t-1) + \tilde{\Gamma}(t-1)W(t-1) + \\ &\tilde{B}(t-1)u(t-1). \end{aligned} \quad (47)$$

对式(47)两边取射影有

$$\hat{X}(t|t+N) = \bar{\Phi}\hat{X}(t-1|t+N) + \bar{B}u(t-1). \quad (48)$$

预报误差为

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t|t+N) &= X(t) - \hat{X}(t|t+N) = \\ &[\tilde{\Phi}(t-1) - \bar{\Phi}]X(t-1) + \bar{\Phi}\tilde{X}(t-1|t+N) + \\ &\tilde{\Gamma}(t-1)W(t-1) + [\tilde{B}(t-1) - \bar{B}]u(t-1). \end{aligned} \quad (49)$$

将式(49)代入预报误差方差阵的计算方程 $P(t|t+N) = E[\tilde{X}(t|t+N)\tilde{X}^T(t|t+N)]$ 中, 利用假设1和引理2可得到 $N(N < -1)$ 步预报误差方差阵(46).

**定理 3** 在假设1-2下, 系统(8)-(9)有如下的最优固定滞后 $N(N > 0)$ 步平滑器:

$$\begin{aligned} \hat{X}(t|t+N) &= \hat{X}(t|t+N-1) + \\ &M(t|t+N)\varepsilon(t+N). \end{aligned} \quad (50)$$

平滑增益为

$$\begin{aligned} M(t|t+N) &= P(t|t-1)\Psi^T(t+N, t) \times \\ &\bar{H}^T Q_\varepsilon^{-1}(t+N). \end{aligned} \quad (51)$$

平滑误差方差阵为

$$\begin{aligned} P(t|t+N) &= P(t|t+N-1) - M(t|t+N) \cdot \\ &Q_\varepsilon(t+N)M^T(t|t+N), \end{aligned} \quad (52)$$

其中

$$\Psi(t+N, t) = \prod_{s=1}^N \Psi_p(t+N-s), \quad (53)$$

$$\Psi(t, t) = I_n, \Psi_p(t) = \bar{\Phi} - L(t)\bar{H}. \quad (54)$$

初值 $\hat{X}(t|t)$ 和 $P(t|t)$ 由定理1计算.

**证** 类似文献[10]的证明可得定理3.

**推论 1** 由式(7)可知, 原系统状态 $x(t)$ 的估计及误差方差的计算如下:

$$\hat{x}(t|t+N) = [I_n \ 0 \ \cdots \ 0] \hat{X}(t|t+N), \quad (55)$$

$$p(t|t+N) =$$

$$[I_n \ 0 \ \cdots \ 0]P(t|t+N)[I_n \ 0 \ \cdots \ 0]^T. \quad (56)$$

#### 4 稳态估值器(Steady-state estimators)

这一部分本文探索稳态线性估值器. 由上一部分可知控制输入 $u(t)$ 影响滤波器的增益和协方差阵, 所以为了研究稳态情况, 应要求控制输入为常值, 即 $u(t) = u$ .

定义矩阵

$$\begin{aligned} U &= \bar{\Phi} \otimes \bar{\Phi} + \alpha_2(1 - \alpha_2)\hat{\Phi} \otimes \hat{\Phi} + \\ &\alpha_1(1 - \alpha_1)\Phi_1 \otimes \Phi_1, \end{aligned} \quad (57)$$

其中 $\otimes$ 表示克罗内克积.

**定理 4** 对于系统(8)-(9), 如果 $\Phi$ 是稳定的, 那么差分方程(19)的解 $\bar{X}(t)$ 收敛于如下的方程的解 $\bar{X}$ .

$$\bar{X} = \bar{\Phi}\bar{X} + \bar{B}u, \quad (58)$$

如果 $\rho(U) < 1$ , 其中 $\rho(U)$ 表示矩阵 $U$ 的谱半径, 那么对于任意初值 $q(0)$ , 方程(20)的解 $q(t)$ 收敛于如下的代数Lyapunov方程的解 $q$ , 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q$ :

$$\begin{aligned} q &= \alpha_2(1 - \alpha_2)\hat{\Phi}q\hat{\Phi}^T + \bar{\Phi}q\bar{\Phi}^T + \\ &\alpha_1(1 - \alpha_1)\Phi_1q\Phi_1^T + G, \end{aligned} \quad (59)$$

其中

$$\begin{aligned} G &= \alpha_1(1 - \alpha_1)B_1uu^TB_1^T + \bar{B}uu^T\bar{B}^T + Q - \\ &\alpha_1(1 - \alpha_1)\Phi_1\bar{X}u^TB_1^T + \bar{\Phi}\bar{X}u^T\bar{B}^T - \\ &\alpha_1(1 - \alpha_1)B_1u\bar{X}^T\Phi_1^T + \bar{B}u\bar{X}^T\bar{\Phi}^T. \end{aligned} \quad (60)$$

**证** 由于 $\Phi$ 是稳定的, 并且 $0 < \alpha_i \leq 1, i = 1, 2$ , 所以 $\bar{\Phi}$ 是稳定的, 那么无论 $\bar{X}(t)$ 的初值如何选取, 式(19)的解 $\bar{X}(t)$ 将指数收敛于(58)的唯一解 $\bar{X}$ , 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{X}(t) = \bar{X}$ . 由矩阵分析的知识, 可知当 $\rho(U) < 1$ 时, 方程(20)的解 $q(t)$ 将收敛于代数Lyapunov方程(59)的解 $q$ , 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q$ .

**推论 2** 在定理4的条件下, 由式(33)-(35)定义的 $\hat{R}(t), \hat{S}(t)$ 和 $\hat{Q}(t)$ 都收敛于常值, 即

$$\hat{R} = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \alpha_2(1 - \alpha_2)\hat{H}q\hat{H}^T + \alpha_2Q_v, \quad (61)$$

$$\hat{S} = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{S}(t) = \alpha_2(1 - \alpha_2)\hat{\Phi}q\hat{H} + \bar{S}, \quad (62)$$

$$\hat{Q} = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{Q}(t) =$$

$$\alpha_2(1 - \alpha_2)\hat{\Phi}q\hat{\Phi}^T + \alpha_1(1 - \alpha_1)B_1uu^TB_1^T +$$

$$\alpha_1(1 - \alpha_1)\Phi_1 q \Phi_1^T - \alpha_1(1 - \alpha_1)\Phi_1 \bar{X} u^T B_1^T - \alpha_1(1 - \alpha_1)B_1 u \bar{X}^T \Phi_1^T + Q. \tag{63}$$

证 应用定理4, 由式(33)–(35)可得式(61)–(63).

**定理 5** 在  $\rho(U) < 1$  的条件下, 如果  $(\bar{H}, \bar{\Phi})$  为能检对,  $(\bar{\Phi} - \hat{S}\hat{R}^{-1}\bar{H}, \hat{Q}_1)$  为能稳对时, 其中  $\hat{Q}_1$  满足  $\hat{Q}_1\hat{Q}_1^T = \hat{Q} - \hat{S}\hat{R}^{-1}\hat{S}^T$ , 那么, 对于任何初值  $P(0| - 1) \geq 0$  和  $q(0) \geq 0$ , 方程式(31)的解  $P(t|t - 1)$  将收敛于如下代数Riccati方程的唯一半正定解  $\Sigma$ , 即  $\Sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t|t - 1)$ , 则

$$\Sigma = [\bar{\Phi} - L\bar{H}] \Sigma [\bar{\Phi} - L\bar{H}]^T + \hat{Q} - \hat{S}L^T - L\hat{S}^T + L\hat{R}L^T, \tag{64}$$

其中

$$L = [\bar{\Phi}\Sigma\bar{H}^T + \hat{S}](\bar{H}\Sigma\bar{H}^T + \hat{R})^{-1}, \tag{65}$$

而且, 本文有  $L = \lim_{t \rightarrow \infty} L(t)$ . 且如下稳态一步预报器是渐近稳定的:

$$\hat{X}(t + 1|t) = (\bar{\Phi} - L\bar{H})\hat{X}(t|t - 1) + Ly(t) + \bar{B}u. \tag{66}$$

证 考虑如下线性时不变系统:

$$X(t + 1) = \bar{\Phi}X(t) + \bar{B}u + \bar{\omega}(t), \tag{67}$$

$$y(t) = \bar{H}X(t) + \bar{v}(t), \tag{68}$$

其中:  $X(t)$  是被估计状态;  $u$  是已知定常的输入;  $\bar{\Phi}$ ,  $\bar{B}$  和  $\bar{H}$  都是已知适当维数的矩阵;  $\bar{\omega}(t)$  和  $\bar{v}(t)$  都是零均值的白噪声, 并且满足  $E[\bar{\omega}(k)\bar{\omega}^T(l)] = \hat{Q}\delta_{kl}$ ,  $E[\bar{\omega}(k)\bar{v}^T(l)] = \hat{S}\delta_{kl}$  和  $E[\bar{v}(k)\bar{v}^T(l)] = \hat{R}\delta_{kl}$ . 易知带常参数的系统(67)–(68)的Kalman滤波器相同于定理1. 根据  $\bar{\Phi}$  的结构和  $\rho(U) < 1$  可得是  $\bar{\Phi}$  稳定的. 由定理4知,  $X(t)$  和  $q(t)$  收敛. 由经典Kalman滤波理论<sup>[15]</sup>, 在  $(\bar{H}, \bar{\Phi})$  为能检对,  $(\bar{\Phi} - \hat{S}\hat{R}^{-1}\bar{H}, \hat{Q}_1)$  为能稳对时, 有  $\Sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t|t - 1)$ ,  $L = \lim_{t \rightarrow \infty} L(t)$ , 且  $(\bar{\Phi} - L\bar{H})$  为稳定阵, 则系统(67)–(68)的预报器(66)是渐近稳定的.

**注 2** 稳态一步预报器的存在性意味着稳态滤波器、多步预报器和平滑器的存在性.

### 5 仿真研究(Simulation research)

考虑带连续两次丢包的离散时不变随机系统:

$$x(t + 1) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.9 & 0.2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.5 \end{bmatrix} \omega(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{u}(t),$$

$$z(t) = [1 \ 1]x(t) + v(t),$$

$$\underline{u}(t) =$$

$$r_1(t)u(t) + (1 - r_1(t))r_1(t - 1)u(t - 1) + (1 - r_1(t))(1 - r_1(t - 1))u(t - 2),$$

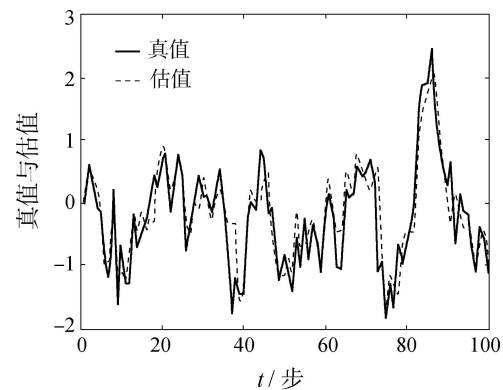
$$y(t) = r_2(t)z(t) + (1 - r_2(t))r_2(t - 1)z(t - 1) + (1 - r_2(t))(1 - r_2(t - 1))z(t - 2),$$

其中: 白噪声  $\omega(t)$  和  $v(t)$  满足  $v(t) = c\omega(t) + \eta(t)$ ,  $\eta(t)$  是不相关于  $\omega(t)$  的零均值的白噪声, 方差为  $Q_\eta$ . 本文的目的是求状态  $x(t)$  的最优滤波器  $\hat{x}(t|t)$ 、一步预报器  $\hat{x}(t|t - 1)$  和一步平滑器  $\hat{x}(t|t + 1)$ .

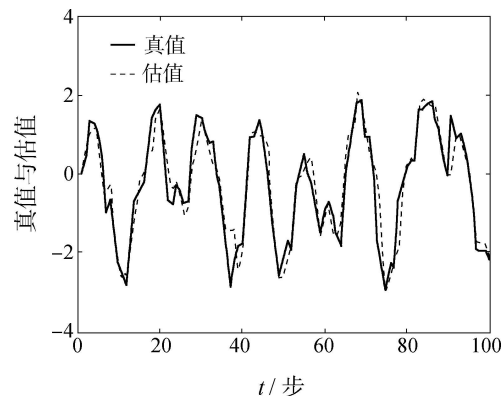
在仿真中取:  $Q_\omega = 1$ ,  $Q_\eta = 0.25$ ,  $c = 0.1$ ,  $\alpha_1 = 0.4$ ,  $\alpha_2 = 0.7$ ,  $u(t) = \sin(0.5t)$ , 经计算得  $Q_v = 0.26$ ,  $S_{\omega v} = 0.1$ . 初始值为  $x(0) = [0 \ 0]^T$  和  $P_0 = 0.1I_2$ , 其中  $I_2$  是  $2 \times 2$  的单位矩阵.

本文取100个采样数据. 图1–3分别给出了最优线性滤波器  $\hat{x}(t|t)$ 、预报器  $\hat{x}(t|t - 1)$  和平滑器  $\hat{x}(t|t + 1)$  的跟踪图, 实线表示真值, 虚线表示估值. 可见它们具有较好的跟踪效果.

为了进一步验证理论精度, 将本文系统与无限丢包系统的滤波器<sup>[12]</sup>进行了500次Monte-Carlo实验. 图4分别给出了滤波器的均方误差(MSE)曲线比较图, 从图中可以清楚地看出有限丢包的精度要比无限丢包的精度高. 进一步, 可以证实当系统未发生丢包的情况下, 即  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  时, 本文得到的是最优的标准Kalman估值器.



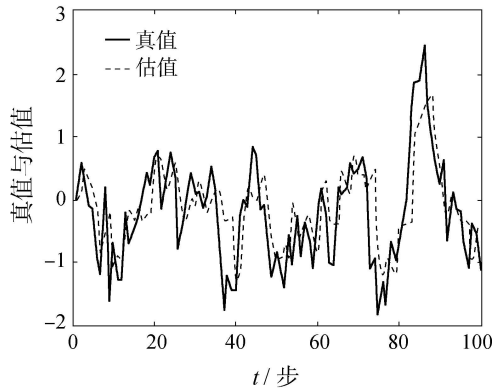
(a) 第1个状态分量



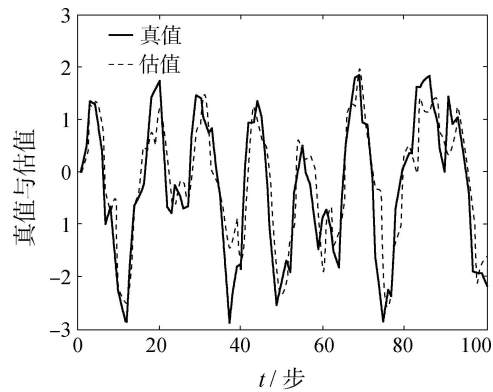
(b) 第2个状态分量

图1 状态的最优线性滤波器

Fig. 1 Optimal linear filter for the state



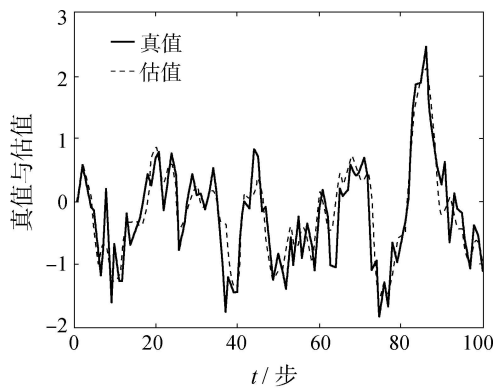
(a) 第 1 个状态分量



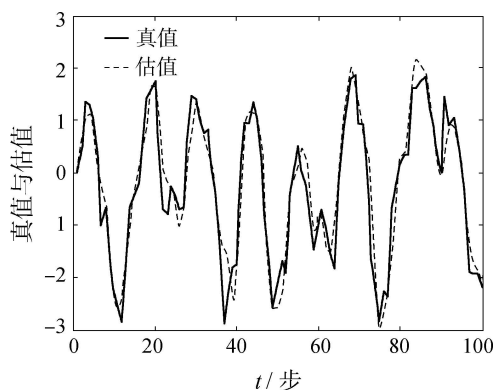
(b) 第 2 个状态分量

图 2 状态的最优线性预报器

Fig. 2 Optimal linear predictor for the state



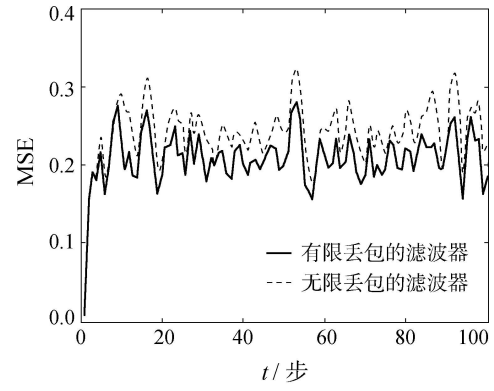
(a) 第 1 个状态分量



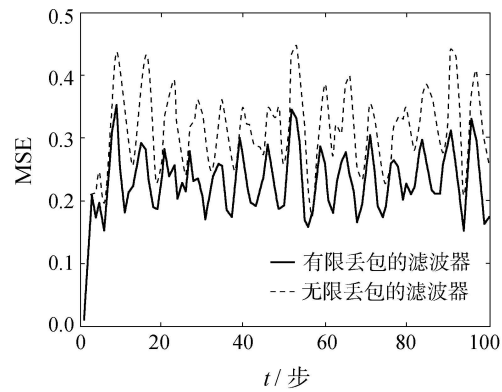
(b) 第 2 个状态分量

图 3 状态的最优线性平滑器

Fig. 3 Optimal linear smoother for the state



(a) 第 1 个状态分量



(b) 第 2 个状态分量

图 4 当  $\alpha_1 = 0.4$ ,  $\alpha_2 = 0.7$  时, 本文有限丢包与文献[12]无限丢包的滤波器的均方误差(MSE)比较

Fig. 4 Comparison of mean square errors (MSE) for the filters of finite packet dropouts in this paper and infinite packet dropouts in [12] under  $\alpha_1 = 0.4$ ,  $\alpha_2 = 0.7$

## 6 结论(Conclusions)

本文研究了具有有限连续丢包的线性离散随机系统的估计问题, 其中丢包存在于从传感器到估值器和从控制器到执行器的数据传输中. 基于射影理论提出了线性最小方差最优线性估值器, 包括滤波器, 预报器和平滑器. 给出了稳态滤波器存在的一个充分条件. 它们要求解一个Lyapunov方程, 一个Riccati方程和一个简单的差分方程. 由于观测和控制具有随机丢包, 使得滤波增益和滤波协方差阵受控制输入的影响. 这与传统的带有确定控制输入系统的滤波器不同, 且在丢包时本文算法退化为标准的Kalman估值器.

## 参考文献(References):

- [1] ZHANG H, XIE L. *Control and Estimation of Systems with Input/Output Delays* [M]. New York: Springer, 2007.
- [2] YAZ Y I, YAZ E E, MOHSENI M J. LMI-based state estimation for some discrete-time stochastic models [C] // *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications*. New York: IEEE, 1998: 456 – 460.
- [3] HESPANHA J P, NAGHSHTABRIZI P, XU Y. A survey of recent results in networked control systems [J]. *Proceedings of IEEE, Special Issue on Networked Control Systems*, 2007, 95(1): 138 – 162.

- [4] SINOPOLI B, SCHENATO L, FRANCESCHETTI M, et al. Kalman filtering with intermittent observations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1453 – 1464.
- [5] SCHENATO L. Optimal estimation in networked control systems subject to random delay and packet loss[C] // *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 2006: 5615 – 5620.
- [6] SUN S L, XIE L H, XIAO W D. Optimal full-order filtering for discrete-time systems with random measurement delays and multiple packet dropouts [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2010, 8(1): 105 – 110.
- [7] WANG Z, YANG F, HO D W C, et al. Robust finite-horizon filtering for stochastic systems with missing measurements [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2005, 12(6): 437 – 440.
- [8] 王武, 杨富文, 詹耀清. 测量数据丢失时的随机不确定离散系统的鲁棒H<sub>2</sub>状态估计 [J]. *控制理论与应用*, 2008, 25(3): 439 – 445. (WANG Wu, YANG Fuwen, ZHAN Yaoqing. Robust H-two state estimation for stochastic uncertain discrete-time system with missing measurements [J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(3): 439 – 445.)
- [9] SAHEBSARA M, CHEN T, SHAH S L. Optimal filtering with random sensor delay, multiple packet dropout and uncertain observations [J]. *International Journal of Control*, 2007, 80(1): 292 – 301.
- [10] SUN S L, XIE L H, XIAO W D, et al. Optimal linear estimation for systems with multiple packet dropouts [J]. *Automatica*, 2008, 44(5): 1333 – 1342.
- [11] SUN S L, XIE L H, XIAO W D. Optimal full-order and reduced-order estimators for discrete-time systems with multiple packet dropouts [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(8): 4031 – 4038.
- [12] LIANG Y, CHEN T, PAN Q. Optimal linear state estimator with multiple packet dropouts [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(6): 1428 – 1433.
- [13] SUN S L, XIE L H, XIAO W D, et al. Optimal filtering for systems with multiple packet dropouts [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems, II: Express Briefs*, 2008, 55(7): 695 – 699.
- [14] SUN S L. Optimal estimator for systems with finite consecutive packet dropouts [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2009, 16(7): 557 – 560.
- [15] ANDERSON B D O, MOORE J B. *Optimal Filtering* [M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1979.

#### 作者简介:

**陈海霞** (1985–), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为最优估计、信息融合估计等, E-mail: chenhaixia53419811@126.com;

**孙书利** (1971–), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为状态估计、信息融合、传感器网络等, E-mail: sunsl@hlju.edu.cn.