

一类带有加速度约束的非线性系统最优滑模控制

董飞垚, 雷虎民, 李海宁, 李 炯

(空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800)

摘要: 针对加速度受约束的非线性时变系统, 设计了一种全局最优滑模控制算法. 首先引入全程滑态因子, 保证滑模面一开始就在零值附近, 然后选取位置跟踪误差绝对值的积分为指标函数, 通过求解该指标函数的最小值来确定滑模面方程的相关参数, 最后设计了基于指数趋近律的滑模控制算法. 仿真结果表明了该方法的有效性和强鲁棒性.

关键词: 加速度约束; 滑模控制; 鲁棒性

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Optimal sliding-mode control for nonlinear systems subject to acceleration constraint

DONG Fei-yao, LEI Hu-min, LI Hai-ning, LI Jiong

(Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan Shaanxi 713800, China)

Abstract: For nonlinear systems subject to acceleration constraint, a global optimal sliding-mode control algorithm is proposed. A global sliding-mode factor is introduced in the sliding surface design, which guarantees the sliding surface to exist in the neighborhood of the origin all the time after beginning. The parameters of the sliding surface are obtained by minimizing the integral of the absolute position tracking error which is taken as the performance criterion. The sliding-mode control algorithm is finally determined by using the exponential reaching law. Simulation results show the effectiveness and robustness of the proposed algorithm.

Key words: acceleration constraint; sliding-mode control; robustness

1 引言(Introduction)

滑模变结构控制以其良好的动态特性和鲁棒性而被广泛应用于非线性控制系统的设计之中^[1-3]. 滑模变结构控制的原理在于, 当系统状态点穿越状态空间的不同区域时, 反馈控制器的结构按着一定规律变化, 由滑模面方程限制系统的动态, 从而使系统对外部干扰和模型参数的不确定性具有强鲁棒性, 且保证系统性能始终满足某个期望指标^[4].

滑模控制系统设计一般分为两步: 一是选择滑模面; 二是设计控制输入. 滑模面的选择在整个控制系统设计中极其关键, 它直接决定了系统的最终控制效果. 滑模面的设计方法有很多种, 如文献[5]采用的矩阵摄动法、文献[6-9]的极点配置法以及文献[10]中介绍的Ackermann公式法等. 但是上述方法在确定滑模面参数时均没有考虑系统状态受约束的状况, 这样就可能导致按照所设计的滑模面, 实际系统不能满足控制要求, 从而达不到最优控制效果, 例如需按照规定弹道飞行的巡航导弹的控制, 机器人控制等. 本文以加速度约束的三阶时变非线性系统

为被控对象, 选取位置跟踪误差绝对值对时间的积分为指标函数, 通过求取该指标函数取得最小值来确定滑模面方程中的相关参数, 采用基于指数趋近律的滑模控制, 保证系统在位置跟踪过程中, 系统加速度始终在约束值以内, 并具有良好的动态特性和强鲁棒性.

2 系统描述(Systems description)

考虑如下非线性时变系统:

$$\dot{z} = F(z) + G(z)u + \phi, \quad (1)$$

式中: $z = [z_1 \ z_2 \ z_3]^T$ 表示系统状态变量, u 表示控制输入, $F(z) = [z_2 \ z_3 \ f(z) + \Delta f]^T$, $G(z) = [0 \ 0 \ g(z)]^T$, $\phi = [0 \ 0 \ d]^T$, 其中: $f(z)$ 和 $g(z)$ 均为关于 z 的非线性函数, 表示标称模型; Δf 和 d 分别表示未知有界的摄动和外界干扰, 满足 $|\Delta f + d| \leq \varsigma$, ς 为大于零的常数.

设 $z_0 = [z_{10} \ z_{20} \ z_{30}]^T$ 表示系统(1)的初始状态, $z_d = [z_{1d} \ z_{2d} \ z_{3d}]^T$ 为其跟踪信号, 且满足 $z_{2d} = \dot{z}_{1d}$, $z_{3d} = \dot{z}_{2d}$, z_{3d} 存在一阶连续导数 \dot{z}_{3d} .

定义系统(1)的跟踪误差如下:

$$e = z - z_d = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T, \quad (2)$$

且系统在初始时刻的误差为 $e_0 = [e_{1.0} \ 0 \ 0]^T$, 其中 $e_{1.0}$ 表示系统的初始位置误差.

3 滑模面及控制算法设计(Sliding surface and control algorithm design)

选择如下滑模面方程:

$$s = \begin{cases} c_\alpha + c_\beta t + e_3 + a_2 e_2 + a_1 e_1, & t \leq t_c, \\ e_3 + a_2 e_2 + a_1 e_1, & t > t_c, \end{cases} \quad (3)$$

式中: $c_\alpha, c_\beta, a_1, a_2$ 为待确定的滑模面方程参数, t 为系统时间, $t_c > 0$ 为待确定的时间阈值, $c_\alpha + c_\beta t_c$ 为全程滑态因子项, 满足 $c_\alpha + c_\beta t_c = 0$ 使得由式(3)所描述的滑模面方程为关于 t 的连续函数.

采用基于趋近律的滑模控制方式^[10], 选取指数趋近律, 且用 $M(s) = s/(|s| + \delta)$ 代替符号函数, 其中 δ 为正常数, 则所选滑模面的期望动态如下所示:

$$\dot{s} = -\gamma_1 M(s) - \gamma_2 s, \quad (4)$$

其中 γ_1, γ_2 为大于零的常数.

对式(3)微分可得

$$\dot{s} = \begin{cases} \dot{z}_3 - \dot{z}_{3d} + a_2 e_3 + a_1 e_2 + c_\beta, & t \leq t_c, \\ \dot{z}_3 - \dot{z}_{3d} + a_2 e_3 + a_1 e_2, & t > t_c. \end{cases} \quad (5)$$

联立式(4)–(5), 可得系统(1)的滑模控制输入为

$$u = [\dot{z}_{3d} - f(z) - a_2 e_3 - a_1 e_2 - c_\beta \rho(t)]/g(z) - [\gamma_1 M(s) + \gamma_2 s]/g(z), \quad (6)$$

式中第1部分为等效控制项, 第2部分为变结构控制项, 当 $t \leq t_c$ 时, $\rho(t) = 1$; 当 $t > t_c$ 时, $\rho(t) = 0$.

根据式(3), 由 $s = 0$ 得:

当 $t = 0$ 时,

$$c_\alpha = -a_1 e_{1.0}; \quad (7)$$

当 $0 < t \leq t_c$ 时,

$$\ddot{e}_1 + a_2 \dot{e}_1 + a_1 e_1 + c_\alpha + c_\beta t = 0; \quad (8)$$

当 $t > t_c$ 时,

$$\ddot{e}_1 + a_2 \dot{e}_1 + a_1 e_1 = 0. \quad (9)$$

为确保系统在滑动模态的稳定性, a_1 和 a_2 必须为大于零的实数. 同时, 为使跟踪误差单调变化并以最快速度收敛于零, 上式所对应的特征方程应有且只有一对相等的实根, 所以 a_1 和 a_2 满足

$$a_2 = 2\sqrt{a_1}. \quad (10)$$

将式(7)(10)代入式(8), 并求解微分方程, 得 $t \leq t_c$ 时系统的跟踪误差, 如下所示:

$$e_1 = -(2c_\beta a_1^{-1.5} + c_\beta t a_1^{-1})e^{-t\sqrt{a_1}} + 2c_\beta a_1^{-1.5} + e_{1.0} - c_\beta t/a_1, \quad (11a)$$

$$e_2 = \dot{e}_1 = c_\beta(1 + \sqrt{a_1}t)e^{-t\sqrt{a_1}}/a_1 - c_\beta/a_1, \quad (11b)$$

$$e_3 = \dot{e}_2 = -c_\beta t e^{-t\sqrt{a_1}}. \quad (11c)$$

接下来考虑 $t > t_c$ 时的情况. 由 $c_\alpha + c_\beta t_c = 0$, 并结合式(7)得

$$t_c = e_{1.0} a_1 / c_\beta. \quad (12)$$

将 $t = t_c$ 分别代入式(11a)–(11c)得 e_{1t_c}, e_{2t_c} 和 e_{3t_c} , 将其作为微分方程(9)中的初值, 求解此微分方程, 得 $t > t_c$ 时系统的跟踪误差, 如下所示:

$$e_1 = [c_\beta(e^k - 1)(t + 2a_1^{-0.5})/a_1 - e_{1.0}e^k]e^{-t\sqrt{a_1}}, \quad (13a)$$

$$e_2 = [c_\beta a_1^{-0.5}(1 - e^k)(1 + a_1^{-0.5}) + e_{1.0}e^k a_1^{0.5}]e^{-t\sqrt{a_1}}, \quad (13b)$$

$$e_3 = [-e_{1.0}e^k a_1 + c_\beta(e^k - 1)t]e^{-t\sqrt{a_1}}, \quad (13c)$$

式中

$$k = t_c \sqrt{a_1}. \quad (14)$$

显然, k 为正实数, 进而可求得

$$a_1 = (kc_\beta/e_{1.0})^{2/3}. \quad (15)$$

选取位置跟踪误差绝对值 $|e_1|$ 的积分作为系统性能指标函数 J , 即 $J = \int |e_1| dt$, 结合式(11)和(13), 得

$$J = 2|e_{1.0}|/\sqrt{a_1} + e_{1.0}^2 a_1 / 2|c_\beta|. \quad (16)$$

通过求取 J 在加速度约束下的最小值, 便可求滑模面方程中的各个参数 $c_\alpha, c_\beta, a_1, a_2$.

为了方便求解, 结合式(12)和(14), 整理式(16)可得

$$J(k, c_\beta) = |e_{1.0}|^{4/3}(2k^{-1/3} + k^{2/3}/2)/|c_\beta|^{1/3}. \quad (17)$$

定理 1 当

$$c_\beta = 2(\gamma_{\max})^{3/2} \text{sgn } e_{1.0} / \sqrt{|e_{1.0}|}, \quad k = 4$$

时, 式(17)所描述的性能指标函数取得最小值.

证 对 e_3 求导得:

当 $t \leq t_c$ 时,

$$\dot{e}_3 = -c_\beta(1 - t\sqrt{a_1})e^{-t\sqrt{a_1}}; \quad (18a)$$

当 $t > t_c$ 时,

$$\dot{e}_3 = [c_\beta(e^k - 1)(1 - t\sqrt{a_1}) - e_{1.0}e^k a_1^{3/2}]e^{-t\sqrt{a_1}}. \quad (18b)$$

由式(18a)可得, 当 $t_{\text{ma}1} = 1/\sqrt{a_1} \leq t_c$ 时, e_3 达到 $t \leq t_c$ 的极值 $e_{3t_{\text{ma}1}}$. 由式(18b)可得, 当

$$t_{\text{ma}2} = 1/\sqrt{a_1} + e_{1.0}e^k a_1 / c_\beta(e^k - 1)$$

时, e_3 达到 $t > t_c$ 的极值 $e_{3t_{ma2}}$, 分别为

$$\begin{aligned} e_{3t_{ma1}} &= -c_\beta / e\sqrt{a_1}, \\ e_{3t_{ma2}} &= e^{-ke^k/e^k-1}(e^k-1)c_\beta / e\sqrt{a_1}. \end{aligned} \quad (19)$$

因为 $k > 0$, 所以 $e^{-ke^k/e^k-1}(e^k-1) < 1$, 故 $|e_{3t_{ma1}}| > |e_{3t_{ma2}}|$ 成立, 即 $|e_{3t_{ma1}}|$ 为系统在 $t_{ma1} \leq t_c$ 时的最大加速度. 假定 γ_{max} 是系统加速度的最大容许值, 则 c_β 应满足

$$|c_\beta| \leq \gamma_{max} e\sqrt{a_1}. \quad (20)$$

将式(15)代入式(20), 整理可得

$$|c_\beta| \leq (\gamma_{max} e k^{1/3} / |e_{1.0}|^{1/3})^{3/2}. \quad (21)$$

当 $t_{ma1} \geq t_c$ 时, 系统的最大加速度在 t_c 时刻, 即

$$e_{3t_c} = -e^{-k} a_1 e_{1.0}. \quad (22)$$

因为 γ_{max} 是系统加速度的最大容许值, 结合上式可得

$$\gamma_{max} \geq e^{-k} a_1 |e_{1.0}|. \quad (23)$$

结合式(15)得

$$|c_\beta| \leq (\gamma_{max} / e^{-k} |e_{1.0}|^{1/3} k^{2/3})^{3/2}. \quad (24)$$

联立式(21)与(24)得

$$|c_\beta| \leq \begin{cases} (\gamma_{max} e k^{1/3} / |e_{1.0}|^{1/3})^{3/2}, & t_{ma1} \leq t_c, \\ (\gamma_{max} / e^{-k} |e_{1.0}|^{1/3} k^{2/3})^{3/2}, & t_{ma1} > t_c. \end{cases} \quad (25)$$

从式(16)可以看出, 随着 $|c_\beta|$ 的增加, J 递减, 故取式(25)中 $|c_\beta|$ 的上界代入式(16), 又因为 $t_{ma1} \leq t_c$ 与 $k > 1$ 等价, 所以有:

当 $k \leq 1$ 时,

$$J(k) = |e_{1.0}|^{3/2} \gamma_{max}^{-1/2} (2e^{-k/2} + ke^{-k/2}/2); \quad (26)$$

当 $k > 1$ 时,

$$J(k) = |e_{1.0}|^{3/2} (\gamma_{max} e)^{-1/2} (2k^{-1/2} + k^{1/2}/2). \quad (27)$$

对上式两边分别对 k 求导并分析可得, 当 $k = k_{a,opt} = 4$, $J(k)$ 取得最小值. 由于 $k_{a,opt} = 4 > 1$, 结合式(21)得

$$c_{\beta a,opt} = 2(\gamma_{max})^{3/2} \text{sgn } e_{1.0} / \sqrt{|e_{1.0}|}, \quad (28)$$

因此, $k_{a,opt}$ 和 $c_{\beta a,opt}$ 即为加速度约束下指标函数 J 取得最小值时的解. 证毕.

4 数值仿真(Simulation)

现有如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = (-3x_3 - 3x_2x_1 - x_1^2)(1 + 0.5 \sin(6\pi t)) + u + d, \\ y = x_1, \end{cases}$$

其中: x_1, x_2, x_3 为系统状态变量, y 为系统输出, u 为控制输入, $0.5 \sin(6\pi t)$ 为模型扰动, d 为外在干扰, 参考指令输入为 $y_c = \sin t$.

为了验证控制算法对系统最大加速度的适应能力, 分下面两种情形进行仿真:

- 情形1 $e_{1.0} = 0.5, e_{2.0} = e_{3.0} = 0, \gamma_{max} = 2$;
 - 情形2 $e_{1.0} = -0.5, e_{2.0} = e_{3.0} = 0, \gamma_{max} = 4$.
4. 仿真结果如图1-6所示.

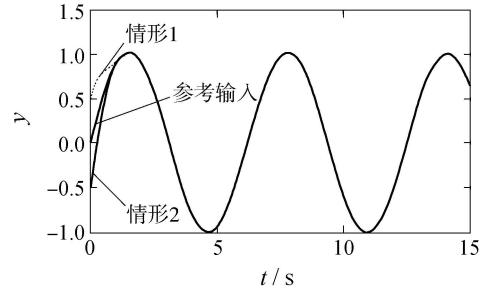


图1 位置跟踪曲线

Fig. 1 Tracking curve of position

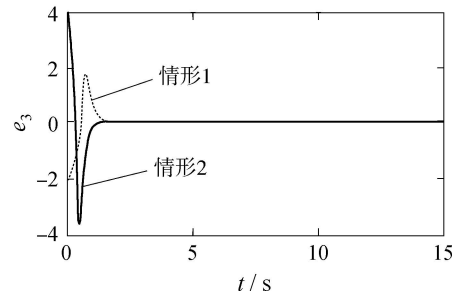


图2 误差 e_3 变化曲线

Fig. 2 Curve of error e_3

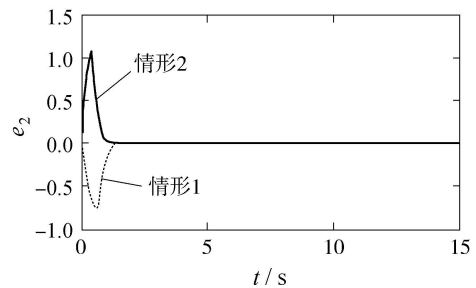


图3 误差 e_2 变化曲线

Fig. 3 Curve of error e_2

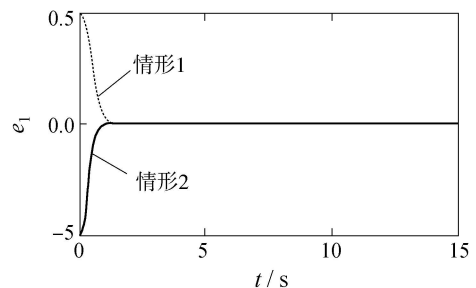
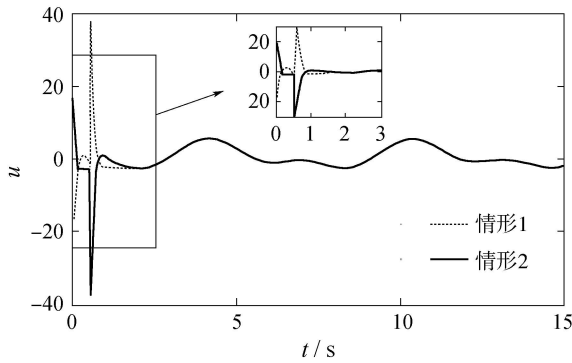
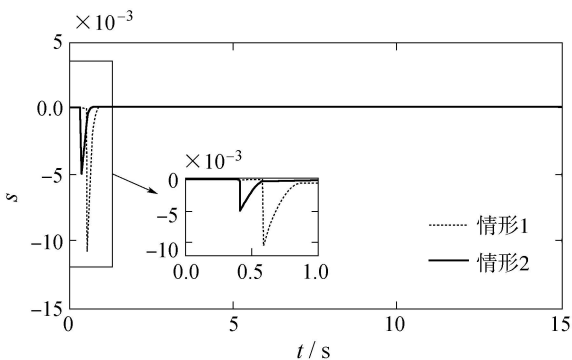


图4 误差 e_1 变化曲线

Fig. 4 Curve of error e_1

图5 控制量 u 变化曲线Fig. 5 Curve of control input u 图6 滑模面 s 变化曲线Fig. 6 Curve of sliding surface s

由图1-5看出,当存在初始误差、模型摄动和外干扰时,本文所设计的控制算法能快速有效的跟踪参考输入,同时保证在整个跟踪过程中, $|e_3|$ 始终小于 γ_{\max} 且性能指标函数 J 最小. 从图6的滑模面变化曲线可以看出,由于引入了全程滑态因子,使得滑模面一开始就保持在零值附近,从而改善了趋近阶段滑模控制的鲁棒性.

5 结论(Conclusions)

本文提出了一种带有加速度约束的非线性系统全局最优滑模控制方法,由于引入了全程滑态因子,所以改善了在趋近阶段滑模控制的鲁棒性,同时选择滑模面参数时考虑了系统实际加速度的约束和使得指标函数取得最小值,从而保证了所设计的控制算法使系统能在自身加速度允许范围内快速有效地跟踪参考指令. 由于本文只考虑了三阶系统加速度约束下的滑模控制问题,针对带有速度约束和更高阶次系统的滑模控制问题,将是以后研究的方向.

参考文献(References):

- [1] 朱齐丹,王瞳. 一种离散时间系统变结构控制新方法[J]. 控制与决策, 2009, 24(8): 1209 - 1213.
(ZHU Qidan, WANG Tong. New variable structure control scheme for discrete-time systems [J]. *Control and Decision*, 2009, 24(8): 1209 - 1213.)
- [2] 李鹏,郑志强. 非线性积分滑模控制方法[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(3): 421 - 426.
(LI Peng, ZHENG Zhiqiang. Sliding mode control approach with nonlinear integrator [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(3): 421 - 426.)
- [3] 曾宪法,王洁瑶,王小虎,等. 基于SMDO的滑模控制器设计及其再导弹上的应用[J]. 航空学报, 2011, 32(5): 873 - 880.
(ZENG Xianfa, WANG Jieyao, WANG Xiaohu, et al. Design of sliding-mode controller based on SMDO and its application to missile control [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2011, 32(5): 873 - 880.)
- [4] UTKIN V. Variable structure system with sliding-modes [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, 22(2): 212 - 222.
- [5] SEETHARAMA B M, SASI B D, POWLY A A, et al. Variable structure controller design with application to missile tracking [J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2001, 24(4): 859 - 862.
- [6] EDWARDS C. A practical method for the design of sliding-mode controllers using linear matrix inequalities [J]. *Automatica*, 2004, 22(3): 1 - 9.
- [7] BARTOSZEWICZ A, NOWACKA A. An optimal switching plane design for the third order system subject to state constraints [C] // *Proceeding of the 2006 International Workshop on Variable Structure System*. New York: IEEE, 2006: 86 - 91.
- [8] TOKAT S, EKSIN I, GHIZELKAYA M, et al. Design of a sliding-mode controller with a nonlinear time-varying sliding surface [J]. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2003, 25(2): 145 - 162.
- [9] CHOI S B, PARK D W. Moving sliding surfaces for fast tracking control of second-order dynamic systems [J]. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1994, 116(1): 154 - 158.
- [10] LIU J K. *Matlab Simulation for Sliding-mode Control* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005.

作者简介:

董飞垚 (1985-), 男, 博士研究生, 目前研究方向为非线性控制及其在航空航天中的应用, E-mail: dongfeiyao.live@yahoo.com.cn;

雷虎民 (1960-), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为飞行器制导与控制技术, E-mail: lhmleinet@21cn.com;

李海宁 (1988-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为飞行器制导与控制技术, E-mail: lhn_0403@163.com;

李炯 (1979-), 男, 讲师, 主要研究方向为飞行器制导与控制技术, E-mail: graceful001@126.com.