

## 传感器网络一致性分布式滤波算法

王长城, 戚国庆, 李银伢, 盛安冬

(南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094)

**摘要:** 为了改善分布式传感器网络的估计性能, 提出了一种基于状态预测一致的滤波算法. 在对局部估计值进行一致化处理的基础上, 重点研究了利用邻居节点前一时刻的估计值对当前局部状态预测值进行修正来提高估计精度. 给出了一种一致性增益的选择方法, 利用李雅普诺夫方法得到了算法收敛的充分条件, 并讨论了影响算法收敛速度的因素. 仿真结果表明了算法的有效性, 并发现节点度较大的传感器在网络估计中发挥着重要作用, 可通过调整这类节点的一致性系数来改善算法性能.

**关键词:** 一致性算法; 卡尔曼滤波; 传感器网络; 分布式估计

**中图分类号:** TP13      **文献标识码:** A

## Consensus-based distributed filtering algorithm in sensor networks

WANG Chang-cheng, QI Guo-qing, LI Yin-ya, SHENG An-dong

(School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China)

**Abstract:** To improve the estimation performances in distributed sensor networks, we propose a filtering algorithm based on state prediction consensus. On the basis of the consistent treatment of the local estimate, it updates the local predicted value by using the previous estimates of neighbors to improve the estimation accuracy. We propose a method for choosing the consensus gain, and present, by using the Lyapunov method, a sufficient condition for the convergence of the algorithm. Factors which may affect the convergence rate are discussed. A numerical example is given to illustrate the usefulness of the proposed algorithm. Nodes with high degrees play an important role in the filtering. By adjusting consensus coefficients of these nodes, we can improve estimation performances.

**Key words:** consensus algorithm; Kalman filtering; sensor network; distributed estimation

### 1 引言(Introduction)

传感器网络的分布式状态估计, 可广泛用于目标跟踪、工业设备监控、环境监测以及危险区域搜救等领域, 受到越来越多学者的关注, 成为当前研究的热点领域之一<sup>[1-3]</sup>. 在分布式状态估计机制中, 网络中的每个节点只能与其邻居节点进行通讯, 通过局部的信息传递和融合获得被观测状态量的更高精度估计.

一致性算法是解决传感器网络分布式融合问题的一个有效工具. 2004年, Olfati-Saber和Murray<sup>[4]</sup>针对无向图和平衡图从控制理论的角度建立了解决一致性问题的理论框架. 近年来, 学者们从不同的角度对网络系统的一致性进行了广泛的研究, 包含了群集控制<sup>[5]</sup>、多车辆系统队形控制<sup>[6]</sup>、无人机协作跟踪<sup>[7]</sup>、分散调度<sup>[8]</sup>等. 2005年, Spanos等<sup>[9]</sup>首先将一致性算法用于解决分布式估计问题, 使网络中的每个节点都能够跟踪所有节点观测量的平均值, 即“动态平均一致性”. 随后Olfati-Saber等<sup>[10-12]</sup>利

用线性代数、频域分析和李雅普诺夫方法比较系统地研究了一致性分布式估计问题. 2009年Olfati-Saber<sup>[12]</sup>研究了最小均方估计误差意义下的卡尔曼一致性滤波算法, 为解决该算法中协方差更新不适用于分布式计算的问题, 该文给出了一种次优算法, 并对其收敛性进行了分析. 在此基础上Stankovic等研究了网络拓扑切换下的分布式估计问题<sup>[13]</sup>, 算法通讯量小于文献[12]所给出的算法, 但估计误差较大, 且很难根据收敛条件选取算法中的参量. 2010年王帅等<sup>[14]</sup>研究了有观测数据随机丢失时的分布式滤波算法, 发现可通过控制起“领导”作用的传感器的丢包率来减小丢包对整个网络系统的影响. 2011年, 针对 $H_\infty$ 指标约束问题, Ugrinovskii设计了一种分布式鲁棒滤波算法<sup>[15]</sup>, 用线性矩阵不等式的形式给出了该算法收敛的充分条件.

本文提出了一种基于状态预测一致的分布式滤波算法. 首先利用李雅普诺夫稳定性理论给出了算法收敛的充分条件, 并讨论了一致性系数的取值对

估计结果的影响,最后通过数值仿真与相关文献的研究结果进行了比较.

### 2 问题描述(Problem statement)

在本文中,采用图  $G = (V, E)$  来表示传感器之间的通信网络,在本文中均假设图  $G$  无向连通,其中:  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  为节点集,每个节点对应网络中的一个传感器;  $E$  为边集,  $(j, i) \in E$  表示节点  $i, j$  可进行通讯.  $A_d \triangleq [a_{ij}]$  为邻接矩阵,定义为  $a_{ii} = 0, i = 1, 2, \dots, n$ ; 对于  $i \neq j$ , 若  $(j, i) \in E$ , 则  $a_{ij} = 1$ , 反之  $a_{ij} = 0$ . 节点  $i$  的邻居集定义为  $N_i \triangleq \{j \in V, a_{ij} \neq 0\}$ .  $L \triangleq D - A_d$  为图  $G$  的Laplacian矩阵,其中:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix},$$

$d_i \triangleq \sum_j a_{ij}$  为节点  $i$  的度. 若图  $G$  无向连通, 则其Laplacian矩阵半正定, 特征值集合按升序排列为  $0 = \lambda_1(L) < \lambda_2(L) \leq \dots \leq \lambda_n(L)$ , 第2小特征值  $\lambda_2(L)$  称作图的代数连通度.

假设利用一个包含  $n$  个传感器的网络对某一目标进行状态估计, 目标的动态方程和传感器观测模型如下所示(为方便书写, 在本文中省略时间下标, 用 “+” 表示更新):

$$x^+ = Ax + Bw, \tag{1}$$

$$y_i = H_i x + v_i, \tag{2}$$

其中:  $x \in \mathbb{R}^m$  为状态向量,  $y_i \in \mathbb{R}^r$  为传感器  $i$  的观测向量,  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  为状态转移矩阵,  $B$  为适维噪声输入矩阵,  $H_i \in \mathbb{R}^{r \times m}$  为传感器  $i$  的观测矩阵,  $w$  为过程噪声,  $w \sim N(0, Q), v_i \in \mathbb{R}^r$  为观测噪声,  $v_i \sim N(0, R_i)$ ; 且假设过程噪声与观测噪声是相互独立的零均值高斯白噪声序列.

在本文中, 均假设以下条件成立:

- 1) 系统状态转移矩阵  $A$  可逆;
- 2)  $(A, Q^{1/2})$  可控,  $(A, H_i)$  可观.

### 3 基于一致性的分布式滤波算法 (Consensus-based distributed filtering algorithm)

对于单一传感器(或具有融合中心的传感器网络)的线性高斯系统, 经典的卡尔曼滤波器给出了最优估计, 将卡尔曼滤波算法与一致性算法相结合, 通过节点之间的信息交换, 可以将局部信息扩展到全局. 本文在文献[12](算法b)的基础上提出一种改进的分布式滤波算法(算法a). 算法改进前后的对比如图1所示.

文献[12]中各节点仅根据邻居节点前一时刻的预测值对当前节点的局部估计项进行修正, 而在本文中不仅对估计值进行一致化处理, 并且利用邻居节点前一时刻的估计值对局部预测值进行修正. 在计算复杂性方面: 文献[12]中各节点在每个更新周期内需要与每个邻居节点进行一次数据交换, 包括加权观测值、信息矩阵和前一时刻的预测值; 而本文中的算法需要额外交换前一时刻的估计值, 并增加了局部预测的一致化处理.

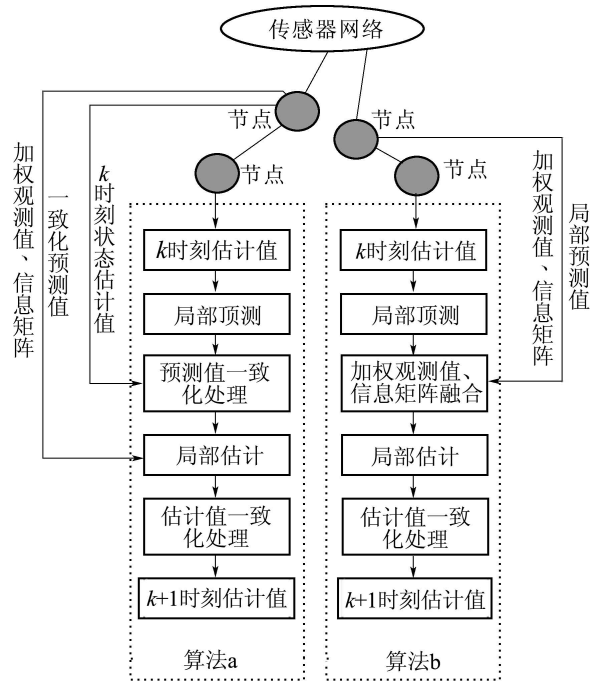


图1 改进前后算法流程比较

Fig. 1 Comparing the algorithm before and after the improvement

定义  $\hat{x}_i$  为节点  $i$  的状态估计值,  $\bar{x}_i$  为状态预测值, 估计误差与预测误差分别为  $\eta_i \triangleq \hat{x}_i - x, \bar{\eta}_i \triangleq \bar{x}_i - x$ .  $M_i$  与  $P_i$  为增益矩阵,  $K_i$  为滤波增益,  $C_i$  为估计项一致性增益,  $U_i$  为预测项一致性增益, 网络中单个节点的具体算法如下:

$$\hat{x}_i = \bar{x}_i + K_i(y_i - H_i \bar{x}_i) + C_i \sum_{j \in N_i} (\bar{x}_j - \bar{x}_i), \tag{3}$$

$$K_i = P_i H_i^T (R_i + H_i P_i H_i^T)^{-1}, \tag{4}$$

$$M_i = F_i P_i F_i^T + K_i R_i K_i^T, \tag{5}$$

$$P_i^+ = A M_i A^T + B Q B^T, \tag{6}$$

$$\bar{x}_i^+ = A(\hat{x}_i + U_i \sum_{j \in N_i} (\hat{x}_j - \hat{x}_i)), \tag{7}$$

其中  $F_i \triangleq I - K_i H_i$ .

与经典的卡尔曼滤波算法相比较, 该算法中的关键步骤是式(3)(7), 即利用邻居节点的信息修正当前节点的局部预测值和估计值. 对于式(1)–(2)所描述的系统, 若满足文中假设条件(2), 则可以保

证  $M_i$  与  $P_i$  计算过程的收敛性. 由于耦合了邻居节点的信息,  $M_i$  与  $P_i$  在意义上已不同于经典卡尔曼滤波器中的估计误差协方差、预测误差协方差. 从式(3)(7)中可以看出, 若一致性增益选取不当, 如  $C_i = 0, U_i = 0$ , 将导致估计失去一致性, 且不恰当的一致性增益还可能使估计结果发散. 因此, 该算法的关键在于如何确定  $C_i$  与  $U_i$  的取值. 下面将给出一种增益的选择方法与算法收敛的充分条件.

定义  $z_i \triangleq H_i^T R_i^{-1} y_i$  为加权观测值,  $S_i \triangleq H_i^T R_i^{-1} H_i$  为信息矩阵, 并选取一致性增益

$$C_i = \alpha F_i G_i (A A^T)^{-1}, \quad (8)$$

$$U_i = \beta A^{-1} G_i (A^T)^{-1}, \quad (9)$$

其中:  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  为一致性系数,  $G_i \triangleq A M_i A^T + B Q B^T + P_i S_i P_i$ , 则式(3)–(7)可写成如下形式:

$$\hat{x}_i = \bar{x}_i + M_i (z_i - S_i \bar{x}_i) + C_i \sum_{j \in N_i} (\bar{x}_j - \bar{x}_i), \quad (10)$$

$$M_i = (P_i^{-1} + S_i)^{-1}, \quad (11)$$

$$C_i = \alpha F_i G_i (A A^T)^{-1}, \quad (12)$$

$$U_i = \beta A^{-1} G_i (A^T)^{-1}, \quad (13)$$

$$P_i^+ = A M_i A^T + B Q B^T, \quad (14)$$

$$\bar{x}_i^+ = A (\hat{x}_i + U_i \sum_{j \in N_i} (\hat{x}_j - \hat{x}_i)). \quad (15)$$

**引理 1**<sup>[12]</sup> 对于离散卡尔曼滤波器, 若定义  $F_i \triangleq I - K_i H_i, S_i \triangleq H_i^T R_i^{-1} H_i, G_i \triangleq A M_i A^T + B Q B^T + P_i S_i P_i$ , 则如下等式成立:

$$F_i = M_i P_i^{-1}, \quad (16)$$

$$M_i^+ = F_i G_i F_i^T. \quad (17)$$

若进一步假设信息矩阵  $S_i > 0$ , 则

$$A^T F_i^T (M_i^+)^{-1} F_i A < M_i^{-1}. \quad (18)$$

**定理 1** 考虑由  $n$  个传感器构成的无向网络  $G$  和式(1)–(2)所描述的线性系统, 对于式(10)–(15)所描述的一致性分布式滤波算法, 假设信息矩阵  $S_i > 0$ , 若网络连通且一致性系数  $\alpha > 0, \beta > 0$  满足如下条件:

$$\lambda_{\min}(\Theta) - (\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta) \lambda_n^2(L) \lambda_{\max}(A) - \alpha^2 \beta^2 \lambda_n^4(L) \lambda_{\max}^3(A) > 0, \quad (19)$$

其中:  $\Theta = \text{diag}\{M_i^{-1} - A^T F_i^T (M_i^+)^{-1} F_i A\}, \Lambda = \text{diag}\{A^{-1} G_i (A^{-1})^T\}$ , 则估计误差系统全局渐近稳定, 且网络中各个节点的估计值能够达到动态一致, 即  $\hat{x}_i = x, i = 1, 2, \dots, n$ .

**证** 见附录1.

定理1给出了滤波算法一致性增益的选择方法和使估计误差收敛的充分条件. 在实际应用中, 可通过离线计算Riccati方程求出  $F_i, G_i$  的稳态值, 并根据

式(19)选择合适的一致性系数.

此外, 从定理1的推导过程可以看出, 若一致性系数的取值满足稳定性条件时,

$$\Delta V(\eta) \leq -2(\alpha + \beta) \eta^T \hat{L} \eta \leq -2(\alpha + \beta) \lambda_2(L) \|\eta\|^2. \quad (20)$$

不难发现, 一致性系数的取值与网络代数连通度影响算法的收敛速度. 在满足算法收敛条件的前提下, 当各节点度增大时, 网络连通度增高, 可加快算法的收敛速度; 一致性系数取值越大, 算法收敛速度越快.

#### 4 仿真结果与分析(Simulation and analysis)

考察在  $100 \times 100$  的矩形区域内随机散布的50个传感器, 以35为节点的最大通讯半径构造无向连通网络. 系统的动态方程及观测方程如式(1)–(2), 其参数如下:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.5 \end{bmatrix}^T, H_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$w \sim N(0, 0.25), v_i \sim N(0, R_i), R_i = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix},$$

$$r_1 \in (100, 200), r_2 \in (25, 50).$$

系统的初始状态为  $x_i(0) = [100 \ 50]^T$ .

定义估计误差  $e$  和一致性误差  $\chi$  作为算法性能的衡量指标:

$$e \triangleq \sqrt{1/n \sum_{i=1}^n (\zeta_i^T \zeta_i)}, \quad (21)$$

$$\chi \triangleq \sqrt{1/n \sum_{i=1}^n (\kappa_i^T \kappa_i)}, \quad (22)$$

$\zeta_i = \hat{x}_i - x, \kappa_i = \hat{x}_i - 1/n \sum_{j=1}^n \hat{x}_j$ . 前者用于评估算法的估计精度, 后者表征了每一时刻各个传感器之间的估计偏差程度. 图2、图3分别为两种算法估计误差和一致性误差的比较.

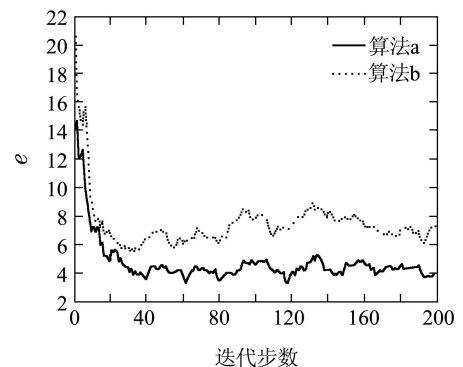


图 2 估计误差比较

Fig. 2 Comparison of estimation errors

对比文献[12]的研究结果,若不考虑随机噪声的影响,两种算法经过多次迭代将收敛于同一值,即状态真值.从图2、图3中可以看出,在带有随机噪声的情况下,通过对局部预测的一致化处理,本文的算法提高了估计的精度和一致性.

定理1给出了一致性增益的选择方法和一致性系数的取值范围.通过仿真比较发现一致性系数的取值会影响估计结果.图4给出了迭代次数 $k = 100$ 时,一致性系数 $\alpha, \beta$ 的取值与估计误差之间的关系.从图中发现,一致性系数存在一组最优取值( $\alpha^{opt} = 1.5 \times 10^{-4}, \beta^{opt} = 1.2 \times 10^{-4}$ )使估计误差达到最小,当一致性系数小于此最优取值时,估计误差随着系数的增大而减小;当系数大于最优取值时,估计误差随着系数的增大而增大,当系数的取值接近某一临界值( $\alpha^* = 3 \times 10^{-4}, \beta^* = 3 \times 10^{-4}$ ),使其不满足定理1中的稳定性条件,导致估计发散.

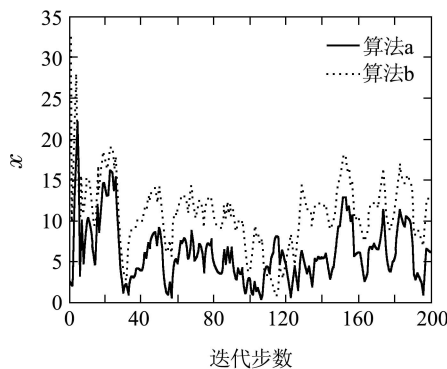


图3 一致性误差比较  
Fig. 3 Comparison of consensus errors

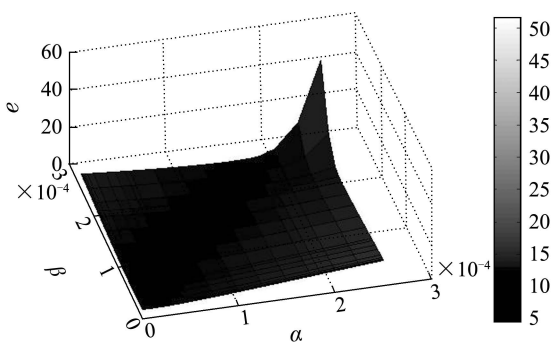


图4 估计误差与一致性系数的关系  
Fig. 4 Comparing consensus coefficients with estimation errors

在实际应用中,可以选取较小的一致性系数保证算法的收敛性.但较小的取值会减慢收敛速度.文献[14]指出,节点度较高的传感器在网络估计中发挥重要的作用,通过仿真发现,本文中也有类似的现象.在图4中,当一致性系数接近 $(\alpha^*, \beta^*)$ 时会导致估计发散,现做出如下改进措施:使网络中节点度

$d_i > 15$ 的传感器一致性系数减小至 $(\alpha^{opt}, \beta^{opt})$ ,其余传感器一致性系数为保持为 $(\alpha^*, \beta^*)$ ,仿真结果如图5所示.

因此,若既要保证算法稳定性,同时又要保证算法的收敛速度,可通过减小节点度较高传感器的一致性系数,而保持剩余节点一致性系数不变来实现.

由式(20)可知,网络代数连通度也影响着算法的收敛速度.在此处固定各传感器的空间分布与一致性系数,分别以25, 40为节点的最大通讯半径构造无向连通网络.估计误差曲线如图6所示.通过比较可以发现,若以25为最大通讯半径,网络估计误差在迭代50次左右进入稳态,而以40作为最大通讯半径,迭代20次左右进入稳态.

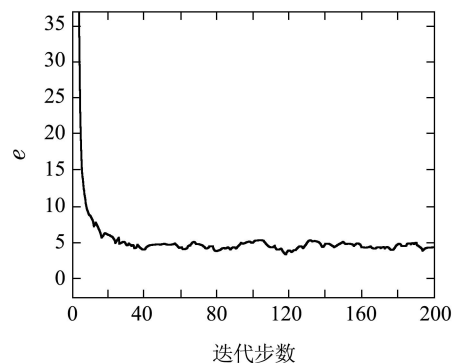


图5 一致性系数改进后的估计误差

Fig. 5 Estimation errors with improved consensus coefficients

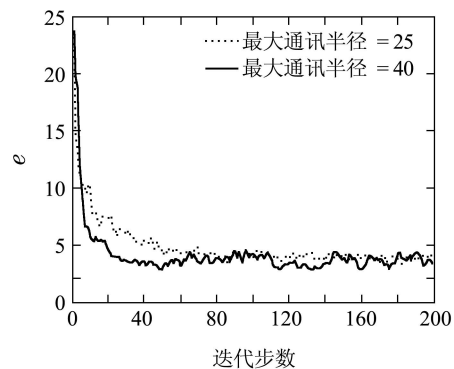


图6 不同最大通讯半径下的估计误差

Fig. 6 Estimation errors with different maximum communication radius

表1 滤波器运算时间比较

Table 1 Comparison of running time of filters

硬件环境	算法a	算法b
CPU主频1.6 GHz 内存512 MB	2.50 ms	1.89 ms
CPU主频2.0 GHz 内存2 GB	1.82 ms	1.26 ms
CPU主频2.2 GHz 内存2 GB	1.79 ms	1.07 ms

表1给出了不同硬件环境的PC机上单个节点进行一次滤波更新的平均运算时间.与参考文献中的

算法相比较, 计算时间有所增加. 在数值仿真实验中, 条件较为理想化, 没有考虑实际系统中诸如数据通信时延等因素的影响, 因此与实际动态系统相比还存在一定的差异.

## 5 结论(Conclusions)

本文提出了一种基于状态预测一致的分布式滤波算法, 给出了种一致性增益的选取方法和算法收敛的充分条件. 与文献[12]中的研究结果相比, 通过对局部预测值的一致化处理, 本文所提出的算法提高了估计精度和一致性. 网络代数连通度和一致性系数的取值影响算法的收敛速度. 仿真分析表明, 一致性系数存在最优值, 此时估计误差达到最小. 并发现节点度较高的传感器在网络估计中发挥着重要的作用, 可以通过降低这些节点一致性系数, 增大其他节点一致性系数的方法使算法同时保证稳定性和收敛速度. 同时, 由于算法中利用了更多的邻居节点的信息, 增加了节点之间的数据传输量和计算时间. 因此在实际应用中如何权衡网络能量消耗与估计精度是值得进一步探讨的问题.

## 参考文献(References):

- [1] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655 – 661.
- [2] STANKOVIC S S, STANKOVIC M S, STIPANOVIC D M. Consensus based overlapping decentralized estimator [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(2): 410 – 415.
- [3] CAVALCANTER R L G, MULGREW B. Adaptive filter algorithms for accelerated discrete-time consensus [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(3): 1049 – 1058.
- [4] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [5] ZAVLANOS M M, PAPPAS G J. Potential fields for maintaining connectivity of mobile networks [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2007, 23(4): 812 – 816.
- [6] REN W. Consensus strategies for cooperative control of vehicle formations [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2007, 1(2): 505 – 512.
- [7] 王林, 彭辉, 朱华勇, 等. 复杂环境下多无人机协作式地面移动目标跟踪 [J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(3): 300 – 308. (WANG Lin, PENG Hui, ZHU Huayong, et al. Cooperative tracking of ground moving target using unmanned aerial vehicles in cluttered environment [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(3): 300 – 308.)
- [8] 柳滢, 吴捷, 曾君, 等. 基于多Agent系统的分散发电调度规划 [J]. *控制理论与应用*, 2008, 25(1): 151 – 154. (LIU Zhan, WU Jie, ZENG Jun, et al. Dispatch management in distributed power generation on multi-agent system [J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(1): 151 – 154.)
- [9] SPANOS D P, OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Approximate distributed Kalman filtering in sensor networks with quantifiable performance [C] // *Proceedings of the Fourth International Symposium on Information Processing in Sensor Networks*. Los Angeles: IEEE, 2005: 133 – 139.
- [10] OLFATI-SABER R, SHAMMA J S. Consensus filters for sensor networks and distributed sensor fusion [C] // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*. Seville: IEEE, 2005: 6698 – 6703.
- [11] OLFATI-SABER R. Distributed Kalman filtering for sensor networks [C] // *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans: IEEE, 2007: 5492 – 5498.
- [12] OLFATI-SABER R. Kalman-consensus filter: optimality, stability and performance [C] // *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*. Shanghai: IEEE, 2009: 7036 – 7042.
- [13] STANKOVIC S S, STANKOVIC M S, STIPANOVIC D M. Consensus based overlapping decentralized estimation with missing observations and communications faults [J]. *Automatica*, 2009, 45(6): 1397 – 1406.
- [14] 王帅, 杨文, 侍洪波. 带丢包一致性滤波算法研究 [J]. *自动化学报*, 2010, 36(12): 1689 – 1696. (WANG Shuai, YANG Wen, SHI Hongbo. Consensus-based filtering algorithm with packet-dropping [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(12): 1689 – 1696.)
- [15] UGRINOVSKII V. Distributed robust filtering with  $H_\infty$  consensus of estimates [J]. *Automatica*, 2011, 47(1): 1 – 13.

## 附录(Appendix)

证 对于式(10)–(15)所描述的滤波算法, 不考虑随机噪声的影响, 则其估计误差系统可表示成如下形式:

$$\eta_i^+ = F_i A \eta_i + F_i A U_i \sum_{j \in N_i} (\hat{x}_j - \hat{x}_i) + C_i \sum_{j \in N_i} (\hat{x}_j^+ - \hat{x}_i^+). \quad (A1)$$

根据 $\eta_i$ 的定义与式(15),

$$\eta_i^+ = F_i A \eta_i + F_i A U_i \xi_i + C_i \mu_i, \quad (A2)$$

其中:  $\xi_i = \sum_{j \in N_i} (\eta_j - \eta_i)$ ,  $\mu_i = A \xi_i + A \sum_{j \in N_i} (U_j \xi_j - U_i \xi_i)$ .

定义Lyapunov函数 $V(\eta) = \sum_{i=1}^n \eta_i^T M_i^{-1} \eta_i$ , 则

$$\begin{aligned} \Delta V(\eta) &= \sum_{i=1}^n ((F_i A \eta_i + F_i A U_i \xi_i + C_i \mu_i)^T (M_i^+)^{-1} (F_i A \eta_i + F_i A U_i \xi_i + C_i \mu_i) - \eta_i^T M_i^{-1} \eta_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \eta_i^T (A^T F_i^T (M_i^+)^{-1} F_i A - M_i^{-1}) \eta_i + \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \eta_i^T A^T F_i^T (M_i^+)^{-1} F_i A U_i \xi_i + \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \eta_i^T A^T F_i^T (M_i^+)^{-1} C_i \mu_i + \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \xi_i^T U_i^T A^T F_i^T (M_i^+)^{-1} C_i \mu_i + \\ &= \sum_{i=1}^n \xi_i^T U_i^T A^T F_i^T (M_i^+)^{-1} F_i A U_i \xi_i + \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i^T C_i^T (M_i^+)^{-1} C_i \mu_i. \end{aligned} \quad (A3)$$

若定义 $\Theta_i = M_i^{-1} - A^T F_i^T (M_i^+)^{-1} F_i A$ , 则

$$\sum_{i=1}^n \eta_i^T \Theta_i \eta_i = -\eta^T \Theta \eta, \quad (A4)$$

其中:  $\Theta \triangleq \text{diag}\{\Theta_i\}$ ,  $\eta \triangleq \text{col}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ . 由定理的假设条件 $S_i > 0$ , 根据引理1可知 $\Theta_i > 0$ , 因此对于任意的 $\eta$ , 当 $\eta \neq 0$ 时,  $-\eta^T \Theta \eta < 0$ 成立. 由式(17),  $M_i^+ = F_i G_i F_i^T$ :

$$2 \sum_{i=1}^n \eta_i^T A^T F_i^T (M_i^+)^{-1} F_i A U_i \xi_i = 2\beta \sum_{i=1}^n \eta_i^T \sum_{j \in N_i} (\eta_j - \eta_i). \tag{A5}$$

图G无向连通,  $L \geq 0$ , 根据代数图论,

$$2\beta \sum_{i=1}^n \eta_i^T \sum_{j \in N_i} (\eta_j - \eta_i) = -2\beta \eta^T \hat{L} \eta \leq 0, \tag{A6}$$

其中  $\hat{L} \triangleq L \otimes I_n$ . 同理可将  $\Delta V(\eta)$  简化为如下形式:

$$\begin{aligned} \Delta V(\eta) = & -\eta^T \Theta \eta - 2\beta \eta^T \hat{L} \eta - 2\alpha \eta^T \hat{L} \eta + \\ & 2\alpha\beta \eta^T \hat{L} \Lambda \hat{L} \eta + 2\alpha\beta \eta^T \hat{L} \Lambda \hat{L} \eta - \\ & 2\alpha\beta^2 \eta^T \hat{L} \Lambda \hat{L} \Lambda \hat{L} \eta + \beta^2 \eta^T \hat{L} \Lambda \hat{L} \eta + \\ & \alpha^2 \eta^T \hat{L} \Lambda \hat{L} \eta - 2\alpha^2 \beta \eta^T \hat{L} \Lambda \hat{L} \Lambda \hat{L} \eta + \\ & \alpha^2 \beta^2 \eta^T \hat{L} \Lambda \hat{L} \Lambda \hat{L} \Lambda \hat{L} \eta. \end{aligned} \tag{A7}$$

易知  $\Delta V(\eta) \leq -\eta^T \Psi \eta$ , 其中:  $\Psi \triangleq \Theta - (\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta) \hat{L} \Lambda \hat{L} - \alpha^2 \beta^2 \hat{L} \Lambda \hat{L} \Lambda \hat{L} \Lambda \hat{L}$ . 根据Hermit矩阵特征值性质:

$$\begin{aligned} \lambda(\Psi) \geq & \lambda_{\min}(\Theta) - \lambda_{\max}((\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta) \hat{L} \Lambda \hat{L}) - \\ & \lambda_{\max}(\alpha^2 \beta^2 \hat{L} \Lambda \hat{L} \Lambda \hat{L} \Lambda \hat{L}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{\min}(\Theta) - (\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta) \lambda_n^2(L) \lambda_{\max}(\Lambda) - \\ & \alpha^2 \beta^2 \lambda_n^4(L) \lambda_{\max}^3(\Lambda). \end{aligned} \tag{A8}$$

若一致性系数  $\alpha, \beta$  满足

$$\begin{aligned} & \lambda_{\min}(\Theta) - (\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta) \lambda_n^2(L) \lambda_{\max}(\Lambda) - \\ & \alpha^2 \beta^2 \lambda_n^4(L) \lambda_{\max}^3(\Lambda) > 0 \end{aligned} \tag{A9}$$

时, 矩阵  $\Psi$  正定, 即对于  $\forall \eta \neq 0, \Delta V(\eta) < 0$  恒成立.

证毕.

作者简介:

**王长城** (1985-), 男, 博士研究生, 主要研究领域为多传感器信息融合, E-mail: w308101484@126.com;

**戚国庆** (1977-), 男, 副研究员, 主要研究领域为随机状态估计与多传感器数据融合, E-mail: qiguqing@mail.njust.edu.cn;

**李银伢** (1976-), 男, 副教授, 主要研究领域为机动目标跟踪、火力与指挥控制, E-mail: liyinya@mail.njust.edu.cn;

**盛安冬** (1964-), 男, 研究员, 博士生导师, 主要研究领域为多源信息融合理论及应用, E-mail: shengandong@mail.njust.edu.cn.