

控制输入受限的拦截卫星轨道鲁棒 H_2/H_∞ 控制

邓泓, 孙兆伟, 仲惟超

(哈尔滨工业大学 卫星技术研究所, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 针对拦截卫星在执行轨道拦截任务的过程中存在不确定参数和不同类型外界干扰的轨道控制问题, 研究了基于鲁棒 H_2/H_∞ 稳定的控制器设计方法. 首先, 考虑参数不确定性、外界干扰、系统的 H_2/H_∞ 性能和有限时间性能、控制输入限幅和极点配置, 建立了相对运动轨道模型和相应的约束条件, 并由此提出了控制器设计目标. 然后采用线性不等式技术提出并证明了控制器存在的充分条件, 并将控制器的设计转化为一个凸优化问题进行求解. 仿真结果表明, 设计的控制器能够使系统稳定并满足各项约束, 且对系统不确定性具有较好的鲁棒性以及对外界干扰有一定的抑制作用.

关键词: 轨道控制; 鲁棒 H_2/H_∞ ; 不确定性; 外界干扰; 控制输入受限

中图分类号: V448.2 **文献标识码:** A

Robust H-two/H-infinity orbit control for intercepting spacecraft with control input constraint

DENG Hong, SUN Zhao-wei, ZHONG Wei-chao

(Research Center of Satellite Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China)

Abstract: A robust H-two/H-infinity orbit controller is proposed for intercepting satellite with parametric uncertainties, external disturbances and control input constraint. First, we build the relative model and formulate the relative constraints by considering all factors including uncertainties, disturbances, system H-two/H-infinity and finite-time performances, input constraint and pole placement. Then, we derive the sufficient conditions of controller by using the linear matrix inequality technology, transforming the controller design to a convex optimization problem. Simulation results show that the system is asymptotically stable with good robustness and high disturbance attenuation, and satisfies all the constraint requirements.

Key words: orbit control; robust H-two/H-infinity; uncertainty; disturbance; control input constraint

1 引言(Introduction)

拦截卫星是指根据地面指令自动识别与接近目标卫星, 并实施干扰以使其失效的人造地球卫星^[1]. 为了快速逼近目标卫星, 拦截卫星一般通过推进器产生大推力以实现变轨. 由于推进器工作产生的复杂振动环境, 系统的某些参数会产生一些不确定的变化, 系统的输入噪声也不再是单一的白噪声, 因此, 设计一种具有良好鲁棒性和干扰抑制性的控制器显得尤为重要. 文献[2]针对参数不确定模型设计了一种鲁棒自适应控制器, 以保证闭环系统全局一致最终有界稳定. 文献[3]针对在轨卫星姿态跟踪时存在外部干扰和参数不确定性, 采用神经网络逼近系统不确定部分并设计自适应 L_2 增益控制器实现对干扰的抑制.

由于推进器的推力幅值有限, 因而有必要在设计控制器时考虑此约束; 否则, 在卫星实际控制过程中, 闭环系统的控制性能将会降低, 甚至导致闭环系统的不稳定. 文献[4]提出了一种变结构控制器的设计方法, 保证闭环系统在控制输入受限时仍能渐近

稳定. 文献[5]在反作用飞轮输出力矩受限约束条件下, 设计了基于递阶饱和方法的变结构控制器. 文献[6]针对输入受限的挠性航天器大角度机动控制问题, 提出了自适应滑模控制方法并仿真证明其有效性. 此外, 为保证闭环系统具有一定的动态特性, 文献[7]研究了极点区域约束下的控制器设计问题.

然而, 这些文献在设计控制器时只考虑了其中一项或几项情况, 很少综合考虑上述所有情况, 且大多研究的是卫星姿态控制问题. 本文针对具有两类外界干扰和不确定参数的拦截卫星相对轨道模型, 以系统状态有限时间内的性能为优化目标, 同时考虑控制输入限幅和极点配置约束, 提出了一种基于状态反馈的控制器设计方法. 该方法基于鲁棒 H_2/H_∞ 理论, 并参考文献[8-9]采用线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)处理系统不确定部分及各项约束. 仿真结果表明, 该方法设计的控制器具有良好的控制性能和鲁棒性.

2 相对轨道模型(Relative orbit model)

首先定义相对参考坐标系: 目标卫星的质心为坐

标原点, X轴方向为从地心指向目标卫星质心方向, Z轴方向为目标卫星轨道角动量矢量方向, Y轴、X轴和Z轴构成右手直角坐标系. 在该参考系下, 拦截卫星相对目标卫星的轨道模型为

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - 3\omega^2x = F_x/m, \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} = F_y/m, \\ \ddot{z} + \omega^2z = F_z/m, \end{cases} \quad (1)$$

式中: ω 为目标卫星轨道角速度, m 为拦截卫星质量, x, y, z 为相对参考系中拦截卫星的位置分量, F_x, F_y, F_z 为该参考系下拦截卫星的轨道控制力分量.

定义系统状态向量、控制输入向量和测量输出向量分别为

$$\mathbf{X}(t) = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T, \quad (2)$$

$$\mathbf{u}(t) = (F_x, F_y, F_z)^T, \quad (3)$$

$$\mathbf{y}(t) = (x, y, z)^T, \quad (4)$$

并考虑系统具有两类外部干扰, 则有

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + D_1v(t) + D_2w(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t), \end{cases} \quad (5)$$

式中: $v(t)$ 表示白噪声干扰, 如具有统计特性的系统输入噪声, $w(t)$ 表示能量有限干扰, 如由推进器输出偏差造成的干扰加速度和振动引起的不具有统计特性的系统输入噪声等, D_1 和 D_2 分别为其系数矩阵,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

本文控制器设计主要考虑了如下约束:

1) 参数不确定性. 由于目标卫星的非合作性和空间环境的复杂性, 有时无法精确获得目标卫星的轨道角速度. 此外, 拦截卫星一般采用喷气推进器产生轨道推力, 在变轨拦截过程中由于燃料消耗引起的卫星质量变化很难实时精确计算. 因此, 本文考虑了如下轨道角速度和卫星质量的不确定性:

$$\omega = \omega_0(1 + \delta_1(t)), \quad (6)$$

$$m = m_0(1 + \delta_2(t)), \quad (7)$$

式中: ω_0 和 m_0 表示理论值; $\delta_1(t)$ 和 $\delta_2(t)$ 为任意有界函数, 表示参数不确定度, 且存在常数 $\bar{\delta}_1 > 0$ 和 $\bar{\delta}_2 > 0$ 分别满足 $|\delta_1(t)| < \bar{\delta}_1$ 和 $|\delta_2(t)| < \bar{\delta}_2$.

由此, 建立不确定相对轨道运动模型

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{X}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) + D_1v(t) + D_2w(t), \quad (8)$$

式中:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_0 + \Delta\mathbf{A}(t), \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_0 + \Delta\mathbf{B}(t),$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & 2\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{m_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

不确定部分 $\Delta\mathbf{A}(t)$ 和 $\Delta\mathbf{B}(t)$ 可写成如下范数有界不确定形式:

$$[\Delta\mathbf{A}(t) \quad \Delta\mathbf{B}(t)] = \mathbf{H}\mathbf{F}(t)[\mathbf{E}_a \quad \mathbf{E}_b], \quad (9)$$

式中:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2\omega_0 & m_0^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega_0 & 0 & 0 & m_0^{-1} & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_0^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}_a = \begin{bmatrix} 2\bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\delta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\delta}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}_b = \frac{\bar{\delta}_2}{1 - \bar{\delta}_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{F}(t) = \text{diag}\{F_1(t), F_2(t), \dots, F_7(t)\},$$

$$F_1(t) = F_2(t) = \frac{2\delta_1(t) + \delta_1^2(t)}{2\bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_1^2},$$

$$F_3(t) = F_4(t) = \frac{\delta_1(t)}{\bar{\delta}_1},$$

$$F_5(t) = F_6(t) = F_7(t) = \frac{\delta_2(t)(1 - \bar{\delta}_2)}{\bar{\delta}_2(1 - \delta_2(t))}.$$

可见, $F^T(t)F(t) \leq I$.

2) 控制输入受限. 推进器的推力是有限的, 因此, 设计控制器时应满足如下约束:

$$\|u(t)\| \leq u_{\max}, \quad (10)$$

式中: $\|\cdot\|$ 表示向量的欧氏范数, u_{\max} 表示推力幅值.

3) H_2 和 H_∞ 性能. H_2 性能衡量的是系统性能, H_∞ 性能则反映了系统的鲁棒性, 但这是以牺牲系统性能为代价的. 因此, 设计控制器时应同时考虑如下约束:

$$\|T_{yv}\|_2 < \beta, \quad (11)$$

$$\|T_{yw}\|_\infty < \gamma, \quad (12)$$

式中: β 和 γ 均为已知常数且为正实数, $\|\cdot\|_2$ 表示矩阵的 H_2 范数, $\|\cdot\|_\infty$ 表示矩阵的 H_∞ 范数, T_{yv} 表示从 $v(t)$ 到 $y(t)$ 的闭环传递函数矩阵, T_{yw} 表示从 $w(t)$ 到 $y(t)$ 的闭环传递函数矩阵.

4) 有限时间性能. 当拦截卫星执行拦截任务时, 通常要求其能在有限时间内完成, 以防目标卫星逃逸. 并且要求燃料消耗小, 以防出现拦截卫星燃料携带不足而导致无法完成的情况. 因此, 设计控制器时应考虑如下系统状态和控制输入向量的有限时间线性二次型性能:

$$J = X^T(t_F)S X(t_F) + \int_{t_0}^{t_F} [X^T(t)Q X(t) + u^T(t)R u(t)]dt, \quad (13)$$

式中: S, Q 和 R 均为正定对称矩阵, t_0 和 t_F 分别为初始时刻和终端时刻.

5) 极点区域配置. 由于模型存在不确定性和各类扰动, 因此很难实现精确的极点配置. 但若能使闭环系统的极点分布在复平面适当区域中, 也可以保证系统具有一定的动态特性. 因此, 本文设计控制器时还考虑使闭环系统的所有极点均在区域 $\mathcal{U}(r, q)$ 中, 其中 $\mathcal{U}(r, q)$ 表示复平面上中心为 $(-q, 0)$ 且半径为 r 的一个圆盘区域.

此外, 本文采用状态反馈控制. 定义 K 为状态反馈控制增益阵, 则控制器结构为

$$u(t) = K X(t). \quad (14)$$

故闭环系统模型可写为

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \tilde{A}_c X(t) + D_1 v(t) + D_2 w(t), \\ y(t) = C X(t), \end{cases} \quad (15)$$

式中 $\tilde{A}_c = \tilde{A} + \tilde{B}K$.

至此, 本文的控制目标可以表述为: 针对不确定系统(15), 考虑控制输入约束(10), 设计控制增益阵 K , 使闭环系统渐近稳定且满足: 系统的 H_2 性能和 H_∞ 性能分别满足式(11)和式(12); 有限时间性能 J 达极小值; 闭环系统极点都在区域 \mathcal{U} 中.

3 鲁棒 H_2/H_∞ 控制器设计(Robust H_2/H_∞ controller design)

引理 1 M 和 N 为具有适当维数的矩阵, 对于任意矩阵 Γ 若满足 $\Gamma^T \Gamma \leq I$, 则存在一个常数 $\varepsilon > 0$, 使得^[10]

$$M\Gamma N + N^T \Gamma^T M^T < \varepsilon M M^T + \varepsilon^{-1} N^T N. \quad (16)$$

引理 2 Y, M 和 N 为具有适当维数的矩阵, 若存在矩阵 Γ 满足^[11]

$$Y + M\Gamma N + N^T \Gamma^T M^T < 0, \quad (17)$$

当且仅当

$$M^\perp Y M^{\perp T} < 0, N^\perp Y N^{\perp T} < 0. \quad (18)$$

引理 3 M 和 N 为具有适当维数的矩阵, 则对于任意实数 $\varepsilon > 0$, 有^[12]

$$\begin{bmatrix} 0 & N M^T \\ M N^T & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \varepsilon N N^T & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} M M^T \end{bmatrix}. \quad (19)$$

定理 1 考虑不确定系统(15), 如果存在正定对称矩阵 Π 和 P_1 满足

$$\text{tr}(\Pi) < \beta^2, \quad (20)$$

$$D_1^T P_1 D_1 < \Pi, \quad (21)$$

$$S - P_1 < 0, \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} A_1 & P_1 + \tilde{A}_c^T V - V^T & V^T D_2 & C^T \\ * & -V - V^T & V^T D_2 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (23)$$

式中: $A_1 = \tilde{A}_c^T V + V^T \tilde{A}_c + Q + K^T R K$, “*”表示对称阵. 则该系统渐近稳定且系统的 H_2 性能和 H_∞ 性能分别满足式(11)和式(12), 有限时间性能 J 有上界 $X^T(t_0)P_1 X(t_0)$.

证 定义 $\Phi = [V \ V]$, V 为具有适当维数的矩阵, 则式(23)可写为

$$\Xi_1 + W_1 \Phi U_1^T + U_1 \Phi^T W_1^T < 0, \quad (24)$$

式中:

$$\Xi_1 = \begin{bmatrix} Q + K^T R K & P_1 & 0 & C^T \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix},$$

$$W_1^T = [\tilde{A}_c \quad -I \quad D_2 \quad 0],$$

$$U_1^T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

矩阵 W_1 和 U_1 的正交补矩阵分别为

$$W_1^\perp = \begin{bmatrix} I & \tilde{A}_c^T & 0 & 0 \\ 0 & D_2^T & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, U_1^\perp = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

根据引理2, 由式(24)可知 $W_1^\perp \Xi_1 W_1^{\perp T} < 0$, 即

$$\begin{bmatrix} P_1 \tilde{A}_c + \tilde{A}_c^T P_1 + Q + K^T R K & P_1 D_2 & C^T \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (25)$$

因为 γ 为正实数且 Q 和 R 为正定阵, 故

$$Q + K^T R K > 0. \quad (26)$$

则由式(25)可得

$$\begin{bmatrix} P_1 \tilde{A}_c + \tilde{A}_c^T P_1 & P_1 D_2 & C^T \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (27)$$

$$P_1 \tilde{A}_c + \tilde{A}_c^T P_1 + Q + K^T R K < 0. \quad (28)$$

根据式(20)–(21)和式(27)并参考文献[13]可知, 系统(15)渐近稳定, 且系统的H₂性能和H_∞性能分别满足式(11)和式(12), 相应的Lyapunov函数为

$$V(t) = \mathbf{X}^T(t) P_1 \mathbf{X}(t). \quad (29)$$

将式(14)代入性能 J 并根据式(28)可得

$$\begin{aligned} J &< \mathbf{X}^T(t_F) S \mathbf{X}(t_F) - \int_{t_0}^{t_F} (P_1 \tilde{A}_c + \tilde{A}_c^T P_1) dt = \\ &\mathbf{X}^T(t_F) S \mathbf{X}(t_F) - \int_{t_0}^{t_F} \frac{d}{dt} [\mathbf{X}^T(t) P_1 \mathbf{X}(t)] dt = \\ &\mathbf{X}^T(t_F) (S - P_1) \mathbf{X}(t_F) + \mathbf{X}^T(t_0) P_1 \mathbf{X}(t_0), \end{aligned} \quad (30)$$

则由式(22)可知 J 有上界 $\mathbf{X}^T(t_0) P_1 \mathbf{X}(t_0)$.

证毕.

定理 2 考虑不确定系统(15), 对于给定的任意常数 $\eta > 0$, $\beta > 0$ 和 $\gamma > 0$, 如果存在常数 $\mu > 0$, $\lambda > 0$, $\alpha > 0$, 正定对称矩阵 \tilde{P}_1, \tilde{P}_2 和矩阵 Ω, Ψ 满足式(20)和下列不等式组:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & D_2 & \Omega^T C^T & \Sigma_4 & \Omega^T & \Psi^T \\ * & \Sigma_3 & D_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\mu I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\hat{Q} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\hat{R} \end{bmatrix} < 0, \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} -\Pi & D_1^T \\ * & \tilde{P}_1 - \Omega - \Omega^T \end{bmatrix} < 0, \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} -\tilde{P}_1 & \Omega^T \\ * & -\hat{S} \end{bmatrix} < 0, \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha I & \mathbf{X}^T(t_0) \\ * & \tilde{P}_1 - \Omega - \Omega^T \end{bmatrix} < 0, \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} -\tilde{P}_1 + \eta \alpha I & 0 & 0 \\ * & -u_{\max}^2 I & \Psi \\ * & * & -\eta I \end{bmatrix} < 0, \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_5 & (qI + A_0) \Omega + B_0 \Psi & 0 \\ * & -r \tilde{P}_2 & \Sigma_4 \\ * & * & -\lambda I \end{bmatrix} < 0, \quad (36)$$

式中:

$$\begin{aligned} \hat{S} &= S^{-1}, \quad \hat{Q} = Q^{-1}, \quad \hat{R} = R^{-1}, \\ \Sigma_1 &= A_0 \Omega + \Omega^T A_0^T + B_0 \Psi + \Psi^T B_0^T + \mu H H^T, \\ \Sigma_2 &= \tilde{P}_1 + \Omega^T A_0^T + \Psi^T B_0^T - \Omega + \mu H H^T, \\ \Sigma_3 &= -\Omega - \Omega^T + \mu H H^T, \\ \Sigma_4 &= \Omega^T E_a^T + \Psi^T E_b^T, \\ \Sigma_5 &= r(\tilde{P}_2 - \Omega - \Omega^T) + \lambda H H^T, \end{aligned}$$

则存在控制律 $\mathbf{u}(t) = K \mathbf{X}(t)$, 使该闭环系统渐近稳定、系统的H₂性能和H_∞性能分别满足式(11)和式(12)、控制输入满足约束(10)、闭环系统极点都在区域 \mathcal{U} 中、有限时间性能 J 有上界

$$J < \bar{J} = \alpha, \quad (37)$$

且控制增益阵 K 可由下式计算:

$$K = \Psi \Omega^{-1}. \quad (38)$$

证 将不确定结构(9)代入式(23)可得

$$\Xi_2 + W_2 F(t) U_2 + U_2^T F^T(t) W_2^T < 0, \quad (39)$$

式中:

$$\Xi_2 = \begin{bmatrix} \Lambda_2 & \Lambda_3 & V^T D_2 & C^T \\ * & -V - V^T & V^T D_2 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix},$$

$$W_2^T = [H^T V \quad H^T V \quad 0 \quad 0],$$

$$U_2 = [E_a + E_b K \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$\Lambda_2 = (A_0 + B_0 K)^T V + V^T (A_0 + B_0 K) + Q + K^T R K,$$

$$\Lambda_3 = P_1 + (A_0 + B_0 K)^T V - V^T.$$

由引理1和Schur补定理^[14]可得, 存在常数 $\mu > 0$, 使得当下式成立时, 式(39)成立:

$$\begin{bmatrix} \Lambda_4 & \Lambda_5 & V^T D_2 & C^T \\ * & \Lambda_6 & V^T D_2 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (40)$$

式中:

$$\Lambda_4 = \mu^{-1} (E_a + E_b K)^T (E_a + E_b K) +$$

$$\Lambda_2 + \mu V^T H H^T V,$$

$$\Lambda_5 = \Lambda_3 + \mu V^T H H^T V,$$

$$\Lambda_6 = V - V^T + \mu V^T H H^T V.$$

定义如下矩阵:

$$\Omega = V^{-1}, \Psi = K\Omega, \tilde{P}_1 = \Omega^T P_1 \Omega. \quad (41)$$

用矩阵 $J_1 = \text{diag}\{\Omega, \Omega, I, I\}$ 对式(40)做全等变换并利用 Schur 补定理即可得到式(31). 可见, 当式(31)成立时, 式(23)一定成立.

根据 Schur 补定理, 式(21)可写为

$$\begin{bmatrix} -\Pi & D_1^T \\ * & -P_1^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (42)$$

用矩阵 $J_2 = \text{diag}\{I, V\}$ 对上式做全等变换可得

$$\begin{bmatrix} -\Pi & D_1^T V \\ * & -V^T P_1^{-1} V \end{bmatrix} < 0. \quad (43)$$

因为 P_1 为正定矩阵, 故有

$$(P_1 - V)^T P_1^{-1} (P_1 - V) > 0. \quad (44)$$

由上式可得

$$-V^T P_1^{-1} V < P_1 - V - V^T. \quad (45)$$

可见, 当下式成立时, 式(43)一定成立:

$$\begin{bmatrix} -\Pi & D_1^T V \\ * & P_1 - V - V^T \end{bmatrix} < 0. \quad (46)$$

用矩阵 $J_3 = \text{diag}\{I, \Omega\}$ 对上式做全等变换, 则可得式(32). 可见, 当式(32)成立时, 式(21)一定成立.

用 Ω 对式(22)做全等变换可得

$$\Omega^T S \Omega - \Omega^T P_1 \Omega < 0, \quad (47)$$

利用 Schur 补定理, 则式(33)等价于式(47), 即式(33)等价于式(22).

可见, 当式(31)–(33)均成立时, 式(21)–(23)都成立. 故由定理1可知, 该系统渐近稳定且系统的 H_2 性能和 H_∞ 性能分别满足式(11)和式(12), 有限时间性能 J 有上界.

由文献[12]可知, 如果存在常数 $\alpha > 0$ 且满足

$$X^T(t_0) P_1 X(t_0) \leq \alpha, \quad (48)$$

$$\frac{1}{u_{\max}^2} K^T K - \frac{1}{\alpha} P_1 \leq 0, \quad (49)$$

则控制输入能满足式(10). 类似于式(32)的证明, 当式(34)成立时, 式(48)一定成立. 利用 Schur 补定理对式(49)变换, 再用矩阵 $J_4 = \text{diag}\{\Omega, I\}$ 对其做全等变换可得

$$\begin{bmatrix} -\tilde{P}_1 & \sqrt{\alpha} \Psi^T \\ * & -u_{\max}^2 I \end{bmatrix} \leq 0. \quad (50)$$

由引理3和 Schur 补定理可知, 对于任意常数 $\eta > 0$, 当式(35)成立时, 式(50)一定成立. 可见, 当式(34)和式(35)成立时, 控制输入满足式(10).

由文献[7]可知, 闭环系统的极点都在区域 $\mathcal{U}(r, q)$ 中当且仅当存在对称正定阵 P_2 满足

$$\begin{bmatrix} -rP_2 & qP_2 + P_2 \tilde{A}_c \\ * & -rP_2 \end{bmatrix} < 0. \quad (51)$$

用矩阵 $J_5 = \text{diag}\{P_2^{-1}V, I\}$ 对式(51)做全等变换并由式(45)可知, 当下式成立时, 式(51)一定成立:

$$\begin{bmatrix} r(P_2 - V - V^T) & qV^T + V^T \tilde{A}_c \\ * & -rP_2 \end{bmatrix} < 0. \quad (52)$$

将不确定结构式(9)代入式(52), 由引理2和 Schur 补定理可知, 存在常数 $\lambda > 0$, 使得当式(36)成立时, 则式(52)成立. 故当式(36)成立时, 闭环系统(15)的极点都在圆盘区域 \mathcal{U} 中.

此外, 由式(48)可知式(37)成立, 由式(41)知式(38)成立. 证毕.

推论 1 通过求解如下凸优化问题设计控制增益阵, 并获得有限时间性能的最优值:

$$\min_{\mu, \lambda, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \Omega, \Psi, \hat{S}, \hat{Q}, \hat{R}} \alpha,$$

$$\text{s.t. 式(20)(31)–(36) for given } \eta, \beta, \gamma,$$

即对于给定的常数 η, β, γ , 寻找满足不等式组(20)–(36)的实数 μ, λ 和矩阵 $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \Omega, \Psi, \hat{S}, \hat{Q}, \hat{R}$, 使得 α 值最小.

4 仿真结果(Simulation results)

假设目标卫星轨道周期为14400 s, 则其轨道角速度为 $\omega = 4.3633 \times 10^{-4}$ rad/s 且 $\bar{\delta}_1 = 0.1$; 拦截卫星质量为1000 kg 且 $\bar{\delta}_2 = 0.1$; 拦截卫星相对目标卫星的初始轨道状态为(1600, 1800, 1200, -10, -15, 0); 拦截卫星三轴轨道推力幅值均为500 N, 即 $u_{\max}^2 = 7.5 \times 10^5$ N, 圆盘区域为 $\mathcal{U}(1, 1)$; 矢量 $v(t)$ 的各分量均为均值为0且方差为1的白噪声, 矢量 $w(t)$ 的各分量均为在 $[-1, 1]$ 内变化的能量有限干扰, 噪声系数 D_1 和 D_2 表示干扰的幅值, 分别为

$$D_1 = 0.01 \times \text{diag}\{1, 1, 1, 0.5, 0.5, 0.5\},$$

$$D_2 = \text{diag}\{1, 1, 1, 0.1, 0.1, 0.1\}.$$

给定 $\eta = 10^2$, H_2 性能参数 $\beta = 0.8$, H_∞ 性能参数 $\gamma = 0.8$. 利用 MATLAB 中的 LMI 工具求解推论1, 可得

$$J < \alpha = 2.6466,$$

$$\Omega = 10^5 \times$$

$$\begin{bmatrix} 18.74 & 4.908 & 3.175 & -0.194 & -0.049 & -0.037 \\ 4.852 & 40.01 & 10.62 & -0.037 & -0.338 & -0.060 \\ 3.740 & 10.69 & 17.86 & -0.040 & -0.070 & -0.226 \\ -0.208 & -0.026 & -0.031 & 0.005 & 0.000 & 0.000 \\ -0.047 & -0.343 & -0.071 & 0.001 & 0.006 & 0.001 \\ -0.038 & -0.062 & -0.233 & 0.001 & 0.001 & 0.007 \end{bmatrix},$$

$$\Psi =$$

10²×

$$\begin{bmatrix} -1.053 & 0.146 & 0.150 & -86.59 & -0.099 & 0.273 \\ 1.902 & -0.140 & 1.352 & 0.076 & -86.53 & 0.640 \\ -1.546 & -0.399 & -2.289 & -0.266 & -0.712 & -86.52 \end{bmatrix}$$

则由式(38)计算可得控制增益阵为

$K =$

$$\begin{bmatrix} -0.378 & 0.026 & 0.015 & -33.44 & 0.504 & 0.572 \\ -0.002 & -0.261 & 0.095 & 1.204 & -28.36 & 3.847 \\ 0.025 & 0.088 & -0.386 & 1.510 & 3.309 & -26.31 \end{bmatrix}$$

根据上述设计的状态反馈控制器, 经仿真可得到系统控制结果如图1-5所示. 图1和图2分别为相对位置和相对速度变化图. 从图1-2可知, 相对位置和相对速度均快速收敛, 在550s内分别收敛到10m和0.1 m/s, 800 s时控制精度分别为1 m和0.02 m/s. 图3给出了三轴控制输入的变化, 可见三轴推力均小于幅值500N, 满足控制力输入限幅约束. 图4显示了开环系统和闭环系统的极点位置. 由图4可知, 该开环系统的极点均在零点附近, 而在设计控制器后其闭环系统的极点均在左半复平面, 并处于圆盘区域 $\mathcal{U}(1, 1)$ 中. 图5曲线表示拦截轨道, 可以看出, 拦截卫星在干扰下仍能以近似直线的路径向目标卫星运动, 从而减少被目标卫星发现并逃逸的机率.

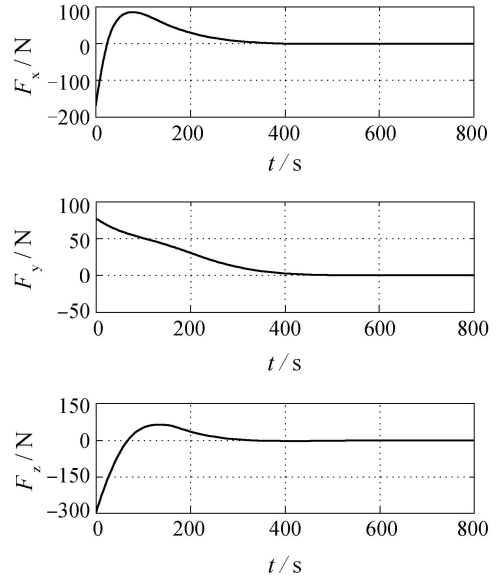


图3 三轴控制输入

Fig. 3 Control input in three axes

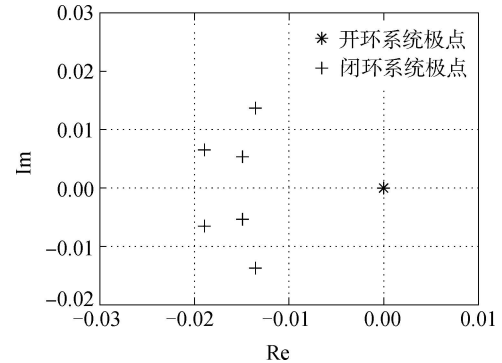


图4 开环系统和闭环系统极点示意图

Fig. 4 Poles of open- and closed-loop systems

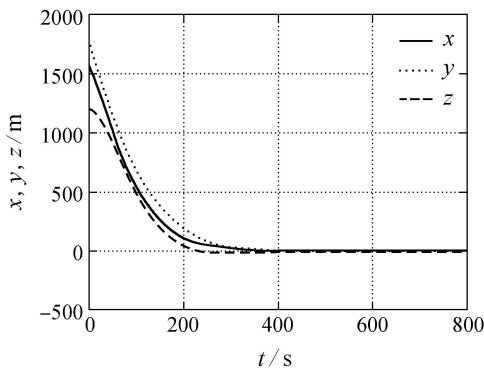


图1 相对位置

Fig. 1 Relative position

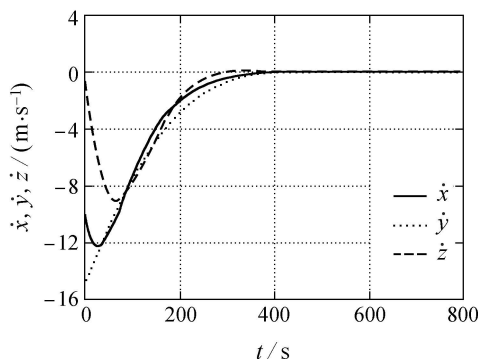


图2 相对速度

Fig. 2 Relative velocity

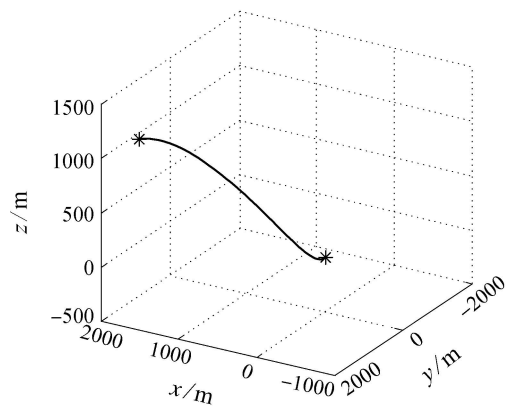


图5 拦截轨道示意图

Fig. 5 Intercepting orbit

由以上仿真结果可知, 所设计的控制器是有效的, 并同时能满足文中提出的各种约束条件.

为进一步验证本文设计的控制器对参数不确定性和干扰的鲁棒性, 在仿真中令目标卫星轨道角速度的不确定度增大为 $\bar{\delta}_2 = 0.5$, 拦截卫星质量的

确定度增大为 $\bar{\delta}_2 = 0.5$, 同时干扰放大5倍, 其他参数不变. 结果表明, 相对位置和速度仍能快速收敛并稳定, 550 s内仍可分别收敛到10 m和0.1 m/s, 800 s时控制精度分别为2 m和0.05 m/s. 由此说明本文设计的控制器是有效的, 并且对不确定性和外界干扰具有较好的鲁棒性.

5 结论(Conclusions)

本文针对拦截卫星的轨道拦截任务, 考虑系统可能存在两种不同类型干扰的情况, 提出了一种基于鲁棒 H_2/H_∞ 的轨道控制器设计方法. 该方法不仅优化了系统状态的有限时间性能还同时考虑了参数不确定性、控制输入限幅和极点区域限制等约束条件. 仿真结果表明, 本文设计的控制器是有效的, 能够使系统快速稳定并满足上述约束, 对外界干扰有一定的抑制作用且对系统不确定性具有较好的鲁棒性. 此外, 本文设计的控制器采用的是状态反馈控制, 其结构简单, 因而便于工程实现.

参考文献(References):

- [1] 周克强, 高晓光, 白奕. 反卫星卫星攻击方式研究 [J]. 飞行力学, 2006, 24(4): 80 – 83.
(ZHOU Keqiang, GAO Xiaoguang, BAI Yi. Research on fighting forms of an anti-satellite satellite [J]. *Flight Dynamics*, 2006, 24(4): 80 – 83.)
- [2] 王景, 刘良栋. 小卫星的鲁棒自适应姿态控制 [J]. 宇航学报, 2003, 24(3): 235 – 239.
(WANG Jing, LIU Liangdong. Robust adaptive attitude control for small satellite [J]. *Journal of Astronautics*, 2003, 24(3): 235 – 239.)
- [3] 肖冰, 胡庆雷, 马广富. 挠性卫星姿态跟踪自适应 L_2 增益控制 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(1): 101 – 107.
(XIAO Bing, HU Qinglei, MA Guangfu. Adaptive L-two-gain control for flexible spacecraft attitude tracking [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(1): 101 – 107.)
- [4] BOSKOVIC J D, LI S M, MEHRA R K. Robust tracking control design for spacecraft under control input saturation [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, 27(4): 627 – 633.
- [5] 董朝阳, 华莹, 陈宇, 等. 空间飞行器大角度机动递阶饱和控制律设计 [J]. 宇航学报, 2006, 27(5): 974 – 978.
(DONG Chaoyang, HUA Ying, CHEN Yu, et al. A cascade-saturation fuzzy variable structure control for spacecraft large angle attitude maneuvers [J]. *Journal of Astronautics*, 2006, 27(5): 974 – 978.)
- [6] IMRAN A, GIANMARCO R, JONGRAE K. Back stepping control design with actuator torque bound for spacecraft attitude maneuver [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2010, 33(1): 254 – 259.
- [7] ANG X, BO Y, LIU Y, et al. Output tracking control for autonomous spacecraft rendezvous [C] // *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*. United States: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2009: 5227 – 5232.
- [8] 沈毅, 刘皓. 基于时滞不确定理论的导弹鲁棒控制系统设计 [J]. 航空学报, 2011, 32(3): 473 – 479.
(SHEN Yi, LIU Hao. Robust control system design for missiles based on theory of time-delay and uncertainty [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2011, 32(3): 473 – 479.)
- [9] SHI P, BOUKAS K. On H_∞ control design for singular continuous-time delay systems with parametric uncertainties [J]. *Journal of Non-linear Dynamics and Systems Theory*, 2004, 4(1): 59 – 71.
- [10] XU S Y, JAMES L, GAO H, et al. Robust H_∞ filtering for uncertain discrete stochastic systems with time delays [J]. *Circuits System Signal Processing*, 2005, 24(6): 753 – 770.
- [11] PASCAL G, PIERRE A. A linear matrix inequality approach to H_∞ control [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1994, 4(4): 421 – 448.
- [12] YANG X, GAO H, SHI P. Robust orbital transfer for low earth orbit spacecraft with small-thrust [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2010, 347(10): 1863 – 1887.
- [13] GAO H, JAMES L, XIE L, et al. New approach to mixed H_2/H_∞ filtering for polytopic discrete-time systems [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(8): 3183 – 3192.
- [14] 俞立. 鲁棒控制: 线性矩阵不等式 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(YU Li. *Robust Control: LMI* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)

作者简介:

邓泓 (1986–), 女, 博士研究生, 目前研究方向为卫星姿轨控系统建模与仿真、空间攻防理论与方法, E-mail: denghong@yeah.net;

孙兆伟 (1963–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为空间飞行器总体设计与系统仿真技术、飞行器动力学与控制技术, E-mail: sunzhaowei@vip.sina.com;

仲惟超 (1985–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为自主轨道确定、修正和保持, E-mail: heropanda@126.com.