

## 铝土矿连续磨矿过程球磨机优化控制

马天雨, 桂卫华

(中南大学 信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410083)

**摘要:** 针对铝土矿连续磨矿过程球磨机节能降耗问题以及铝土矿来源复杂、品位差异大等特点, 提出了球磨机多目标多模型预测控制方法. 该方法首先建立状态空间浓度预测模型和粒级质量平衡加权多模型细度预测模型. 然后构建了包含磨机排矿浓细度区间控制和经济性能指标的多目标优化结构的多模型预测控制策略. 最后采用乘子罚函数法求解控制器局部最优解. 仿真及现场试验结果表明了该方案的有效性.

**关键词:** 磨矿过程; 多模型预测控制; 多目标优化; 区间控制; 乘子罚函数

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Optimal control for continuous bauxite grinding process in ball-mill

MA Tian-yu, GUI Wei-hua

(School of Information Science and Engineering, Central South University, Hunan Changsha 410083, China)

**Abstract:** Considering the reduction of power consumption of ball-mill, we propose a multi-objective multi-model predictive control for the continuous grinding process of bauxite with bauxite ores coming from different mine sources and with different qualities. In this method, we first build the state-space concentration-predictive model and the fineness-prediction model based on the weighted multi-model of size-mass balance; and then, we develop an optimal multi-model predictive control scheme for optimizing multiple objectives including the interval control of concentration and fineness of the discharged ore pulp from the ball-mill, along with economic indices. The local optimal control law of the controller is obtained by minimizing a multiplier penalty function. The simulation and the field test results show the effectiveness of this method.

**Key words:** mineral grinding process; multiple model predictive control; multiple objective optimization; interval control; multiplier penalty function

### 1 引言(Introduction)

磨矿过程是选矿工艺的一个非常重要的处理单元, 其产品矿浆粒级分布严重影响矿物回收率和尾矿金属含量. 据统计, 选矿工艺中50%左右的能耗来源于磨矿过程. 实现磨矿过程优化控制, 稳定产品质量, 降低过程能耗、钢耗, 对提高企业经济效益都具有重要的现实意义.

球磨机是一个多输入、多输出(multi-input multi-output, MIMO)系统, 存在弱非线性和大滞后等特性, 是典型的复杂工业过程. 受下料粒级分布, 矿石硬度变化和钢球磨损等干扰影响, 实现球磨机优化控制比较困难. 目前关于球磨机优化控制策略的研究论文主要包括: 分散PID控制<sup>[1]</sup>、模型预测控制<sup>[2-3]</sup>、内模解耦控制<sup>[4]</sup>、鲁棒控制<sup>[5]</sup>、自适应控制<sup>[6]</sup>、神经控制<sup>[7]</sup>、专家控制<sup>[8]</sup>、监督控制<sup>[9]</sup>、基于多变量解耦的分层控制<sup>[10]</sup>、磨机负荷的智能监测与控制<sup>[11]</sup>等. 铝土矿选矿工艺是中国独有的矿物加工技术, 铝土矿颗粒极细, 其颗粒分布特性、研磨特性等均与其他矿

石大不相同. 因此前面提到的针对其他矿石开发的球磨机优化控制方案不能直接用于铝土矿连续球磨过程.

论文提出一种针对铝土矿的连续磨矿过程球磨机优化控制方案. 将球磨机简化为一个3输入、1输出的连续搅拌(continuous stirred tank reactor, CSTR)过程, 根据体积平衡和物料平衡原理建立状态空间浓度预测模型. 考虑铝土矿磨矿特性、下料粒级分布和矿石硬度变化影响, 由不同矿区铝土矿连续磨矿采样数据和铝土矿分批实验数据, 建立不同矿区粒级质量平衡模型集, 提出了基于权系数优化的加权多模型细度预测模型. 为实现稳定质量, 提高产量, 节能降耗的过程优化目标, 提出一种包含排矿浓细度区间控制并考虑经济优化的多目标优化结构的预测控制策略, 在实现排矿浓细度区间控制的同时保证下料和钢球的最优添加. 文章最后提出一种基于乘子罚函数的分步优化算法, 求解球磨机最优操作量.

## 2 连续磨矿过程(Continuous mineral grinding process)

连续磨矿过程如图1所示: 破碎车间首先将矿石破碎成小于19 mm细矿料, 均化后由料斗震动筛筛分并经传送带送入进料器, 这就是原矿下料. 溢流型球磨机采用湿磨方式, 需要给球磨机注入一定量的水, 称入磨加水. 为提高研磨效率、调节矿浆pH值, 磨机中添加一定量的碳酸钠溶液, 称碱性助磨药剂. 原矿下料、入磨水和助磨剂在进料器混合后形成磨机入料. 球磨机是一个被电机带动绕轴旋转的柱形钢筒, 内装有大量钢球作为研磨介质, 转动的球磨机带动钢球对混合矿浆进行研磨、破碎作用. 磨机中的细矿料以矿浆形式溢出球磨机排矿口, 混合排矿水后进入分级机.

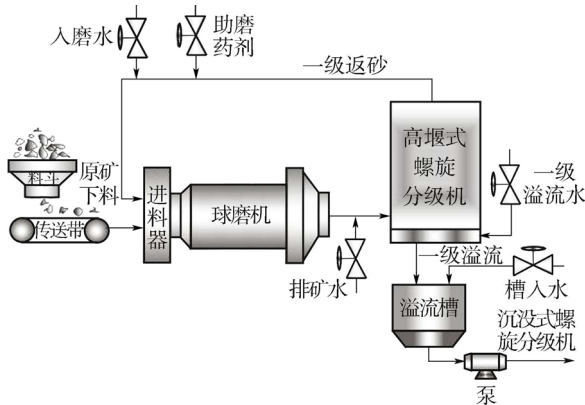


图1 连续球磨过程

Fig. 1 Continuous ball milling process

分级机由沉降槽和一个旋转的螺旋板组成, 螺旋板在旋转过程中将沉降槽底部粗料推进返砂槽形成一级返砂, 由入磨水冲刷后进入磨机重磨; 较细矿料以矿浆形式溢出沉降槽, 形成一级溢流, 混合一级溢流水后进入原矿槽, 被水泵送入后续工序.

## 3 球磨机优化控制(Ball mill optimizing control)

### 3.1 控制目标(Control target)

1) 克服过程干扰, 将磨机排矿矿浆浓细度(-200目粒级物料质量分数)稳定控制在质量指标区间范围: 浓度70%~80%, 细度22%~28%.

2) 球磨机优化控制可表述为: 在保证浓细度质量指标区间控制的同时, 考虑下料量和钢球的优化添加, 实现稳定质量、提高产量、节能降耗的目标.

### 3.2 优化控制框架(Optimization control frame)

基于球磨机多输入、多输出, 操作变量存在硬约束, 系统存在延时和弱非线性的特点, 选择MPC控制算法实现球磨机优化控制.

铝土矿连续磨矿过程球磨机优化控制框架如图2所示. 该控制框架基于模型预测控制, 主要包

括: 预测模型、滚动优化和反馈校正3个基本内容. 另外, 考虑到模型参数随着参与优化的现场采样数据的增加而提高, 采集实际过程运行数据, 形成现场操作数据库, 当新增数据达到一定数量时重新优化模型参数, 同时重新优化加权模型的权系数, 改变各模型在细度预测中所占比重, 提高模型预测精度. 图中 $y_r(k+i)$ 代表球磨机排矿(出口矿浆)浓细度设定值,  $u(k+i)$ 代表MPC控制器给出的优化控制律,  $y(k+i)$ 代表磨机排矿浓细度实际测量值,  $y_m(k+i)$ 代表由模型预测的磨机排矿浓细度,  $e(k+i)$ 代表模型预测误差,  $y_p(k+i)$ 是经误差校正后的浓细度模型预测值,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 代表不同矿源模型在细度预测值中所占的比例.

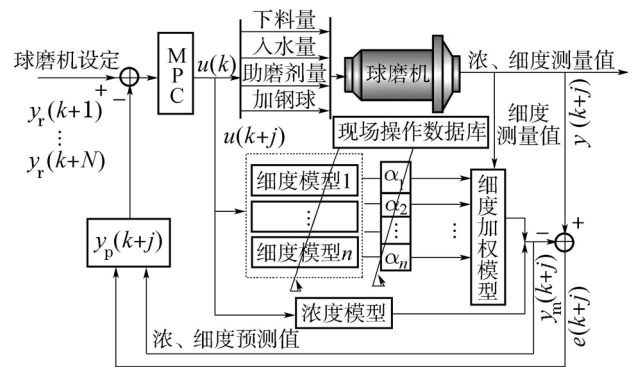


图2 球磨机优化控制框架

Fig. 2 The scheme of optimization control for ball-mill

在物料装载量和磨机转速稳定的前提下, 磨机电流只受钢球装载量(0.32 ~ 0.4)影响, 磨机电流可以由监控台直接得到, 而钢球装载量无法检测, 因此由磨机电流 $C$ 代替钢球装载量作为球磨机的一个操作变量. 选择加药剂量 $R_{C_{os}Na_3}$ 、原矿下料量 $R_m$ 、入磨加水量 $R_{win}$ 作为球磨机的另外3个操作变量(MVS). 选择磨机排矿浓细度 $C_{bm}$ ,  $F_{bm}$ 作为控制变量(CVS). 由混料不均匀导致的下料粒级分布变化和由矿石来源引起的矿石硬度变化是影响磨机排矿细度的主要干扰, 分别属于过程可测干扰(MD)和不可测干扰(UD), 球磨机优化控制系统设计需要考虑克服这两种干扰的影响.

## 4 预测模型(Predictive model)

### 4.1 浓度预测模型(Concentration predictive model)

影响磨机排矿浓度的各操作变量和磨机浓度之间成滞后的直接线性关系, 因此, 可以将他们之间的关系简化成如图3所示的3输入、1输出的连续搅拌(CSTR)配料过程. 取输入变量为: 入磨水流量 $R_{win}(t)$ , 原矿下料量 $R_m(t)$ 和助磨药剂添加量 $R_{C_{os}Na_3}(t)$ ; 输出变量取浓度为 $C_{bm}(t)$ 的磨机排矿浆 $R_{bm}(t)$ . 因返一级砂浓度基本保持不变, 且属于

不可操作变量, 因此这里忽略返砂对排矿矿浆浓度的影响。

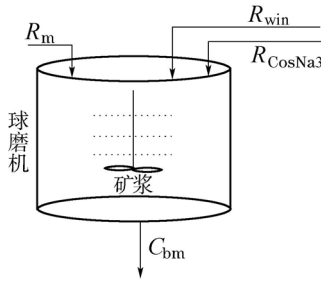


图 3 磨机浓度和操作变量关系图

Fig. 3 The relationship between ball-mill concentration and operation variables

设磨机内的矿浆体积为  $V$ , 则可建立磨机体积平衡公式:

$$\frac{dV(t)}{dt} = R_m(t) + R_{win}(t) + R_{CosNa3}(t) - R_{bm}(t). \quad (1)$$

原矿下料为固体矿料, 其浓度是 1, 设入磨水和助磨药剂浓度为 0, 将各变量浓度代入式(1), 得到物料平衡公式:

$$\frac{d}{dt}[C_{bm}(t)V(t)] = R_m(t) - C_{bm}(t)R_{bm}(t). \quad (2)$$

排矿矿浆流量依赖于磨机内物料装载量, 磨机内物料体积公式表示为

$$V(t) = L * S(t), \quad (3)$$

其中  $L$  为磨机长度. 图 4 为球磨机横截面图.

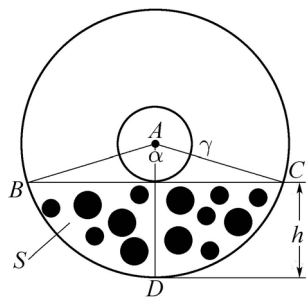


图 4 球磨机横截面图

Fig. 4 The cross section of ball mill

磨机内矿浆截面积  $S$  计算公式为

$$S(t) = \pi r^2 \left( \frac{\alpha}{360} \right) - (r - h) * r \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (4)$$

其中:  $\alpha$  为扇面圆心角,  $r$  为磨机截面圆半径,  $h$  为矿浆高度,  $S(t)$  代表磨机截面中的矿浆截面  $BCD$  面积,  $\pi r^2 \left( \frac{\alpha}{360} \right)$  代表扇形  $ABCD$  面积,  $(r - h) * r \sin \frac{\alpha}{2}$  代表三角形  $ABC$  面积.

磨机出口流量是磨机内物料装载量的函数:

$$R_{bm}(t) = k \sqrt{S(t)} = k \sqrt{\frac{V(t)}{L}}. \quad (5)$$

将式(5)代入式(1)-(2)得

$$\frac{dV(t)}{dt} = R_m(t) + R_{win}(t) + R_{CosNa3}(t) - k \sqrt{\frac{V(t)}{L}}, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt}[C_{bm}(t)V(t)] = R_m(t) - C_{bm}(t)k \sqrt{\frac{V(t)}{L}}. \quad (7)$$

设稳态时  $R_{win}(t) = R_{win}^0$ ,  $R_m(t) = R_m^0$ ,  $C_{bm}(t) = C_{bm}^0$ ,  $R_{CosNa3}(t) = R_{CosNa3}^0$ , 则稳态时的搅拌槽流量平衡公式和物料平衡公式分别如式(8)-(9):

$$0 = R_m^0 + R_{win}^0 + R_{CosNa3}^0 - R_{bm}^0, \quad (8)$$

$$0 = R_m^0 - C_{bm}^0 R_{bm}^0. \quad (9)$$

根据稳态值  $R_{win}^0$ ,  $R_m^0$ ,  $R_{CosNa3}^0$ ,  $C_{bm}^0$ , 由式(8)-(9)可计算出稳态时控制变量  $R_{bm}^0$ ,  $C_{bm}^0$  和  $V^0$ . 若稳态时操作变量发生波动:

$$\begin{cases} R_{win}(t) = R_{win}^0 + \mu_1(t), \\ R_m(t) = R_m^0 + \mu_2(t), \\ R_{CosNa3}(t) = R_{CosNa3}^0 + \mu_3(t), \end{cases} \quad (10)$$

其中  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$  和  $\mu_3(t)$  为波动量, 而

$$R_{bm}^0 = k \sqrt{\frac{V^0}{S}}. \quad (11)$$

该波动必然引起控制变量的变化:

$$\begin{cases} V(t) = V^0 + \xi_1(t), \\ C_{bm}(t) = C_{bm}^0 + \xi_2(t), \end{cases} \quad (12)$$

其中  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$  是由操作量波动引起的控制量变化.

设  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$  和  $\mu_3(t)$  是球磨机状态空间模型的输入变量,  $\xi_1(t)$  和  $\xi_2(t)$  为状态变量, 将式(6)-(7)线性化为

$$\dot{\xi}_1(t) = \mu_1(t) + \mu_2(t) + \mu_3(t) - \frac{k}{2V^0} \sqrt{\frac{V^0}{L}} \xi_1(t), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2(t) V^0 + C_{bm}^0 \dot{\xi}_1(t) = \\ \mu_1(t) - C_{bm}^0 \frac{k}{2V^0} \sqrt{\frac{V^0}{L}} \xi_1(t) - k \sqrt{\frac{V^0}{L}} \xi_2(t). \end{aligned} \quad (14)$$

将式(11)代入上面两式:

$$\dot{\xi}_1(t) = \mu_1(t) + \mu_2(t) + \mu_3(t) - \frac{1}{2} \frac{R_{bm}^0}{V^0} \xi_1(t), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2(t) V^0 + C_{bm}^0 \dot{\xi}_1(t) = \\ \mu_1(t) - C_{bm}^0 \frac{1}{2} \frac{R_{bm}^0}{V^0} \xi_1(t) - R_{bm}^0 \xi_2(t), \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $\frac{R_{bm}^0}{V^0} = \tau$  为被磨物料在磨机中的平均平流时间. 将式(15)代入式(16)得

$$\dot{\xi}_2(t) V^0 = -\mu_2(t) - \mu_3(t) - R_{bm}^0 \xi_2(t). \quad (17)$$

设状态变量为  $x(t) = \text{col}[\xi_1(t) \ \xi_2(t)]$ , 输入变量  $u(t) = \text{col}[\mu_1(t) \ \mu_2(t) \ \mu_3(t)]$ , 则由式(15)(17)可得

到球磨机浓度的线性状态空间模型:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\tau & 0 \\ 0 & -\tau \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{V^0} & -\frac{1}{V^0} \end{pmatrix} u(t). \quad (18)$$

输出变量定义为  $\eta_1(t) = C_{bm}(t) - C^0_{bm} \simeq \xi_2(t)$ , 最后得到磨机浓度预测模型  $M_C$ :

$$y(t) = \eta_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t). \quad (19)$$

## 4.2 细度预测模型(Fineness predictive model)

### 4.2.1 PB模型简介(Introduction of population balance model)

PB模型的依据是粒级质量平衡<sup>[12]</sup>, 即磨机内存在粒级大小的不断变化, 但整个磨机整体粒级质量保持不变. 对于某单个粒级存在如下关系: 积累=生成-消失, 根据上述原理, 可构造时间连续、粒度离散的球磨机分批磨矿模型:

$$\frac{dw_i(t)}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ i>1}}^{i-1} b_{ij} S_j w_j(t) - S_i w_i(t). \quad (20)$$

这是一个  $n$  元一阶微分方程组, 式中:  $w_i(t)$  表示第  $i$  个粒级的质量分数,  $b_{ij}(t)$  为破碎分布函数, 其物理意义是第  $j$  粒级的物料经过一次破碎后的破碎产品进入第  $i$  粒级的质量分数;  $S_j$  为选择函数, 也叫破碎率函数, 其值的大小说明了磨矿速度的快慢. 若初始加料各粒级质量分数(粒级分布)可测, 通过该模型可以计算出研磨  $t$  分钟后的物料粒级分布.

里德对该微分方程进行求解得到可实际应用的球磨机分批磨矿模型, 即里德解<sup>[13]</sup>:

$$w_i(t) = \sum_{j=1}^i \alpha_{ij} e^{-S_j t}, \quad n \geq i \geq 1, \quad (21)$$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j, \\ w_i(0) - \sum_{\substack{k=1 \\ i>1}}^{i-1} \alpha_{ik}, & i = j, \\ \sum_{k=j}^{i-1} \frac{1}{S_i - S_j} \sum_{k=j}^{i-1} S_k b_{ik} \alpha_{kj}, & i > j, \end{cases} \quad (22)$$

其中:  $w_i(0)$  代表分批磨矿初始加料中第  $i$  粒级物料质量分数,  $w_i(t)$  代表分批磨矿  $t$  分钟后第  $i$  粒级物料质量分数.

该模型假设所有被磨物料具有相同的停留时间, 而连续磨矿各粒级物料在磨机里面停留的时间是按某种概率函数分布的, 因此考虑连续磨矿过程磨机中物料停留时间的分布特性, AUSTIN 等人<sup>[14]</sup>推导出用于连续磨矿过程的磨机排矿粒级分布的转换函数解模型<sup>[12]</sup>:

$$p_i = \sum_{j=1}^i d_{ij} f_j, \quad n \geq i \geq 1, \quad (23)$$

其中:

$$e = \int_0^T e^{-S_j t} E(t) dt,$$

$$d_{ij} = \begin{cases} e_j, & i = j, \\ \sum_{k=j}^{i-1} c_{ik} c_{jk} (e_k - e_i), & i > j, \end{cases} \quad (24)$$

$$c_{ij} = \begin{cases} -\sum_{k=i}^{j-1} c_{ik} c_{jk}, & i < j, \\ 1, & i = j, \\ \frac{1}{S_i - S_j} \sum_{k=j}^{i-1} S_k b_{ik} c_{kj}, & i > j, \end{cases}$$

$$S_i = \frac{a(x_i)^\alpha}{(1 + (x_i/\mu)^\Lambda)}, \quad (25)$$

$$\begin{cases} B_{i,j} = b_1 \left(\frac{1}{x_j}\right)^{b_4} \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^{b_2} + (1 - b_1) \left(\frac{1}{x_j}\right)^{b_4} \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^{b_3}, \\ b_{ij} = B_{i-1,j} - B_{i,j}. \end{cases} \quad (26)$$

式(23)模型表明  $p_i$  是  $d_{ij}$  和  $f_i$  的线性组合,  $d_{ij}$  是一个下三角矩阵, 代表球磨机模型,  $p_i$  和  $f_i$  分别代表磨机入料、排矿中第  $i$  粒级物料的质量分数. 转换函数解模型的参数计算不涉及给料粒级分布, 且考虑了物料停留时间的分布特性, 适合用于连续磨矿过程.

铝土矿连续磨矿过程球磨机建模的主要任务是求解转换函数解模型3大关键参数: 破碎速率  $S_i$ , 破碎分布函数  $b_{ij}$ , 停留时间分布密度函数  $E(t)$ .

### 4.2.2 铝土矿PB模型(Population balance model of bauxite)

铝土矿连续球磨过程磨机排矿粒级分布预测模型可通过以下步骤建立<sup>[15-16]</sup>:

1) 分批磨矿试验, 即在实验室进行的无分级设备的小型球磨机开路磨矿试验. 该试验的主要目的是研究铝土矿不同于其他矿石的特殊磨矿性质, 同时找出合理的处理方法.

2) 确定破碎分布函数, 破碎分布函数反映矿石特性, 基本不受工况影响, 因此可由分批试验给料和产品粒级分布根据式(21)(26)模型反算得到.

3) 基于分批磨矿试验各粒级矿破碎速率特点, 建立连续磨矿过程时间非线性破碎速率模型.

4) 确定停留时间分布密度函数.

5) 求取参数  $a, \alpha, \mu, \Lambda$ , 基于式(23)转换函数解模型, 由铝土矿连续球磨过程采样数据反算式(25)参数  $a, \alpha, \mu, \Lambda$ .

6) 建立各采样点工况, 代表钢球装载量的磨机电流  $C$ , 加药剂量  $R_{CosNa_3}$ , 原矿下料量  $R_m$ , 入磨加水量  $R_{win}$  和破碎速率模型参数  $a, \alpha, \mu, \Lambda$  间的关系模型, 由工况辨识模型参数.

综上, 铝土矿连续磨矿过程磨机排矿粒级分布预

测模型采用基本PB模型结构; 由分批试验和现场数据确定了3大关键未知参数; 以原矿下料粒级分布, 一级返砂粒级分布, 返砂比和现场工况作为已知参数; 以球磨机出口矿浆粒级分布作为待预测参数. 将该模型简化表述为

$$\begin{aligned} Y_p &= f(R_m, R_{win}, C, R_{CosNa3}) \Rightarrow \\ Y_p &= M_{bm}U, \end{aligned} \quad (27)$$

式中:  $Y_p$ 代表磨机排矿粒级分布,  $M_{bm}$ 代表磨机排矿粒级分布预测模型,  $U = (R_m, R_{win}, C, R_{CosNa3})$ 代表球磨机4个操作变量.

### 4.2.3 铝土矿连续磨矿过程磨机排矿细度预测模型(A fineness predictive model of ball-mill discharging for continuous ball milling process of bauxite)

不同矿区矿石的硬度存在较大差异, 而矿石硬度是影响球磨机破碎速率的主要因素, 这导致根据不同矿源确定的球磨机模型参数存在较大差异. 为消除因矿石硬度变化引起的模型失配, 采样不同矿区矿石的连续磨矿过程数据, 根据4.2.2建模方案, 建立不同矿区矿石模型集 $\Omega = \{M_{bmi} | i=1, 2, \dots, n\}$ , 其中:  $\Omega$ 表示以模型 $M_{bmi}$ 为元素的模型集,  $M_{bmi}$ 为不同矿源的球磨机模型. 考虑建模误差, 本文选择加权多模型策略, 即让所有模型都起作用, 且以加权的方式确定每个模型预测结果所占的比重, 提高模型预测精度. 模型权值的计算问题可以转化成求满足等式约束的最小二乘解的优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\alpha_1, \lambda, \dots, \alpha_n} e(k) &= \|y_r(k) - y_p(k)\|^2, \quad (28) \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} \alpha_1 + \lambda + \dots + \alpha_n = 1, \\ \lambda = 0.6, \\ y_p(k) = \lambda y_{px}(k) + \sum_{i=1, i \neq x}^n \alpha_i y_{pi}(k), \end{cases} \end{aligned}$$

式中:  $y_r(k)$ 表示排矿细度测量值,  $y_p(k)$ 表示排矿细度模型预测值,  $y_{px}(k)$ 代表对应于当前矿石硬度的模型 $M_{bmx}$ 的细度预测值, 而 $y_{pi}(k)$ 则代表 $\Omega$ 中其他模型的细度预测值,  $\alpha_1, \lambda, \dots, \alpha_n$ 是待优化的模型加权系数. 求解式(28)优化问题得到对应不同矿区模型权系数 $\alpha_1, \lambda, \dots, \alpha_n$ , 最后得到铝土矿连续磨矿过程球磨机细度预测加权多模型 $M_F$ :

$$M_F = \lambda M_{bmx} + \sum_{i=1, i \neq x}^n \alpha_i M_{bmi}. \quad (29)$$

分别以式(19)(29)作为的铝土矿连续磨矿过程的磨机排矿浓、细度预测模型.

## 5 多目标优化(Multi-objective optimization)

### 5.1 控制目标(Control objective)

球磨机优化控制的主要任务是稳定排矿浓细度,

提高下料量, 减少钢球添加量. 为此, 提出如下球磨机优化控制目标:

$$\begin{aligned} \min_{U_m, \delta_1, \delta_2} J &= \|\delta_1\|_{Q_1}^2 + \|\delta_2\|_{Q_2}^2 + \|\Delta U_M\|_R^2 + \\ &\|R_m - R_m^+\|_\rho^2 + \|y_{PMF} - y_{PMF}^+\|_\lambda^2 + \\ &M \min[0, (y_{PMC}^+ - y_{PMC})]^2, \quad (30) \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} \Delta U_M^- \leq \Delta U_M \leq \Delta U_M^+, \\ U_M^- \leq U_M \leq U_M^+, \\ \alpha_c - \delta_1 \leq y_{PMC}(k+1|k) \leq \beta_c + \delta_1, \\ \alpha_f - \delta_2 \leq y_{PMF}(k+1|k) \leq \beta_f + \delta_2, \\ Y_{PMF} = M_F U_M, \\ Y_{PMC} = M_C U_M, \\ \delta_1, \delta_2 \geq 0. \end{cases} \quad (31) \end{aligned}$$

目标函数主要由3部分组成:

1)  $\|\delta_1\|_{Q_1}^2 + \|\delta_2\|_{Q_2}^2$  保证浓细度区间控制的动态优化目标.

2) 实现球磨机优化运行的稳态经济优化目标由两部分组成:

①  $\|R_m - R_m^+\|_\rho^2$ 实现下料量最大化调节,  $R_m^+$ 表示最大下料量(90 t/h);

②  $\|y_{PMF} - y_{PMF}^+\|_\lambda^2$ 实现排矿细度最大化调节, 并且 $y_{PMF}^+$ 表示细度的上限.

3)  $M \min[0, (y_{PMC}^+ - y_{PMC})]^2$ 防止球磨机涨肚设计的最大浓度罚函数,  $y_{PMC}^+$ 代表浓度上限. 式中:  $Q_1, Q_2, \rho, \lambda, R$ 是各目标项优化权重系数, 权重系数越大, 则对应优化项越重要, 控制器优先保证其控制要求. 式(30)中各权重系数间满足关系 $Q_1 > Q_2 > \rho \gg \lambda > R$ .  $M$ 是罚函数系数, 为防止浓度过大导致球磨机涨肚, 取 $M = 1000$ .  $\delta_1, \delta_2$ 为浓细度越界量化系数, 若浓、细度在指标区间则 $\|\delta_1\|_{Q_1}^2 + \|\delta_2\|_{Q_2}^2 = 0$ , 否则 $\|\delta_1\|_{Q_1}^2 + \|\delta_2\|_{Q_2}^2 \neq 0$ .

式(31)是系统约束,  $-\Delta U_M^+, \Delta U_M^+$ 代表各操作变量调节量约束上、下限,  $U_M^-, U_M^+$ 代表操作变量约束范围,  $y_{PMC}(k+1|k), y_{PMF}(k+1|k)$ 分别表示排矿浓、细度单步预测值,  $Y_{PMF} = M_F U_M, Y_{PMC} = M_C U_M$ 分别表示磨机排矿浓、细度预测模型,  $[\alpha_c, \beta_c], [\alpha_f, \beta_f]$ 分别表示磨机排矿浓、细度质量指标区间.

### 5.2 优化算法(optimizing algorithms)

钢球装载量是磨机研磨能力的决定性因素. 在实现排矿浓、细度区间控制的基本任务后, 若研磨能力充足则调节下料量和入磨水流量来增加过程产量; 若无法实现浓、细度区间控制任务, 则需要添加钢球提高磨机研磨能力. 因此, 提出求解球磨机最优控制律的4步优化方法:

**第1步** 以入磨水、助磨剂和下料量作为操作参

数,以式(32)所示的排矿浓、细度区间控制为单一优化目标,在式(33)约束下,优化各操作变量.若 $J = 0$ ,说明当前控制器能保证浓、细度区间控制,且存在一定剩余度,转第2步.反之若 $J \neq 0$ ,则转第3步.式中 $cur$ 表示当前控制周期的操作变量值.

$$\min_{U_M, \delta_1, \delta_2} J = \|\delta_1\|_{Q_1}^2 + \|\delta_2\|_{Q_2}^2, \quad (32)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \Delta U_M^- \leq \Delta U_M \leq \Delta U_M^+, \\ U_M^- \leq U_M \leq U_M^+, \\ C = C_{cur}, \\ \alpha_c - \delta_1 \leq y_{PMC}(k+1|k) \leq \beta_c + \delta_1, \\ \alpha_f - \delta_2 \leq y_{PMF}(k+1|k) \leq \beta_f + \delta_2, \\ Y_{PMF} = M_F U_M, \\ Y_{PMC} = M_C U_M, \\ \delta_1, \delta_2 \geq 0. \end{cases} \quad (33)$$

**第2步** 采用式(30)优化目标,在(33)约束下,优化计算实现球磨机多目标控制任务的最优操作量,转第4步.

**第3步** 将磨机电流作为唯一待调节的操作参数,采用式(34)约束,以式(32)为优化目标,优化使得 $J = 0$ 的磨机电流 $C_{opt}$ .

$$\text{s.t.} \begin{cases} R_m = R_{m,cur}, \\ R_{win} = R_{win,cur}, \\ R_{CosNa3} = R_{CosNa3,cur}, \\ C_{cur} \leq C \leq C_{max}, \\ \alpha_c - \delta_1 \leq y_{PMC}(k+1|k) \leq \beta_c + \delta_1, \\ \alpha_f - \delta_2 \leq y_{PMF}(k+1|k) \leq \beta_f + \delta_2, \\ Y_{PMF} = M_F U_M, \\ Y_{PMC} = M_C U_M, \\ \delta_1, \delta_2 \geq 0. \end{cases} \quad (34)$$

**第4步** 使得式(34)中的 $C_{cur}$ 等于 $C_{opt}$ ,以式(30)作为优化目标,计算实现球磨机优化运行的下料量,入磨水量和助磨剂添加量.

上面步骤中,都需要解一个约束非线性规划问题.对于标准MPC问题,一般先将约束及优化目标转化成标准的凸二次规划问题,然后调用标准QP算法求解问题的一阶KKT点,即全局最优点.鉴于球磨机优化控制目标的复杂性和细度预测模型的非线性,本文采用乘子罚函数法将约束优化问题转化为无约束问题,然后采用PSO+POWELL的无约束优化算法计算保证球磨机优化运行的操作变量单步预测值.算法的具体求解步骤如下:

1) 将约束优化问题标准化为

$$\begin{aligned} \min_X J(X), \\ \text{s.t. } g_j(X) \geq 0, j = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (35)$$

其中 $X = [\delta_1 \ \delta_2 \ U_M]$ .将式(31)转化为标准不等式约

束,得到 $g_j(X)$ :

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} g_1(X) \\ g_2(X) \\ g_3(X) \\ g_4(X) \\ g_5(X) \\ g_6(X) \\ g_7(X) \\ g_8(X) \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & I \\ I & 0 & M_C \\ -I & 0 & -M_C \\ 0 & I & M_F \\ 0 & -I & M_F \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ U_M(k) \end{bmatrix} \geq \\ & \begin{bmatrix} -U_M^+ \\ U_M^- \\ \alpha_c \\ -\beta_c \\ \alpha_f \\ -\beta_f \\ \Delta U_M^- + U_M(k-1) \\ -\Delta U_M^+ - U_M(k-1) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (36)$$

其中 $I$ 为单位矩阵.式(33)–(34)约束在优化计算时都要转化为式(36)所示的标准形式,这里不再赘述.

2) 采用乘子罚函数法将约束优化问题转化为无约束优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{X, \gamma_j} \varphi(X, \gamma, M) = \\ J(X) + \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^l \{ [\max(0, \gamma_j - N g_j(X))]^2 - \gamma_j^2 \}, \end{aligned} \quad (37)$$

其中: $\gamma_j$ 为拉格朗日乘子, $N = 500$ 为罚因子.

3) 给定初始 $X^0$ 和乘子向量 $\gamma^k$ ,常数 $N = 500$ ,设定常数 $\sigma, \omega (\delta > 1, \omega \in (0, 1))$ ,设定允许误差 $\varepsilon > 0$ ,令 $k = 1$ .

4) 以 $X^{k-1}$ 为初始点,采用PSO+POWELL算法求解式(37)无约束问题.

5) 若 $|\gamma^k - \gamma^{k-1}| < \varepsilon$ ,则停止计算,得到近似极小点,结束优化计算,否则转下一步.

6) 若 $\frac{\|\gamma^k\|}{\|\gamma^{k-1}\|} \geq \omega$ ,则令 $N = \sigma N$ 转下一步,否则直接转下一步.

7) 令 $\gamma_j^{k+1} = \max(0, \gamma_j^k - M g_j(x^k))$ , $k = k + 1$ ,返回第4步.经以上步骤,可计算出约束优化问题的近似全局最优解.

## 6 结果分析(Analysis of the results)

### 6.1 仿真结果(Simulation results)

受钢球磨损、添加和换球的影响,磨机电流一般在72~85 A的范围内变动.一级返砂经过入磨水的冲刷进入球磨机,因此入磨水流量太小不但会引起磨机浓度过高造成的球磨机涨肚现象,还会导致返砂槽堵塞,同时入磨水最大流量受阀门开度限制.这样,入磨水流量只能在75~95 m<sup>3</sup>/h范围内调节.为

保证过程产量, 磨机最小下料量不能低于 85 t/h, 而最大下料量受过程处理容量限制, 因此下料量调节范围是 85~95 t/h. pH 值是浮选工序严格控制的工艺指标, 而碳酸钠溶液作为碱性助磨药剂会增加矿浆 pH 值, 因此碳酸钠溶液的调节范围受限, 一般在 20~45 m<sup>3</sup>/h 小范围内调节. 综上, 球磨机操作变量的约束如式(38)所示:

$$\begin{cases} 85 < R_m < 95, & 75 < R_{win} < 95, \\ 72 < C < 85, & 20 < R_{CosNa_3} < 45. \end{cases} \quad (38)$$

当过程出现干扰时, 控制器按如下步骤实现将磨机排矿浓细度分别稳定在 70%~80% 和 22%~28% 的区间范围内, 同时考虑最优原矿下料量和钢球添加量的优化控制目标:

1) 以式(32)为优化目标, 优化调节除磨机电流外的其他操作变量. 若控制器能够实现  $J = 0$ , 说明球磨机研磨能力充足, 转第 2 步, 否则转第 3 步.

2) 研磨能力充足时, 以式(30)为优化目标, 保持

磨机电流不变, 只调节其他操作变量. 过程稳定时通过提高下料量耗尽控制器剩余度. 当过程受到矿石硬度增加阶跃干扰时, 排矿细度和各操作量调节的仿真曲线分别如图 5~6 所示. 可以看出, 控制器通过减少下料量、增加助磨剂和入磨水的控制动作消除由过程干扰引起得细度下降, 实现过程目标跟踪.

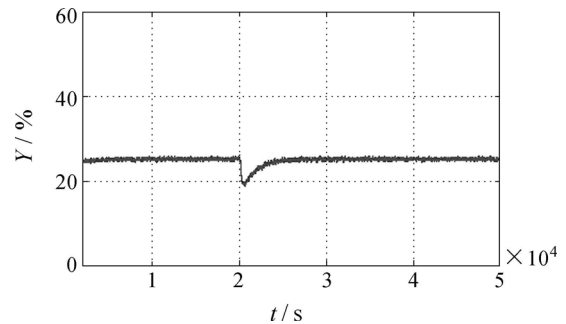
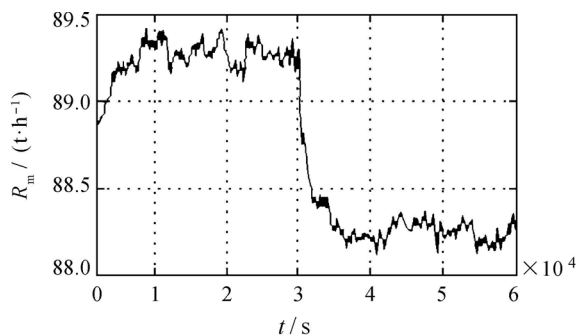
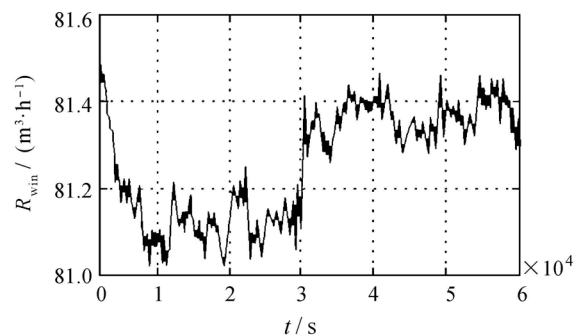


图 5 过程干扰引起细度调节曲线

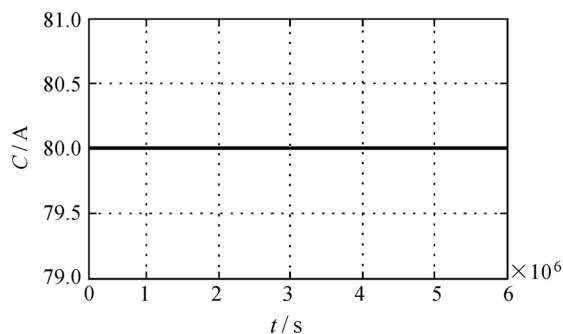
Fig. 5 Fineness adjustment curve caused by process disturbance



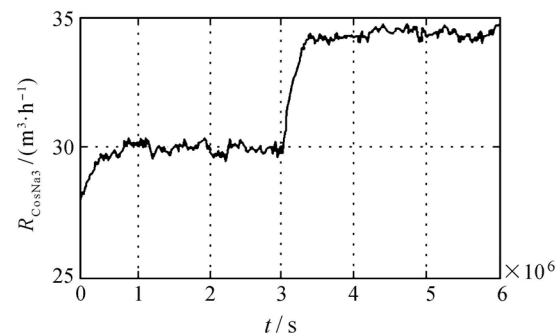
(a) 下料量



(b) 入磨水流量



(c) 磨机电流



(d) 助磨药剂添加量

图 6 研磨能力充足时的操作量调节曲线

Fig. 6 Adjustment curve of operation variables when grinding capacity is sufficient

3) 研磨能力不足时, 过程受到阶跃干扰时, 细度变化曲线如图 7 所示, 很明显, 此时控制器无法实现细度跟踪. 实现细度跟踪的磨机电流调节曲线如图 8 所示, 控制器通过增加磨机电流实现细度跟踪. 各操作变量调节曲线如图 9 所示, 图中助磨剂添加量和磨机下料量已到达调节上、下限, 单纯依靠入磨水的调节无法实现排矿细度跟踪, 因此

需要增加钢球装载量提高磨机研磨力. 根据磨机电流  $C$  和钢球装载量  $L_{bm}$  的关系可以计算出钢球添加量  $R_{bm}$ . 实际生产中按计算量的 2~3 倍添加钢球, 添加后一段时间内由第 2 步方案实现球磨机下料量优化控制, 直到研磨能力不足时重新计算钢球添加量. 另外, 在整个排矿细度调节过程中, 需要保证磨机排矿浓度的质量指标区间控制.

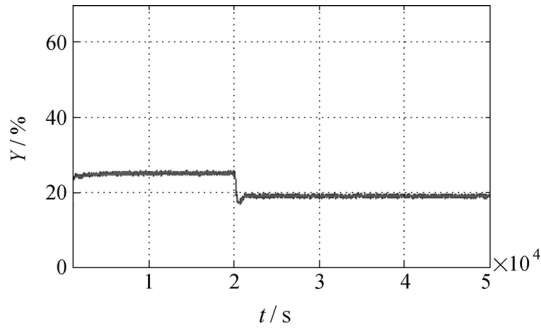


图7 过程干扰引起细度下降曲线

Fig. 7 Fineness decrease curve caused by process disturbance

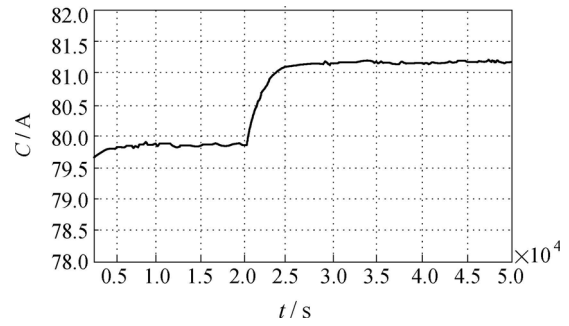
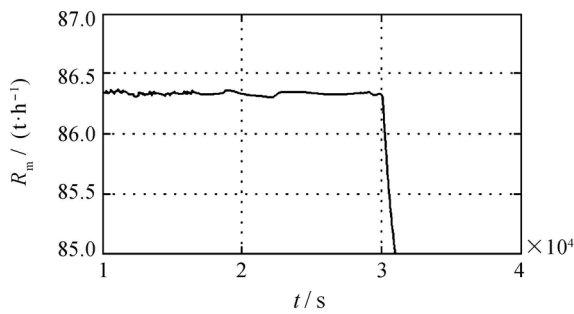
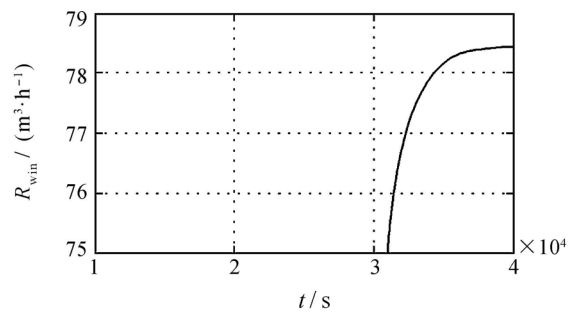


图8 磨机电流调节曲线

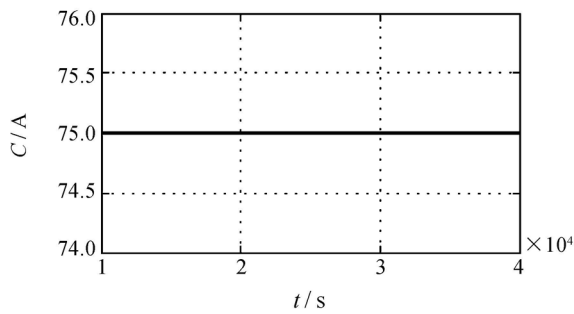
Fig. 8 Adjustment curve of ball-mill current



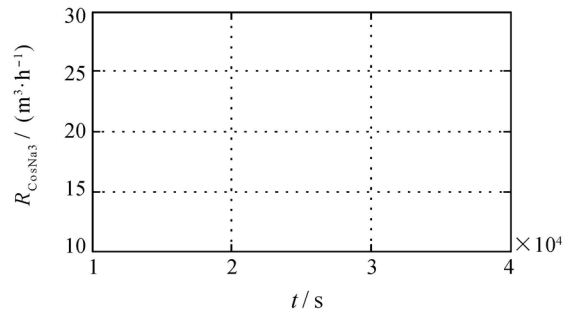
(a) 下料量



(b) 入磨水流量



(c) 磨机电流



(d) 助磨药剂添加量

图9 研磨能力不足时的操作量调节曲线

Fig. 9 Adjustment curve of operation variables when grinding capacity is insufficient

### 6.2 现场试验结果(Simulation results)

实际生产中,二级溢流细度是磨矿过程的主要质量指标,而磨机电流大小是磨机能耗高低的主要参考依据.因此,以二级溢流细度稳定性和磨机运行电流大小作为控制器有效性的主要判断标准.

通过对溢流磨机进行连续跟踪实验,得到控制器实施前后的二级溢流细度和磨机电流数据.二级溢流的长期跟踪对比结果如图10所示.在图10中,控制后的二级溢流细度基本稳定在90%~95%的质量指标区间范围内,波动较控制前明显变小.

磨机电流前后对比结果如图11所示,可以看出施加控制器后钢球装载量比较规律,不会出现钢

球不足导致的磨机电流偏低,也不会出现钢球的过量添加,实现了钢球添加量的优化控制.

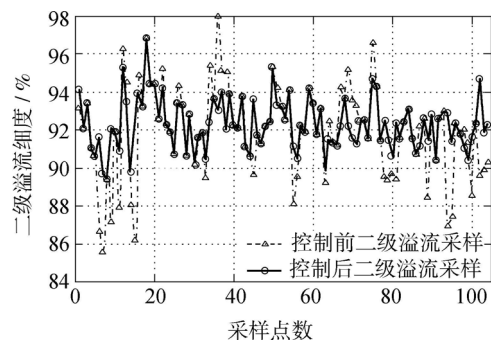


图10 控制前后二级溢流对比曲线

Fig. 10 Contrast curve of the second overflow before and after control



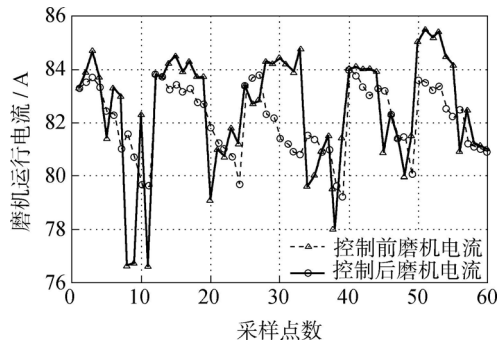


图 11 控制前后磨机电流对比曲线

Fig. 11 Contrast curve of the ball-mil current before and after control

实现球磨机优化控制后, 只要调节好磨机排矿口加水量和一级溢流水流量就可以将一、二级溢流浓细度稳定在质量指标区间内. 经现场试验, 控制后一级溢流浓细度、一、二级溢流浓度也都在指标要求范围内, 可见论文提出的控制方案等够实现磨矿过程优化控制.

## 7 结论(Conclusions)

本文提出一种旨在稳定质量, 提高产量, 节能降耗的球磨机多目标多模型预测控制方案.

1) 建立磨机排矿浓度状态空间浓度预测模型. 考虑铝土矿研磨性质, 由铝土矿分批实验数据和工业现场采样数据确定模型参数.

2) 考虑不同矿区矿石硬度差异引起的模型参数变化, 采集不同矿区矿石磨矿过程数据, 建立不同矿区矿石细度预测模型集, 并提出了基于权重优化的加权多模型排矿细度预测模型.

3) 构建了包含排矿矿浆浓细度区间控制和经济性能优化的优化控制目标

4) 建立球磨机优化四步方案, 当钢球不足导致研磨力不足时优化计算最优钢球添加量; 当钢球充足时优化调节其他操作变量, 提高原矿下料量. 采用乘子罚函数法, 将约束优化问题转化为无约束优化问题, 利用PSO+POWELL的无约束优化算法寻优过程最优操作变量. 提出实现球磨机多目标优化任务的4步优化方案, 根据磨机研磨能力实现钢球、下料的优化添加. 仿真及现场试验结果表明了该方案的有效性.

## 参考文献(References):

[1] POMERLEAU A, HODOUIN D, DESBIENS A. A survey of grinding circuit control methods: from decentralized PID controllers to multivariable predictive controllers [J]. *Powder Technology*, 2000, 108(2/3): 103 – 115.

- [2] RAMASAMY M. Control of ball mill grinding circuit using model predictive control scheme [J]. *Journal of Process Control*, 2005, 15(3): 273 – 283.
- [3] CHEN X S, ZHAI J Y. Application of model predictive control in ball mill grinding circuit [J]. *Minerals Engineering*, 2007, 20(11): 1099 – 1108.
- [4] 周平, 柴天佑. 工业过程运行的解耦内模控制方法 [J]. *自动化学报*, 2009, 35(10): 1362 – 1368. (ZHOU Ping, CHAI Tianyou. Decoupling internal model control method for operation of industrial process [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2009, 35(10): 1362 – 1368.)
- [5] GALAN O, BARTON G W. Robust control of a SAG mill [J]. *Powder Technology*, 2002, 124(3): 267 – 271.
- [6] NAJIM K, HODOUIN D, DESBIENS A. Adaptive control: state of the art and application to a grinding process [J]. *Powder Technology*, 1995, 82(1): 59 – 68.
- [7] CONRADLE A V E, ALDRICH C. Neuro control of a ball mill grinding circuit using evolutionary reinforcement learning [J]. *Minerals Engineering*, 2001, 14(10): 1277 – 1294.
- [8] CHEN X S, LI S H. Expert system based adaptive dynamic matrix Control for ball mill grinding circuit [J]. *Expert Systems with Applications*, 2009, 36(1): 716 – 723.
- [9] RADHAKRISHNAN V R. Model based supervisory control of a ball mill grinding circuit [J]. *Journal of Process Control*, 1999, 19(3): 195 – 211.
- [10] 周平, 柴天佑. 多变量解耦控制的工业过程运行层次控制方法 [J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(2): 199 – 205. (ZHOU Ping, CHAI Tianyou. Hierarchical control approach for industrial process operation based on multivariable decoupling control [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(2): 199 – 205.)
- [11] 周平, 柴天佑. 磨矿过程磨机负荷的智能监测与控制 [J]. *控制理论与应用*, 2008, 25(6): 1095 – 1098. (ZHOU Ping, CHAI Tianyou. Intelligent monitoring and control of mill load for grinding processes [J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(6): 1095 – 1098)
- [12] YING D, LI S R. *Mathematical Models of Mineral Processing* [M]. Changsha: Central South University of Technology Press, 1993: 128 – 162.
- [13] KELSALL D F, REID K J, RESTARICK C. Continuous grinding in a small wet ball mill, Part II – A study of the influence of hold up weight [J]. *Powder Technology*, 1969, 2(3): 162 – 168.
- [14] LUCKIE F T, AUSTIN L G. A review introduction to the solution of the grinding equations by digital computation [J]. *Minerals Science and Engineering*, 1972, 4(7): 24 – 51.
- [15] WANG X L, GUI W H, YANG C H, et al. Wet grindability of an industrial ore and its breakage Parameters estimation using population balances [J]. *International Journal of Mineral processing*, 2011, 98(1/2): 113 – 117.
- [16] 王晓丽. 铝土矿连续球磨过程建模与关键参数优化 [D]. 长沙: 中南大学, 2011: 72 – 90. (WANG Xiaoli. *Modeling of the continuous ball milling process of bauxite and key model parameters optimization* [D]. Changsha: Central South University, 2011: 72 – 90.)

## 作者简介:

马天雨 (1978–), 男, 博士, 研究方向为复杂工业过程建模与优化, E-mail: pynty@yahoo.com.cn;

桂卫华 (1950–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为复杂工业过程建模与优化、分散鲁棒控制, E-mail: gwh@mail.csu.edu.cn.