

# 一类非线性系统的误差轨迹跟踪鲁棒学习控制算法

严求真<sup>1,2</sup>, 孙明轩<sup>1†</sup>

(1. 浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310023;

2. 浙江水利水电专科学校 计算机与信息工程系, 浙江 杭州 310018)

**摘要:** 针对一类含非参数不确定性的非线性系统, 提出一种鲁棒迭代学习控制算法, 该算法放宽了常规迭代学习控制方法的初始定位条件, 迭代初值可任意取值. 基于类Lyapunov方法设计误差轨迹跟踪控制器, 通过鲁棒限幅学习机制对不确定性进行估计和补偿, 能够在整个作业区间上实现误差对给定期望误差轨迹的精确跟踪, 期望误差轨迹根据迭代起始时刻的误差值设置. 利用期望误差轨迹的衰减性状, 可使系统误差在预设的时间点后收敛于原点的邻域内, 邻域半径的大小可根据需要任意设置. 理论分析和仿真结果表明了控制方法的有效性.

**关键词:** 迭代学习控制; 鲁棒控制; 初值问题; 类Lyapunov方法

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Error trajectory tracking by robust learning control for nonlinear systems

YAN Qiu-zhen<sup>1,2</sup>, SUN Ming-xuan<sup>1†</sup>

(1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310023, China;

2. Department of Computer Science and Information Engineering, Zhejiang Water Conservancy and Hydropower College, Hangzhou Zhejiang 310018, China)

**Abstract:** For a class of nonlinear systems with non-parametric uncertainties, we present a robust iterative learning control algorithm, in which the iterative initial value can be arbitrary, relaxing the initial conditions required in conventional methods. The learning controller is designed based on the Lyapunov-like synthesis, compensating uncertainties by robust limited-magnitude learning mechanism, and the error can follow its desired trajectory accurately in the entire time interval. The desired error trajectory with attenuation traits is predetermined by the initial error value at the beginning of the iteration. The error converges to the neighborhood of the origin after the predetermined time, and the radius of the neighborhood can be as small as required. The effectiveness of the proposed method is proven by theoretical analysis and verification results.

**Key words:** iterative learning control; robust control; initial condition problem; Lyapunov-like approach

### 1 引言(Introduction)

迭代学习控制技术适用于有限区间上的重复作业对象, 它通过迭代不断修正控制输入, 可使每次迭代中重复出现的确定性干扰得到完全补偿, 在整个作业区间上实现系统输出对期望轨迹的零误差跟踪<sup>[1]</sup>. 自迭代学习控制提出以来, 已在各种实际场合得到广泛应用, 例如机器人、硬盘驱动器和电力电子线路等. 因其具有在有限时间区间上实现完全跟踪这一诱人的控制性能, 迭代学习控制吸引了越来越多人们的关注.

类Lyapunov迭代学习控制(Lyapunov-like iterative learning control, LL-ILC)综合方法是迭代学习控制领域近年来的研究热点之一, 早期的研究结果

见文[2–5]. 文[2]研究多关节刚性机械臂的自适应控制和重复控制算法, 在重复控制律中使用了完全限幅机制. 文[3]考虑重复作业系统, 利用Hilbert-Schmidt核函数构造学习律. 文[4]讨论不确定机器人系统的迭代学习控制问题, 为其设计非自适应学习控制器与自适应学习控制器, 并给出时变参数的估计方案. 文[5]针对一类级联系统, 构造积分形式的类Lyapunov函数, 利用backstepping方法设计学习控制器. 文[6]对文[4]的工作做了进一步的改进. 文[7]以定常参数不确定系统为研究对象, 借鉴自适应控制的设计方法, 采用微分学习律估计未知参数.

多数情况下采用自适应控制技术, 是为了处理系统中的常参数不确定性. 在设计模型参考自适应控

制系统时,选取的类Lyapunov函数常为

$$V(\mathbf{e}, \boldsymbol{\phi}) = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\phi}, \quad (1)$$

其中:  $\mathbf{e}$ 为跟踪误差,  $\boldsymbol{\phi}$ 为参数估计偏差,  $\mathbf{P}$ 为适当维数的对称正定矩阵<sup>[8-9]</sup>. 在分析和设计定常参数系统时, LL-ILC与自适应控制可采用相同的类Lyapunov函数<sup>[7]</sup>. 若系统中含有时变(特别是快时变)参数, 可以采用重复控制<sup>[2-3, 10]</sup>或迭代学习控制<sup>[4-6, 11]</sup>方法对该参数进行估计和补偿. 相关文献常采用如式(2)<sup>[4]</sup>与式(3)<sup>[5]</sup>形式的类Lyapunov函数设计学习控制器, 但也可采用式(4)(5)所示的类Lyapunov函数: 文[2]采用式(4)设计重复控制器, 式(5)是文[9]中选取的类Lyapunov函数, 用于分析和设计迭代学习控制系统.

$$V^j(t) = \int_0^t [\tilde{\mathbf{U}}_j^T(\tau) \mathbf{L}^{-1} \tilde{\mathbf{U}}_j(\tau) + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_j^T(\tau) \mathbf{S} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_j(\tau)] d\tau, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$V_{i,j}(t) = \int_0^t \frac{1}{\beta} [\mathbf{K}_i^{-1} \boldsymbol{\mu}_{i,j}(t) - \boldsymbol{\Delta}_{i,j}]^T [\mathbf{K}_i^{-1} \boldsymbol{\mu}_{i,j}(t) - \boldsymbol{\Delta}_{i,j}] d\tau, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$V(t, \bar{\mathbf{e}}) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{e}} + \frac{1}{2} \int_{t-T}^t \tilde{\mathbf{w}}_r^T(\tau) \mathbf{K}_L^{-1} \tilde{\mathbf{w}}_r(\tau) d\tau, \quad (4)$$

$$E_i(t) = V(\mathbf{e}_i(t)) + \frac{1}{2\beta_v} \int_0^t \text{tr}[\boldsymbol{\Psi}_i - \boldsymbol{\Theta}]^T \cdot [\boldsymbol{\Psi}_i - \boldsymbol{\Theta}] d\tau, \quad t \in [0, T]. \quad (5)$$

常规的迭代学习控制算法以系统初值与期望初值完全一致为前提. 在实际应用场合, 受重复定位精度的限制, 迭代初值和期望初值常常不一致. 因此, 深入研究适用于初值非一致情形的LL-ILC算法, 是一项有意义的工作. 文[12]在文[3]的基础上, 提出一种自适应学习控制算法, 将参考输入进行傅立叶级数展开, 设计微分学习律对傅立叶系数进行估计. 文[13]研究相对阶不定系统的迭代学习控制问题, 通过部分状态反馈线性化导出控制律, 该控制律可使存在初值问题的闭环系统收敛. 文[14]基于迭代模糊方法补偿不确定性, 使得误差向量各元素的加权和收敛于时变边界层内, 权值为Hurwitz多项式的系数. 文[15]分析迭代学习控制系统在5种初始条件下的收敛情况. 文[16]借助初始修正吸引子, 使不确定时变系统在预先指定的区间上实现零误差跟踪. 文[17]研究重复学习方案, 以回避迭代学习控制系统的初值问题. 文[18]提出误差轨迹跟踪方法, 设计控制器使误差跟踪预先设定的期望误差.

为非参数不确定系统设计学习控制器时, 鲁棒方法常与学习方法结合使用, 以估计和补偿不确定性. 文[19]讨论NGLC(局部李普希茨连续)系统的迭代学习控制方法, 在设计鲁棒学习控制器时, 学习律中采用半饱和限幅机制. 文[20]为同时包含了结构和非结构不确定性的机器人系统设计自适应学习控

制器, 将不确定性分解成可重复性和非重复性两部分, 应用学习策略估计后者的界. 文[21]考虑非参数系统的周期信号跟踪问题, 给出的重复控制算法不含限幅措施, 可实现跟踪误差收敛于零, 并保证闭环系统所有信号有界. 文[22]研究一类含参数不确定性和干扰的多输入双线性系统, 利用并行分布补偿机制设计模糊鲁棒 $H_\infty$ 控制器. 文[23]讨论非参数化不确定性系统的跟踪问题, 给出适用于有限区间重复作业对象的鲁棒迭代学习算法, 以及适用于在无限区间上周期作业对象的重复控制算法.

本文研究一类非线性不确定系统的误差轨迹跟踪问题, 利用类Lyapunov方法设计误差轨迹跟踪鲁棒学习控制器, 通过鲁棒限幅学习机制对不确定性进行估计和补偿, 实现误差对期望误差轨迹的全程精确跟踪, 并保证闭环系统所有变量有界. 借助合适的期望误差轨迹, 可使系统误差在某预设时间点后收敛于原点的邻域内, 邻域半径的大小可根据需要设置, 得到一种有限时间迭代学习控制效果, 本文将在仿真算例中使用该法设计学习控制器.

## 2 问题的提出与准备(Problem formulation)

考虑有限时间区间 $[0, T]$ 上的不确定非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,k} = x_{i+1,k}, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_{n,k} = f(\mathbf{x}_k) + b(\mathbf{x}_k)u_k, \end{cases} \quad (6)$$

式中:  $k (= 0, 1, 2, \dots)$ 为重复作业次数,  $\mathbf{x}_k = [x_{1,k} \ x_{2,k} \ \dots \ x_{n,k}]^T \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量,  $u_k \in \mathbb{R}$ 为控制输入,  $f(\mathbf{x}_k)$ 未知.  $b(\mathbf{x}_k)$ 为光滑的未知函数.

参考信号为

$$\mathbf{x}_d = [x_d \ \dot{x}_d \ \ddot{x}_d \ \dots \ x_d^{(n-1)}]^T,$$

$x_d^{(n)}$ 存在. 系统初值与参考信号在起始时刻的取值不等, 即 $\mathbf{x}_k(0) \neq \mathbf{x}_d(0)$ , 不满足常规迭代学习控制所要求的初值相等条件. 定义误差

$$\mathbf{e}_k = [e_{1,k} \ e_{2,k} \ \dots \ e_{n,k}]^T = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_d,$$

由式(6)可得误差动态:

$$\begin{cases} \dot{e}_{i,k} = x_{i+1,k} - \dot{x}_d, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{e}_{n,k} = f(\mathbf{e}_k + \mathbf{x}_d) + b(\mathbf{e}_k + \mathbf{x}_d)u_k - x_d^{(n)}, \end{cases} \quad (7)$$

式(7)中的 $f(\mathbf{e}_k + \mathbf{x}_d)$ 即为 $f(\mathbf{x}_k)$ ,  $b(\mathbf{e}_k + \mathbf{x}_d)$ 即为 $b(\mathbf{x}_k)$ , 这是因为 $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_d$ .

**假设 1** 迭代初值 $\mathbf{x}_k(0) \in [\mathbf{x}^0 - \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{x}^0 + \boldsymbol{\epsilon}]$ ,  $\forall k$ ,  $\mathbf{x}^0$ 与 $\boldsymbol{\epsilon}$ 是与 $k$ 和 $t$ 无关的常向量.

本文的控制任务是, 设计控制器 $u_k$ , 使误差信号 $\mathbf{e}_k$ 能够在作业区间 $[0, T]$ 上精确跟踪期望误差轨迹 $\mathbf{e}_k^*$ , 并保证所有闭环信号有界.  $\mathbf{e}_k^*$ 中各元素呈衰减性状, 并满足 $\mathbf{e}_k^*(0) = \mathbf{e}_k(0)$ . 记产生期望误差轨

迹 $\mathbf{e}_k^*$ 的有界期望控制为 $u_k^*(t)$ ,它满足

$$\begin{cases} \dot{e}_{i,k}^* = e_{i+1,k}^*, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{e}_{n,k}^* = f(\mathbf{e}_k^* + \mathbf{x}_d) + b(\mathbf{e}_k^* + \mathbf{x}_d)u_k^* - x_d^{(n)}. \end{cases} \quad (8)$$

不难看出,存在一期望控制 $u_d(t) \in \Omega$  ( $\Omega$ 为 $u_k^*(t)$ 的集合),由它产生的期望误差轨迹在起始时刻的值为 $\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}_d(0)$ .由于 $u_k^*(t)$ 与 $u_d(t)$ 均为有界量,故存在有界量 $v(t)$ ,满足

$$|\tilde{u}_k^*(t)| \leq v(t), \quad (9)$$

其中 $\tilde{u}_k^*(t) = u_k^*(t) - u_d(t)$ .因控制器设计需要,对函数 $b(\cdot)$ ,  $f(\cdot)$ 做如下假设:

**假设2** 存在已知连续函数 $b_{\min}(\mathbf{x}_k)$ ,满足 $0 < \underline{b} < b_{\min}(\mathbf{x}_k) \leq b(\mathbf{x}_k)$ ,  $\underline{b}$ 为一常数,其值不需已知.

**假设3** 非线性函数 $f(\mathbf{x}_k)$ 满足

$$|f(\mathbf{x}_k)| \leq \rho_f(\mathbf{x}_k), \quad (10)$$

式中 $\rho_f(\mathbf{x}_k)$ 是已知的连续函数.

**假设4**  $f(\cdot)$ 与 $b(\cdot)$ 满足下述条件:

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{e}_k^* + \mathbf{x}_d) - f(\mathbf{e}_k + \mathbf{x}_d)| &\leq \\ \|\mathbf{e}_k^* - \mathbf{e}_k\| h_1(\mathbf{e}_k^* + \mathbf{x}_d, \mathbf{e}_k + \mathbf{x}_d), &\quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{e}_k^* + \mathbf{x}_d) - b(\mathbf{e}_k + \mathbf{x}_d)| &\leq \\ \|\mathbf{e}_k^* - \mathbf{e}_k\| h_2(\mathbf{e}_k^* + \mathbf{x}_d, \mathbf{e}_k + \mathbf{x}_d), &\quad (12) \end{aligned}$$

其中 $h_1(\cdot, \cdot)$ 和 $h_2(\cdot, \cdot)$ 为非负连续函数.

**假设5**  $\left\| \frac{\partial b(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right\| < +\infty$ .

### 3 控制器设计(Controller design)

定义 $\mathbf{z}_k = [z_{1,k} \ z_{2,k} \ \dots \ z_{n,k}]^T = \mathbf{e}_k^* - \mathbf{e}_k$ ,

$$\begin{aligned} s_k(t) = c_0 \int_0^t z_{1,k}(\tau) d\tau + c_1 z_{1,k}(t) + \dots + \\ c_{n-1} z_{n-1,k}(t) + z_{n,k}(t). \end{aligned}$$

因为 $\mathbf{e}_k^*(0) = \mathbf{e}_k(0)$ ,所以 $s_k(0) = 0$ .选取合适的正实数 $c_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ),使得

$$p(s) = s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_2s^2 + c_1s + c_0$$

为Hurwitz多项式.为叙述方便,文中函数的时间变量 $t$ 常被略去,分别记 $b(\mathbf{e}_k^* + \mathbf{x}_d)$ ,  $f(\mathbf{e}_k^* + \mathbf{x}_d)$ 为 $b_k^*$ ,  $f_k^*$ .

由 $s_k$ 的定义可得

$$\begin{aligned} \dot{s}_k = \\ c_0 z_{1,k} + c_1 z_{2,k} + \dots + c_{n-1} z_{n,k} + \dot{e}_{n,k}^* - \dot{e}_{n,k} = \\ \sum_{i=1}^n c_{i-1} z_{i,k} + \dot{e}_{n,k}^* - f(\mathbf{x}_k) + b(\mathbf{x}_k)u_k - x_d^{(n)}. \end{aligned} \quad (13)$$

定义类Lyapunov函数 $V_k = (1/2)s_k^2$ ,并将之对时间求导,

$$\dot{V}_k = s_k \left[ \sum_{i=1}^n c_{i-1} z_{i,k} + \dot{e}_{n,k}^* - f(\mathbf{x}_k) - b(\mathbf{x}_k)u_k + x_d^{(n)} \right]. \quad (14)$$

依据以上推导,选取控制律为

$$u_k = u_{d,k} + u_{r,k} + \hat{v}_k \text{sat}\left(\frac{s_k}{\varepsilon_2}\right), \quad (15)$$

$$u_{d,k} = \text{sat}_{\bar{u}_d}(u_{d,k-1}) + \gamma s_k, u_{d,-1} = 0, \quad (16)$$

$$u_{r,k} = \frac{1}{b_{\min}(\mathbf{x}_k)} \text{sat}\left(\frac{s_k}{\varepsilon_1}\right) (\beta_k + \rho_f(\mathbf{x}_k)), \quad (17)$$

$$\hat{v}_k = \text{sat}_{\bar{v}}(v_k^*), v_k^* = \text{sat}_{\bar{v}}(v_{k-1}^*) + \rho |s_k|, v_{-1}^* = 0, \quad (18)$$

式中:  $\beta_k = \left| \sum_{i=1}^n c_{i-1} z_{i,k} + \dot{e}_{n,k}^* + x_d^{(n)} \right|$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ ,  $\text{sat}(\cdot)$ 定义为

$$\text{sat}_{\bar{\vartheta}}(\vartheta) = \begin{cases} \vartheta, & |\vartheta| < \bar{\vartheta}, \\ \bar{\vartheta} \text{sgn} \vartheta, & \text{其他}. \end{cases}$$

式中:当 $\bar{\vartheta}$ 为1时可省略不写,即记 $\text{sat}_1(\cdot)$ 为 $\text{sat}(\cdot)$ ,  $\bar{u}_d$ 与 $\bar{v}$ 为相应变量的限幅值.

### 4 收敛性分析(Analysis of convergence)

系统(6)的收敛性和稳定性结果总结如下:

**定理1** 在假设1-5下,由系统(6)和控制律(15)组成的闭环系统能够实现误差信号 $\mathbf{e}_k$ 在作业区间 $[0, T]$ 上精确跟踪期望误差轨迹 $\mathbf{e}_k^*$ ,并保证闭环系统所有信号有界.

**证** i) 变量有界性.将控制律(15)代入式(14),当 $|s_k| \geq \varepsilon_1$ 时,有

$$\begin{aligned} \dot{V}_k \leq \\ |s_k|(\beta_k + |f(\mathbf{x}_k)|) - s_k b(\mathbf{x}_k) \text{sat}_{\bar{u}_d}(u_{d,k-1}) - \\ \gamma b(\mathbf{x}_k) s_k^2 - s_k b(\mathbf{x}_k) \hat{v}_k \text{sat}\left(\frac{s_k}{\varepsilon_2}\right) - s_k b(\mathbf{x}_k) u_{r,k} \leq \\ |s_k|(\beta_k + |f(\mathbf{x}_k)|) + |s_k| b(\mathbf{x}_k) \bar{u}_d - \gamma b(\mathbf{x}_k) s_k^2 - \\ |s_k| b(\mathbf{x}_k) \hat{v}_k - \frac{b(\mathbf{x}_k) |s_k|}{b_{\min}(\mathbf{x}_k)} (\beta_k + \rho_f(\mathbf{x}_k)) \leq \\ |s_k| b(\mathbf{x}_k) \bar{u}_d - \gamma b(\mathbf{x}_k) s_k^2. \end{aligned} \quad (19)$$

当 $|s_k| \geq \bar{u}_d/\gamma$ 时,  $|s_k| b(\mathbf{x}_k) \bar{u}_d - \gamma b(\mathbf{x}_k) s_k^2 \leq 0$ .由此可见,当 $|s_k| \geq \max(\varepsilon_1, \bar{u}_d/\gamma)$ 时,  $\dot{V}_k \leq 0$ ,故 $s_k$ 有界.由式(16)-(18),分别可以推出 $u_{d,k}$ ,  $u_{r,k}$ 和 $\hat{v}_k$ 的有界性,再由式(15)可得 $u_k$ 的有界性.由Hurwitz多项式的性质及 $s_k$ 的定义可知 $\int_0^t z_{1,k}(\tau) d\tau$ ,  $z_{1,k}$ ,  $\dots$ ,  $z_{n,k}$ 均有界,进而可知 $\mathbf{e}_k$ ,  $\mathbf{x}_k$ 中的各元素均有界.根据连续函数的性质知假设中的 $\rho_f(\mathbf{x}_k)$ ,  $h_1(\cdot, \cdot)$ 与 $h_2(\cdot, \cdot)$ 均有界.于是可知 $\dot{x}_{n,k}$ 有界,又利用假设5可知 $|\dot{b}(\mathbf{x}_k(t))| < +\infty$  ( $t \in [0, T]$ ).

ii) 误差收敛性.选取第 $k$ 次迭代时的类Lyapunov函数

$$\begin{aligned} L_k(t) = \frac{1}{2} e^{-\lambda t} b^{-1}(\mathbf{x}_k) s_k^2(t) + \frac{1}{2\gamma} \int_0^t e^{-\lambda \tau} \bar{u}_{d,k}^2(\tau) d\tau + \\ \frac{1}{2\rho} \int_0^t e^{-\lambda \tau} \bar{v}_k^2(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (20)$$

式中:  $\tilde{u}_{d,k} = u_{d,k} - u_d$ ,  $\tilde{v}_k = v - \hat{v}_k$ ,  $\lambda > 0$ . 对于  $k > 0$ , 有

$$\begin{aligned} L_k(t) - L_{k-1}(t) = & \\ & \frac{1}{2}e^{-\lambda t}b^{-1}(\mathbf{x}_k)s_k^2(t) - \frac{1}{2}e^{-\lambda t}b^{-1}(\mathbf{x}_{k-1})s_{k-1}^2(t) + \\ & \frac{1}{2\gamma} \int_0^t e^{-\lambda\tau} [\tilde{u}_{d,k}^2(\tau) - \tilde{u}_{d,k-1}^2(\tau)]d\tau + \\ & \frac{1}{2\rho} \int_0^t e^{-\lambda\tau} [\tilde{v}_k^2(\tau) - \tilde{v}_{k-1}^2(\tau)]d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

结合式(8)-(9)(13),

$$b^{-1}(\mathbf{x}_k)\dot{s}_k = g_k - u_k + u_d + \tilde{u}_k^*, \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} g_k = b^{-1}(\mathbf{x}_k) & \left[ \sum_{i=1}^n c_{i-1}z_{i,k} + \dot{e}_{n,k}^* - f(\mathbf{x}_k) + x_d^{(n)} \right] - \\ & (b_k^*)^{-1}[\dot{e}_{n,k}^* - f_k^* + x_d^{(n)}]. \end{aligned} \quad (23)$$

利用式(22)可得

$$\begin{aligned} (e^{-\lambda t}b^{-1}(\mathbf{x}_k)s_k^2)' = & \\ -\lambda e^{-\lambda t}b^{-1}(\mathbf{x}_k)s_k^2 & - e^{-\lambda t}b^{-2}(\mathbf{x}_k)\dot{b}(\mathbf{x}_k)s_k^2 + \\ 2e^{-\lambda t}s_k(g_k - u_k + u_d + \tilde{u}_k^*), & \end{aligned} \quad (24)$$

于是

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^t (e^{-\lambda\tau}b^{-1}(\mathbf{x}_k(\tau))s_k^2(\tau))'d\tau = \\ F_k(t) + \int_0^t e^{-\lambda\tau}s_k(\tau)(u_d(\tau) - u_{d,k}(\tau))d\tau + \\ & \int_0^t e^{-\lambda\tau}s_k(\tau)(g_k(\tau) - u_{r,k}(\tau))d\tau + \\ & \int_0^t e^{-\lambda\tau}s_k(\tau)[\tilde{u}_k^*(\tau) - \hat{v}_k(\tau)\text{sat}(\frac{s_k}{\varepsilon_2})]d\tau, \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} F_k(t) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\lambda\tau}s_k^2(\tau) & [-\lambda b^{-1}(\mathbf{x}_k(\tau)) - \\ & b^{-2}(\mathbf{x}_k(\tau))\dot{b}(\mathbf{x}_k(\tau))]d\tau. \end{aligned} \quad (26)$$

根据积分中值定理, 存在  $\zeta \in [0, t]$ , 使得

$$\begin{aligned} F_k(t) = \frac{1}{2}[-\lambda b^{-1}(\mathbf{x}_k(\zeta)) - b^{-2}(\mathbf{x}_k(\zeta))\dot{b}(\mathbf{x}_k(\zeta))] \cdot \\ \int_0^t e^{-\lambda\tau}s_k^2(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (27)$$

利用  $(a-b)^2 - (a-c)^2 = -2(b-c)(a-b) - (b-c)^2$ , 结合式(18), 当  $|s_k| \geq \varepsilon_2$  时,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\rho}(v - \hat{v}_k)^2 - \frac{1}{2\rho}(v - \hat{v}_{k-1})^2 + \\ & s_k\tilde{u}_k^* - s_k\hat{v}_k\text{sat}(\frac{s_k}{\varepsilon_2}) \leq \\ & -\frac{1}{\rho}(\hat{v}_k - \hat{v}_{k-1})(v - \hat{v}_k) + |s_k|(v - \hat{v}_k) = \\ & \frac{1}{\rho}(v - \hat{v}_k)(-\hat{v}_k + \hat{v}_{k-1} + \rho|s_k|) = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\rho}[v - \text{sat}_{\bar{v}}(v_k^*)][v_k^* - \text{sat}_{\bar{v}}(v_k^*)] \leq 0. \quad (28)$$

利用式(16), 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\gamma}[(u_{d,k} - u_d)^2 - (u_{d,k-1} - u_d)^2] + \\ & s_k(u_d - u_{d,k}) \leq \\ & \frac{1}{2\gamma}[(u_{d,k} - u_d)^2 - (\text{sat}_{\bar{u}_d}(u_{d,k-1}) - u_d)^2] + \\ & s_k(u_d - u_{d,k}) = \\ & \frac{1}{2\gamma}(\gamma s_k)(-2u_d + u_{d,k} + \text{sat}_{\bar{u}_d}(u_{d,k-1})) + \\ & s_k(u_d - u_{d,k}) \leq \\ & \frac{1}{2}s_k(-2u_d + u_{d,k} + \text{sat}_{\bar{u}_d}(u_{d,k-1}) + \gamma s_k) + \\ & s_k(u_d - u_{d,k}) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

结合式(21)(25)(28)和(29), 得

$$\begin{aligned} L_k(t) - L_{k-1}(t) \leq & \\ F_k(t) - \frac{1}{2}e^{-\lambda t}b^{-1}(\mathbf{x}_{k-1})s_{k-1}^2(t) + & \\ \int_0^t e^{-\lambda\tau}s_k(\tau)(g_k(\tau) - u_{r,k}(\tau))d\tau. & \end{aligned} \quad (30)$$

当  $|s_k| < \varepsilon_1$  时,

$$s_k u_{r,k} = \frac{s_k^2(\beta_k + \rho_f(\mathbf{x}_k))}{b_{\min}(\mathbf{x}_k)\varepsilon_1} \geq 0,$$

当  $|s_k| \geq \varepsilon_1$  时,

$$s_k u_{r,k} = \frac{|s_k|(\beta_k + \rho_f(\mathbf{x}_k))}{b_{\min}(\mathbf{x}_k)} \geq 0,$$

于是,

$$\begin{aligned} L_k(t) - L_{k-1}(t) \leq F_k(t) - \frac{1}{2}e^{-\lambda t}b^{-1}(\mathbf{x}_{k-1})s_{k-1}^2(t) + \\ \int_0^t e^{-\lambda\tau}s_k(\tau)g_k(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (31)$$

记  $\bar{c} = \max(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ , 根据柯西不等式,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n c_{i-1}z_{i,k} \leq \\ & (c_0^2 + c_1^2 + \dots + c_{n-1}^2)^{\frac{1}{2}}(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & n^{\frac{1}{2}}\bar{c}\|\mathbf{z}_k\|. \end{aligned} \quad (32)$$

综合式(23)与式(32), 并利用假设4, 可以推出

$$\begin{aligned} |g_k| = |b^{-1}(\mathbf{x}_k) & \left[ \sum_{i=1}^n c_{i-1}z_{i,k} + \dot{e}_{n,k}^* - f(\mathbf{x}_k) + x_d^{(n)} \right] - \\ & (b_k^*)^{-1}[\dot{e}_{n,k}^* - f_k^* + x_d^{(n)}] \leq \\ & b^{-1}(\mathbf{x}_k)n^{\frac{1}{2}}\bar{c}\|\mathbf{z}_k\| + b^{-1}(\mathbf{x}_k)|f_k^* - f(\mathbf{x}_k)| + \\ & |b_k^* - b(\mathbf{x}_k)| \cdot |[b(\mathbf{x}_k)b_k^*]^{-1}(\dot{e}_{n,k}^* + x_d^{(n)} - f_k^*)| \leq \\ & b^{-1}(\mathbf{x}_k)n^{\frac{1}{2}}\bar{c}\|\mathbf{z}_k\| + b^{-1}(\mathbf{x}_k)\|\mathbf{z}_k\| \cdot h_1(\mathbf{e}_k^* + \\ & \mathbf{x}_d, \mathbf{e}_k + \mathbf{x}_d) + \|\mathbf{z}_k\|h_2(\mathbf{e}_k^* + \mathbf{x}_d, \mathbf{e}_k + \mathbf{x}_d) \cdot \\ & |[b(\mathbf{x}_k)b_k^*]^{-1}(\dot{e}_{n,k}^* + x_d^{(n)} - f_k^*)|. \end{aligned}$$

显然,存在常数 $\varpi > 0$ ,满足

$$\begin{aligned} \varpi \geq & b^{-1}(\mathbf{x}_k)n^{\frac{1}{2}}\bar{c} + b^{-1}(\mathbf{x}_k) \cdot h_1(\mathbf{e}_k^* + \\ & \mathbf{x}_d, \mathbf{e}_k + \mathbf{x}_d) + h_2(\mathbf{e}_k^* + \mathbf{x}_d, \mathbf{e}_k + \mathbf{x}_d) \cdot \\ & |[b(\mathbf{x}_k)b_k^*]^{-1}(\dot{\mathbf{e}}_{n,k}^* + \mathbf{x}_d^{(n)} - \mathbf{f}_k^*)|, \end{aligned}$$

即 $|g_k| \leq \varpi \|\mathbf{z}_k\|$ ,从而

$$\|s_k\| |g_k| \leq \varpi \|s_k\| \|\mathbf{z}_k\|. \quad (33)$$

由式(13)容易得到

$$\dot{\mathbf{z}}_k = \mathbf{A}\mathbf{z}_k + \mathbf{B}\dot{s}_k, \quad (34)$$

式中:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

从而

$$\mathbf{z}_k(t) = \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{z}_k(\tau) d\tau + \mathbf{B}s_k(t), \quad (35)$$

上式两边取范数

$$\|\mathbf{z}_k(t)\| \leq \int_0^t \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{z}_k(\tau)\| d\tau + |s_k(t)|. \quad (36)$$

由Bellman-Gronwall引理可得

$$\|\mathbf{z}_k(t)\| \leq \|\mathbf{A}\| e^{T\|\mathbf{A}\|} \int_0^t |s_k(\tau)| d\tau + |s_k(t)|. \quad (37)$$

根据柯西-许瓦茨不等式有

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-\lambda\tau} |s_k(\tau)| \left[ \int_0^\tau |s_k(\nu)| d\nu \right] d\tau \leq \\ & \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\lambda\tau} |s_k(\tau)| \left[ \int_0^\tau e^{-\frac{1}{2}\lambda\nu} |s_k(\nu)| d\nu \right] d\tau \leq \\ & \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\lambda\tau} |s_k(\tau)| \left[ \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\lambda\nu} |s_k(\nu)| d\nu \right] d\tau \leq \\ & \int_0^t e^{-\lambda\tau} |s_k(\tau)|^2 d\tau. \end{aligned} \quad (38)$$

由以上两式,可得

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-\lambda\tau} \|\mathbf{z}_k(\tau)\| |s_k(\tau)| d\tau \leq \\ & \int_0^t e^{-\lambda\tau} (1 + T\|\mathbf{A}\| e^{T\|\mathbf{A}\|}) |s_k(\tau)|^2 d\tau. \end{aligned} \quad (39)$$

结合式(27)(31)(33)与式(39),有

$$\begin{aligned} L_k(t) - L_{k-1}(t) \leq & -\frac{1}{2} e^{-\lambda t} b^{-1}(\mathbf{x}_{k-1}) s_{k-1}^2(t) + \frac{1}{2} [-\lambda b^{-1}(\mathbf{x}_k(\zeta)) - \\ & b^{-2}(\mathbf{x}_k(\zeta)) \dot{b}(\mathbf{x}_k(\zeta))] \int_0^t e^{-\lambda\tau} s_k^2(\tau) d\tau + \\ & \varpi(1 + T\|\mathbf{A}\| e^{T\|\mathbf{A}\|}) \int_0^t e^{-\lambda\tau} s_k^2(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (40)$$

选择足够大的 $\lambda$ ,可使

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [-\lambda b^{-1}(\mathbf{x}_k(\zeta)) - b^{-2}(\mathbf{x}_k(\zeta)) \dot{b}(\mathbf{x}_k(\zeta))] + \\ & \varpi(1 + T\|\mathbf{A}\| e^{T\|\mathbf{A}\|}) \leq 0, \end{aligned} \quad (41)$$

从而

$$L_k(t) - L_{k-1}(t) \leq -\frac{1}{2} e^{-\lambda t} b^{-1}(\mathbf{x}_{k-1}) s_{k-1}^2(t). \quad (42)$$

由连续函数的性质可知,当 $t \in [0, T]$ ,  $b(\mathbf{x}_k) < +\infty$ ,  $\forall k$ . 因此,存在 $b_m(t)$ ,满足 $b(\mathbf{x}_k(t)) \leq b_m(t) < +\infty$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $\forall k$ . 取式(42)中的 $k = 1, 2, \dots, N$ , 并求和,有

$$\begin{aligned} L_N(t) \leq & L_0(t) - \frac{1}{2} e^{-\lambda t} \sum_{j=1}^N b^{-1}(\mathbf{x}_{j-1}) s_{j-1}^2(t) \leq \\ & L_0(t) - \frac{1}{2} e^{-\lambda t} b_m^{-1}(t) \sum_{j=1}^N s_{j-1}^2(t). \end{aligned} \quad (43)$$

将i)的结果应用于式(20),易得 $L_0(t)$ 的有界性. 由式(28)可知,式(43)的成立以 $|s_k| \geq \varepsilon_2$ 为前提. 多次迭代后,必有 $|s_k| < \varepsilon_2$ . 事实上,当 $N > 2L_0 b_m e^{\lambda t} / \varepsilon_2^2$ 时,如果仍有 $|s_k| \geq \varepsilon_2$ ,那么 $L_N(t) < 0$ ,这与 $L_N(t)$ 的非负性相矛盾.

由式(37)可得

$$\|\mathbf{z}_k(t)\| \leq (t\|\mathbf{A}\| e^{T\|\mathbf{A}\|} + 1)\varepsilon_2. \quad (44)$$

故可通过选择适当的 $\varepsilon_2$ ,使得 $\mathbf{z}_k(t)$ 收敛于原点的邻域内,其半径值可根据需要任意设置. 证毕.

本文在设计控制律时,采用了边界层设计方案,利用鲁棒方法与限幅机制获得系统的有界性,限制 $|s_k|$ 于 $[0, \varepsilon_1]$ 区域;并借助迭代学习方法,使得 $|s_k|$ 被吸引到 $[0, \varepsilon_2]$ 区域. 文中的限幅机制包括半饱和与全饱和和两种限幅机制.

## 5 仿真算例(Numerical simulation)

考虑如下二阶非线性不确定系统<sup>[24]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,k} = x_{2,k}, \\ \dot{x}_{2,k} = \frac{g \sin x_{1,k} - \frac{m l \cos^2 x_{2,k} \sin x_{1,k}}{m_c + m}}{l \left( \frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_{1,k}}{m_c + m} \right)} + \frac{\frac{\cos x_{1,k}}{m_c + m}}{l \left( \frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_{1,k}}{m_c + m} \right)} u_k, \end{cases} \quad (45)$$

这里: $x_{1,k}$ 和 $x_{2,k}$ 分别是倒立摆的角位移与角速度,  $x_{1,k}(0) = 0.6 + 0.1(\alpha - 0.5)$  ( $\alpha$ 为0与1之间的随机数),  $x_{2,k}(0) = 0$ ,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 为重力加速度,  $m_c$ 是小车的质量,  $m$ 为摆的质量,  $l$ 为摆长的一半,  $u_k$ 为小车的推力. 此处取 $m_c = 1 \text{ kg}$ ,  $m = 0.1 \text{ kg}$ ,  $l = 0.5 \text{ m}$ . 参考信号是 $[-0.2 + \cos(\pi t) \sin(\pi t)]^T$ .  $[x_{1,k}(0) \ x_{2,k}(0)]^T \neq [0.8 \ 0]^T$ . 考虑到实际系统存在多种不确定性和扰动,设各参数与标称值存在 $\pm 40\%$ 的偏差,取 $b_{\min}(\mathbf{x}_k) = |\cos x_{1,k}| / (1.44 + 0.23 \cos^2 x_{1,k})$ ,满足假设2. 同时,应用拉格朗日中值定理,可以检验系统满足假设4. 假设1, 3, 5显然满足. 下面本文选取

误差轨迹: 当  $0 \leq t \leq \delta$ ,

$$e_{1,k}^*(t) = e_{1,k}(0) \left( \frac{10(\delta-t)^3}{\delta^3} - \frac{15(\delta-t)^4}{\delta^4} + \frac{6(\delta-t)^5}{\delta^5} \right),$$

$$e_{2,k}^*(t) = e_{1,k}(0) \left( \frac{-30(\delta-t)^2}{\delta^3} + \frac{60(\delta-t)^3}{\delta^4} - \frac{30(\delta-t)^4}{\delta^5} \right).$$

当  $\delta < t \leq T$ ,  $e_{1,k}^*(t) = 0$ ,  $e_{2,k}^*(t) = 0$ . 采用鲁棒迭代学习控制律(15)进行仿真. 本仿真中,  $\gamma = 30$ ,  $\bar{u}_d = 50$ ,  $\varepsilon_1 = 0.5$ ,  $\varepsilon_2 = 0.0002$ ,  $\rho = 1$ ,  $\bar{v} = 20$ ,  $T = 2$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = 2$ ,  $\rho_f(\mathbf{x}_k) = (10|x_{1,k}| + l + 2)^2/l$ . 迭代200次后, 仿真结果如图1-9所示, 图8-9中

$$J_{1,k} = \lg \max_{t \in [0, T]} |z_{1,k}(t)|, \quad J_{2,k} = \lg \max_{t \in [0, T]} |z_{2,k}(t)|.$$

仿真结果表明, 在误差初值非零的情况下, 误差曲线能够精确跟踪期望误差轨迹. 由图1-4可见,  $\mathbf{x}_k$  在  $[0.2, 2]$  上对  $\mathbf{x}_d$  几乎完全跟踪. 本例表明, 在进行学习系统设计时, 一些输出跟踪问题可以利用误差轨迹跟踪方法加以解决.

本仿真中, 选取期望误差轨迹时, 置  $x_{2,k}(0) = 0$ . 这意味着受控对象在每次迭代开始时处于静止状态, 即起始速度为零. 对于起始速度非零情形, 也可设计出相应的期望误差轨迹.

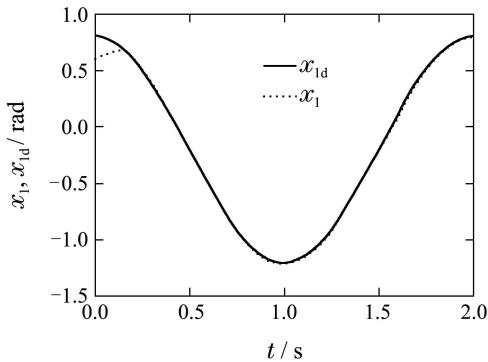


图1  $x_1$ 及其参考轨迹 $x_{1d}$

Fig. 1  $x_1$  and its reference trajectory  $x_{1d}$

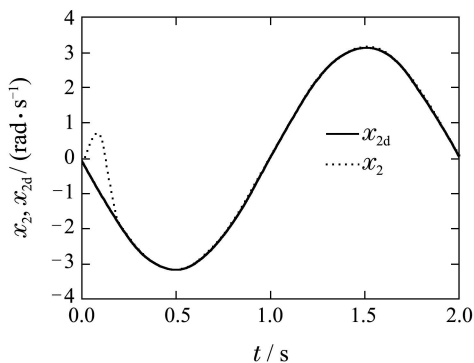


图2  $x_2$ 及其参考轨迹 $x_{2d}$

Fig. 2  $x_2$  and its reference trajectory  $x_{2d}$

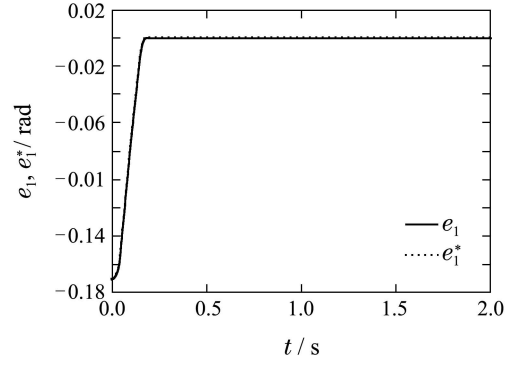


图3  $e_1$ 及其期望 $e_1^*$

Fig. 3 The error  $e_1$  and its desired  $e_1^*$

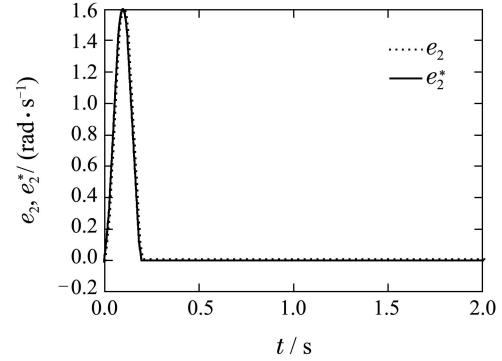


图4  $e_2$ 及其期望 $e_2^*$

Fig. 4  $e_2$  and its desired  $e_2^*$

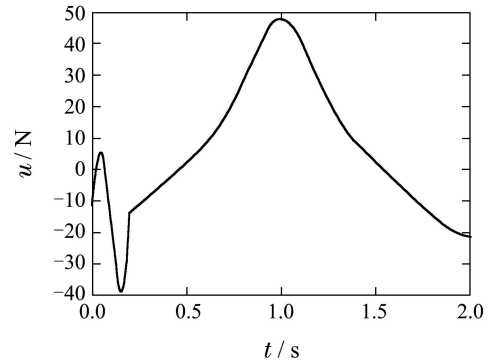


图5 控制输入

Fig. 5 Control input

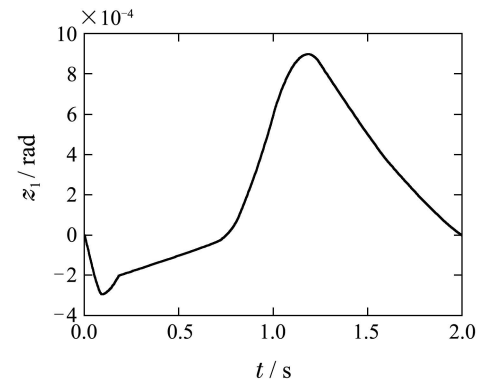


图6 位移误差与期望误差轨迹的差

Fig. 6 The difference between the position error and its desired trajectory

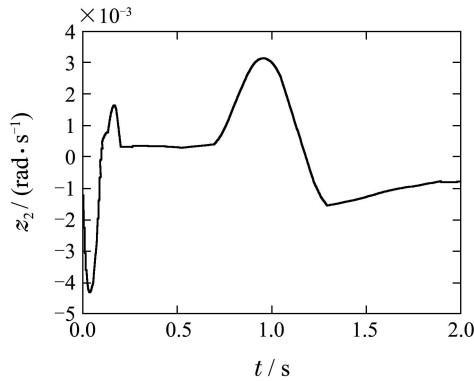
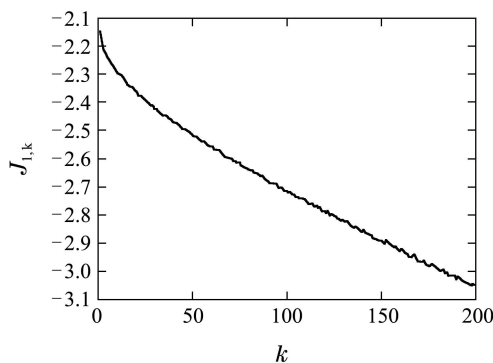
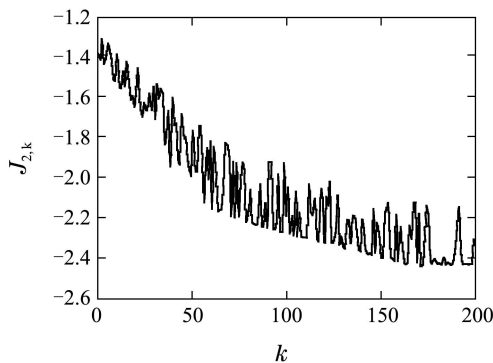


图 7 速度误差与期望误差轨迹的差

Fig. 7 The difference between the velocity error and its desired trajectory

图 8  $z_1$  随迭代次数的变化Fig. 8 The variable  $z_1$  with respect to iterations图 9  $z_2$  随迭代次数的变化Fig. 9 The variable  $z_2$  with respect to iterations

## 6 结论(Conclusions)

为放宽常规迭代学习控制方法所要求的初始定位条件, 针对迭代初值任意取值的一类非参数化不确定系统, 本文给出一种基于误差轨迹跟踪的鲁棒学习控制算法. 理论分析表明, 该算法可实现误差在整个作业区间上精确跟踪期望误差轨迹, 并保证闭环系统中所有信号有界. 仿真结果验证了该算法的有效性.

## 参考文献(References):

[1] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robotics by learning [J]. *Journal of Robotic Systems*, 1984, 12(2): 123 – 140.

- [2] SADEGH N, HOROWITZ R, KAO W W, et al. A unified approach to the design of adaptive and repetitive controllers for robotic manipulators [J]. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1990, 112(4): 618 – 629.
- [3] MESSNER W, HOROWITZ R, KAO W W, et al. A new adaptive learning rule [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, 36(2): 188 – 197.
- [4] KUC T Y, LEE J S. An adaptive learning control of uncertain robotic systems [C] // *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*. Brighton, England: IEEE, 1991, 12: 1206 – 1211.
- [5] HAM C, QU Z. A new learning control based on the Lyapunov direct method [C] // *Southcon '94 Conference Record*. Orlando: IEEE, 1994: 121 – 125.
- [6] PARK B H, KUC T Y, LEE J S. Adaptive learning control of uncertain robotic systems [J]. *International Journal of Control*, 1996, 65(5): 725 – 744.
- [7] FRENCH M, ROGERS E. Nonlinear iterative learning by an adaptive Lyapunov technique [J]. *International Journal of Control*, 2000, 73(10): 840 – 850.
- [8] NARENDRA K S, ANNASWAMY A M. *Stable Adaptive Systems* [M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1989.
- [9] IOANNOU P A, SUN J. *Robust Adaptive Control* [M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [10] DIXON W E, ZERGEROGLU E, DAWSON D M, et al. Repetitive learning control: a Lyapunov-based approach [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2002, 32(4): 538 – 544.
- [11] XU J X, TAN Y. A composite energy function-based learning control approach for nonlinear systems with time-varying parametric uncertainties [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(11): 1940 – 1945.
- [12] VECCHIO D D, MARINO R, TOMEI P. An adaptive learning control for feedback linearizable systems [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Arlington, VA: IEEE, 2001, 4: 2817 – 2821.
- [13] MARINO R, TOMEI P. An iterative learning control for a class of partially feedback linearizable systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(8): 1991 – 1996.
- [14] CHIEN C J. Fuzzy system-based adaptive iterative learning control for nonlinear plants with initial state errors [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2004, 12(5): 724 – 732.
- [15] XU J X, RUI Y. On initial conditions in iterative learning control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(9): 1349 – 1354.
- [16] 孙明轩. 有限时间迭代学习控制 [J]. *系统科学与数学*, 2010, 30(6): 733 – 741.  
(SUN Mingxuan. Finite-time iterative learning control [J]. *Journal of System Science and Mathematical Science Chinese Series*, 2010, 30(6): 733 – 741.)
- [17] 孙明轩, 王郅维, 陈彭年. 有限区间非线性系统的重复学习控制 [J]. *中国科学: 信息科学*, 2010, 40(3): 433 – 444.  
(SUN Mingxuan, WANG Danwei, CHEN Pengnian. Repetitive learning control of nonlinear systems over finite intervals [J]. *China science: Information Science*, 2010, 40(3): 433 – 444.)
- [18] 孙明轩, 严求真. 迭代学习控制系统的误差跟踪设计方法 [J]. *自动化学报*, 2013, 39(已录用).  
(SUN Mingxuan, YAN Qiuzhen. Design studies for error tracking of iterative learning control systems [J]. *Acta Automatica Sinical*, 2013, 39, in press.)
- [19] JING X, XU J X. Memory-based nonlinear internal model: What can a control system learn [C] // *Proceedings of the 4th Asian Control Conference*. Singapore: ACPA, 2002: 446 – 451.

- [20] 杨胜跃, 罗安, 樊晓平. 不确定性机器人系统自适应鲁棒迭代学习控制 [J]. 控制理论与应用, 2003, 20(5): 707 – 712.  
(YANG Shengyue, LUO An, FAN Xiaoping. Adaptive robust iterative learning control for uncertain robotic systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(5): 707 – 712.)
- [21] 陈彭年, 秦化淑. 不确定非线性系统的周期信号自适应跟踪 [J]. 系统科学与数学, 2009, 29(10): 1343 – 1352.  
(CHEN Pengnian, QIN Huashu. Adaptive tracking control of periodic signals for a class of uncertain nonlinear systems [J]. *Journal of System Science and Mathematical Science Chinese Series*, 2009, 29(10): 1343 – 1352.)
- [22] 李俊民, 张果, 杜彩. 一类不确定多输入模糊双线性系统的鲁棒 $H_\infty$ 控制 [J]. 控制理论与应用, 2009, 26(11): 1298 – 1302.  
(LI Junmin, ZHANG Guo, DU Cai. Robust H-infinity control for a class of multiple input fuzzy bilinear system with uncertainties [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(11): 1298 – 1302.)
- [23] 刘利, 孙明轩. 不确定时变系统的鲁棒学习控制算法 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(3): 323 – 328.  
(LIU Li, SUN Mingxuan. Robust learning control algorithms for uncertain time-varying systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(3): 323 – 328.)
- [24] WANG L X. *Adaptive Fuzzy Systems and Control* [M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1994.

#### 作者简介:

**严求真** (1972–), 男, 博士研究生, 讲师, 目前研究方向为迭代学习控制, E-mail: zjyqz@126.com;

**孙明轩** (1961–), 男, 教授, 博士生导师, 研究领域为学习控制理论与应用, E-mail: mxsun@zjut.edu.cn.