

具有量化脉冲效应的时滞混杂动态网络同步分析

叶倩^{1,2†}, 朱会宾³, 崔宝同¹

(1. 江南大学 轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122;

2. 无锡职业技术学院 物联网技术学院, 江苏 无锡 214122; 3. 中国科学院 电工研究所, 北京 100190)

摘要: 研究了具有量化脉冲效应的时滞混杂动态网络的同步动力学, 利用偏收缩理论和矩阵测度概念, 并结合量化器的特征, 提出了网络节点实现同步的一般性条件. 与以往大多数基于Lyapunov稳定性方法所提出的结果不同, 利用本文的方法可以消除单个节点和网络耦合中的非线性函数的限制性假设, 从而降低保守性. 本文突出的特征就是综合了网络节点和耦合拓扑中的多重时滞影响和脉冲行为, 并且考虑了脉冲效应在网络传输中的有限通信能力问题, 具有实际意义. 最后, 通过对Lorenz混沌系统作为网络节点的混杂动态网络进行数值模拟, 验证了所得结果的有效性.

关键词: 混杂系统; 同步; 脉冲效应; 量化控制

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Synchronization analysis of delayed hybrid dynamical networks with quantized impulsive effects

YE Qian^{1,2†}, ZHU Hui-bin³, CUI Bao-tong¹

(1. Key Lab of Advanced Process Control for Light Industry (Ministry of Education), Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China;

2. College of Internet of Things Technology, Wuxi Institute of Technology, Wuxi Jiangsu 214122, China;

3. Institute of Electrical Engineering, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: This paper focuses on the synchronization dynamics of delayed hybrid dynamical networks with quantized impulsive effects. Based on partial contraction theory and matrix measure concept, several unified criteria for network synchronization are presented by combining the feature of quantizer. Being different from most of those results in the framework of Lyapunov stability method, the approach in this paper can remove the limitation on the nonlinear function of single node and network coupling term, thus resulting in reducing the conservativeness. The most significant feature of this paper lies in synthesizing multiple delays and impulsive effects in network node and coupling terms. Moreover, the obtained results possess practical significance because of considering the limited communication capability with impulsive effects in network transmission. Finally, numerical simulations for hybrid dynamical networks consisting of Lorenz chaotic systems as network nodes are presented to illustrate the effectiveness of the proposed results.

Key words: hybrid systems; synchronization; impulsive effects; quantized control

1 引言(Introduction)

复杂网络的研究涉及到各个科学技术领域^[1], 如交通网络、基因工程、电力系统、金融经济、通讯网络等等, 其中, 复杂网络的同步性问题是国际上的研究热点, 它可以解释很多自然现象, 并已成为非线性科学领域的一个重要的研究课题.

近年来, 许多学者获得了大量关于复杂网络同步性研究的建设性成果, 并相继提出了一些有效方法, 主要包括: 主稳定函数方法^[2]、矩阵测度分析法^[3]及Lyapunov函数法^[4-7]等. 第1种方法是通过计算变分方程的最大Lyapunov指数来判定网络是否同步, 提供了一种同步数值条件. 第2种方法是由Chen

首次提出的, 已经成功应用于复杂网络的局部同步性分析. 第3种方法用得较为广泛, 是利用Lyapunov稳定性定理来研究复杂网络同步性的方法, 其中网络可由许多不同的特殊特性组成, 如脉冲效应^[8]、时变耦合^[9-11]、变时滞^[12]等. 众所周知, 在复杂动态网络中, 由于不同节点的特性和网络拓扑结构内的通信, 网络中存在时滞现象, 例如流行病网络中病毒扩散和internet拥塞, 节点之间的连接就具有时滞效应. 此外, 现实世界中往往存在诸如信号跳变、信道拥塞、频率改变等因素的干扰, 所以在自然界中普遍存在有着瞬时突变行为的脉冲现象. 这种瞬态的变化过程往往更能深刻地、精确地反映动态

系统的演化规律. 在复杂动态网络的演化过程中, 自然也存在脉冲现象, 例如在手机通信网中经常会发生由于信号不好导致的间断性脉冲效应. 在现实网络中, 系统非常依赖于精度有限的计算机等数字设备, 复杂网络节点的间断性信号往往是数字式的, 通过有限容量的网络传输, 信号在传输前通常需要进行量化, 而量化作用会引入量化误差, 进而对复杂网络的同步性造成影响. 因此, 研究具有量化脉冲效应的时滞混杂动态网络的同步性具有重要的实际意义, 但此类所描述的动力系统相对于一般的连续或离散的动力系统更为复杂, 其理论分析也更具吸引力和挑战性.

针对上述分析, 本文提出了一种具有量化脉冲效应的时滞混杂动态网络, 由于综合了网络节点和耦合拓扑中的多重时滞影响以及网络中可能出现的脉冲行为, 此类网络具有实际意义, 涵盖了许多现有模型, 更具有一般化. 不同于上述Lyapunov方法的分析, 本文利用收缩理论、矩阵测度和平均脉冲间隔概念来研究混杂动态网络的同步性, 可以消除单个节点和网络耦合中的非线性函数的限制性假设, 降低了保守性. 理论分析表明, 混杂网络的同步性能不仅与网络拓扑结构有关, 而且和节点自身的动力学行为有关. 进一步将所得到的结果应用于由Lorenz混沌系统为网络节点的复杂动态网络中, 数值模拟表明了所得理论结果的有效性.

2 混杂脉冲网络的同步分析(Synchronization analysis of hybrid impulsive networks)

2.1 预备知识(Preliminaries)

首先简要介绍一下收缩理论和偏收缩理论的基本概念. 收缩理论^[13]是由美国麻省理工学院的学者Lohmiller和Slotine首次提出. 简单地说, 一个非线性系统如果初始条件或者短暂的扰动会被快速地指数遗忘, 同时系统所有轨迹收敛到某一特定的轨迹, 则该系统称为收缩的.

考虑如下非线性系统:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ 是非线性向量函数, \mathbb{R}_+ 为非负实数集, \dot{x} 表示在 n 维空间 x 和时间 t 中的 n 维速率向量. 假定 $f(x, t)$ 为连续可微的, 则式(1)可转换为恰当微分形式:

$$\delta\dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\delta x, \quad (2)$$

其中 δx 为虚拟位移, 也可称为在固定时刻的无穷小位移. 虚拟位移的概念在物理学和变微分中是普遍存在的. 通常认为, δx 表示线性正切微分形式, $\delta x^T \delta x$ 为相应的二次正切形式^[14], 二者均是关于时间可微的.

现考虑在系统 $\dot{x} = f(x, t)$ 中两个邻近的轨迹, 以及在这两个轨迹间的虚拟位移 δx , 如图1所示.

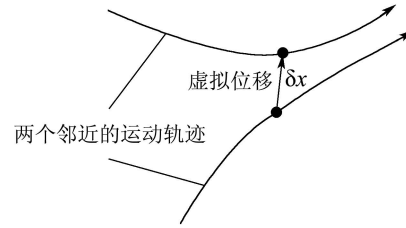


图1 两个邻近轨迹的虚拟动力学行为

Fig.1 Virtual dynamics behavior of two neighboring trajectories

在两个虚拟轨迹间的平方距离定义为 $\delta x^T \delta x$, 则由式(2)可得

$$\frac{d}{dt}(\delta x^T \delta x) = 2\delta x^T \delta \dot{x} = 2\delta x^T \frac{\partial f}{\partial x} \delta x. \quad (3)$$

定义 $\lambda_{\max}(x, t)$ 为雅可比矩阵 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 对称部分的最大特征值, 即 $\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f^T}{\partial x})$ 的最大特征值, 则有

$$\frac{d}{dt}(\delta x^T \delta x) \leq 2\lambda_{\max}(x, t)\delta x^T \delta x, \quad (4)$$

进而可得

$$\|\delta x\| \leq \|\delta x_0\| \exp\left\{\int_0^t \lambda_{\max}(x, s) ds\right\}. \quad (5)$$

若 $\lambda_{\max}(x, t)$ 是一致严格负的, 则由式(3)可得任意无穷小长度 $\|\delta x\|$ 将指数收敛到零. 从而有如下定义.

定义 1^[13] 给定系统方程 $\dot{x} = f(x, t)$, 如果雅可比阵 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在状态空间中的某区域是一致负定的, 则此区域称为系统的收缩区域.

从上述定义可知, 虽然通过分析知此特定轨迹存在, 但对外界来说, 它是完全未知的. 此外, 文献[15]指出收缩理论对于研究复杂网络的同步域问题时并不充分, 所以下面介绍一种更有效的偏收缩理论.

引理 1^[15] 考虑下述非线性系统:

$$\dot{x} = f(x, x, t). \quad (6)$$

假定辅助系统

$$\dot{y} = f(y, x, t), \quad (7)$$

关于 y 是收缩的, 其中 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是非线性向量函数. 如果辅助系统(7)的一个特解满足某一平滑具体的特性, 则原始系统(6)的所有轨迹将指数地满足此特性. 并称原始系统(6)是偏收缩的.

因此, 如果辅助系统(7)关于 y 是收缩的, 并且 $y_1 = y_2 = \dots = y_n = y_\infty$ 是辅助系统的解, 即此为特定轨迹, 则根据收缩理论可知, 系统每一个解 $y(t)$ 将指数收敛到 y_∞ . 显然, 初始系统(6)的解 $x(t)$ 也是辅助系统的一个特解, 因而有 $y(t)$ 指数收敛到 $x(t)$.

类似于切换系统中的平均驻留时间^[16], 下面给出平均脉冲间隔的定义.

定义 2 若存在正整数 N_0 和正函数 $T(t)$ 使得下式成立:

$$\frac{\sum_{j=1}^{N_\zeta(t)} \Delta_j}{T^*} - N_0 \leq N_\zeta(t) \leq \frac{\sum_{j=1}^{N_\zeta(t)} \Delta_j}{T^*} + N_0,$$

则称正标量函数 T^* 表示脉冲序列 $\zeta = \{t_1, t_2, \dots\}$ 的平均脉冲间隔, 其中: $N_\zeta(t)$ 为对于给定脉冲序列 ζ 的脉冲发生次数, Δ_j 表示第 j 个脉冲区间的脉冲间隔周期.

定义 3^[17] 矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的矩阵测度定义如下:

$$\mu(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|I_n + \varepsilon A\| - 1}{\varepsilon},$$

其中: $\|\cdot\|$ 为矩阵范数, I_n 是 n 维单位阵, 则定义

$$\mu_1(A) = \max_j \{a_{jj} + \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|\},$$

$$\mu_2(A) = \frac{1}{2} \lambda_{\max}(A^T + A),$$

$$\mu_\infty(A) = \max_i \{a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|\}.$$

引理 2^[18] 对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 有

$$\|\exp[(A + zB)t]\| \leq \exp[\mu(A + zB)t] \leq \exp[(\mu(A) + \|B\|)t], \quad \forall |z| = 1,$$

其中: z 为复数, $\mu(A)$ 表示矩阵 A 的矩阵测度.

定义矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 和 $B = (b_{ij})_{m \times m}$ 的张量乘如下:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix}.$$

2.2 系统描述(System description)

考虑由 N 个节点构成的具有多时滞的混杂脉冲动态网络, 每个节点代表一个 n 维系统. 系统描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + g(x_i(t - \tau(t))) + \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^N \varepsilon_l c_{ijl}(t) \Gamma_l(t) \times x_j(t - \tau_l(t)), & t \neq t_k, t \geq 0, \\ \Delta x_i(t) = B_k q(x_i(t)), & t = t_k, \\ x_i(\theta) = \varphi_i(\theta), & \theta \in [-\bar{\tau}, 0], \end{cases} \quad (8)$$

其中: $t \in \mathbb{R}_+$, \mathbb{R}_+ 为非负实数集, $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ 是第 i 个节点的状态变量, $i = 1, 2, \dots, N$. f 和 g 为连续可微函数, 时滞 $\tau(t)$ 和 $\tau_l(t)$ 为有界时变的, 且 $0 \leq \tau(t) \leq \tau$, $0 \leq \tau_l(t) \leq \tau_l$ ($l = 1, 2, \dots, m$), $\bar{\tau} = \max\{\tau, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}$, $\varphi_i(\theta)$ 是定义在区间 $[-\bar{\tau}, 0]$ 上的向量初始函数, ε_l 表示耦合强度, $\Gamma_l(t) = (r_{ijl}(t))_{n \times n}$ 为

内耦合矩阵, $C_l(t) = (c_{ijl}(t))_{N \times N}$ 表示外耦合矩阵. 假定

$$c_{iil}(t) = - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ijl}(t), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

$B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是脉冲常数阵, 脉冲序列 t_k 满足: $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq \dots$, $\Delta x_i(t_k) = x_i(t_k^+) - x_i(t_k^-)$, 式中: $x_i(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} x_i(t)$ 表示在脉冲时刻 t_k 的状态跳变. 不失一般性, 假设 $x_i(t_k)$ 左连续. 量化函数 $q: \mathbb{R}^n \times D$ 是分段常值向量函数, 其中 D 是 \mathbb{R}^n 中的有限子集, 即把 \mathbb{R}^n 划分成有限个形如 $\{v \in \mathbb{R}^n: q(v) = i, i \in D\}$ 的量化区域. 本文中采用静态对数量化器, 定义如下:

$$q(v) = \begin{cases} \mu_j, & \frac{1}{1+\nu} \mu_j < v \leq \frac{1}{1-\nu} \mu_j, v > 0, \\ 0, & v = 0, \\ -q(-v), & v < 0, \end{cases} \quad (9)$$

其中: $\nu = \frac{1-\rho}{1+\rho}$, μ_j 构成 q 量化水平集为

$$S = \{\pm \mu_j, \mu_j = \rho^j \mu_0, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \cup \{\pm \mu_0\} \cup \{0\},$$

其中: $0 < \rho < 1$, $\mu_0 > 0$. 对于此类量化器, 显然有 $q(v) - v = \Delta_q v$, 其中量化同步误差 $\Delta_q \in [-\nu, \nu]$.

定义 4 对于混杂脉冲动态网络(8), 如果

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

成立, 则称网络(8)的 N 个节点实现同步.

注 1 混杂网络(8)含有耦合项 $\varepsilon_l c_{ijl}(t) \Gamma_l(t) x_j(t - \tau_l(t))$, 即多重时滞, 与现有文献的一些时滞耦合网络完全不同^[4-6]. 对于此类混杂动态网络(8)的研究现在还没有成熟的理论成果, 这主要是由于脉冲、量化、多重时滞所带来的复杂性. 然而, 采用偏收缩理论来处理此类问题则较为简易.

注 2 混杂网络(8)涵盖了许多现有的网络模型.

i) 当 $g(x_i(t)) = x_i(t)$, $f(x_i(t)) = Ax_i(t) + f(x_i(t))$, $g(x_i(t - \tau(t))) = 0$, $c_{ijl}(t) = G_{ij}$, $\varepsilon_l = 1$, $\Gamma_l = \Gamma$ 及 $\tau_l(t) = \tau(t)$ 时, 系统(8)退化为文献[7]中的如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N G_{ij} \Gamma x_j(t - \tau(t)), & t \neq t_k, \\ \Delta x_i(t) = D_{ik} x_i(t), & t = t_k, \\ x_i(\theta) = \varphi_i(\theta), & \theta \in [-\bar{\tau}, 0]. \end{cases} \quad (10)$$

ii) 当 $g(x_i(t - \tau(t))) = 0$, $c_{ijl}(t) = c_{ij}^{\sigma(t)}$, $\tau_l(t) = d(t)$, $\varepsilon_l = 1$, $\Gamma_l = \Gamma_{\sigma(t)}$ 及 $B_k = 0$, 即系统不包含脉冲时, 系统(8)退化为文献[19]中的如下系统:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N c_{ij}^{\sigma(t)} \Gamma_{\sigma(t)} x_j(t - d(t)). \quad (11)$$

iii) 当 $g(x_i(t)) = x_i(t)$, $f(x_i(t)) = Cx_i(t) + Bf(x_i(t))$, $g(x_i(t - \tau(t))) = 0$, $c_{ijl}(t) = a_{ij}$, $\Gamma_l = \Gamma$, $\varepsilon_l = c$ 及 $x_j(t -$

$\tau_l(t) = x_j(t)$, 系统(8)退化为文献[20]中的如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = Cx_i(t) + Bf(x_i(t)) + \\ \quad c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j(t), t \neq t_k, \\ \Delta x_{ji}(t_k^+) = \mu(x_j(t) - x_i(t)), t = t_k, \\ x_i(\theta) = \varphi_i(\theta), \theta \in [-\bar{\tau}, 0], \end{cases} \quad (12)$$

其中 $\Delta x_{ji}(t_k^+) = x_j(t_k^+) - x_i(t_k^+)$.

基于偏收缩理论, 构造系统(8)的辅助系统如下:

$$\begin{cases} \dot{y}_i(t) = f(y_i(t)) + g(y_i(t - \tau(t))) + \\ \quad \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^N \varepsilon_l c_{ijl}(t) \Gamma_l(t) \times y_j(t - \tau_l(t)) - \\ \quad \alpha \sum_{j=1}^N y_j(t) + \alpha \sum_{j=1}^N x_j(t), t \neq t_k, \\ \Delta y_i(t) = B_k(1 + \Delta_q) y_i(t), t = t_k, \\ y_i(\theta) = \varphi_i(\theta), \theta \in [-\bar{\tau}, 0], \end{cases} \quad (13)$$

其中 α 为待定常数.

辅助系统(13)的一个特解为 $y_1 = y_2 = \dots = y_N$. 根据偏收缩理论, 如果辅助系统(13)关于 y 是收缩的, 则系统(8)的所有系统轨迹将会指数地收敛到同步流 $x_1 = x_2 = \dots = x_N$.

定义 $\delta y_i(t)$ 为系统(13)中第 i 个节点中状态变量的虚拟位移, 则有

$$\begin{cases} \delta \dot{y}_i(t) = \frac{\partial f(y_i(t))}{\partial y_i(t)} \delta y_i(t) + \\ \quad \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^N \varepsilon_l c_{ijl}(t) \Gamma_l(t) \delta y_j(t - \tau_l(t)) + \\ \quad \frac{\partial g(y_i(t - \tau(t)))}{\partial y_i(t - \tau(t))} \delta y_i(t - \tau(t)) - \\ \quad \alpha \sum_{j=1}^N \delta y_j(t), t \neq t_k, \\ \Delta \delta y_i(t) = B_k(1 + \Delta_q) \delta y_i(t), \\ t = t_k. \end{cases} \quad (14)$$

因此, 虚拟系统(14)可以表述为如下形式:

$$\begin{cases} \delta \dot{y}(t) = A \delta y(t) + B \delta y(t - \tau(t)) + \\ \quad \sum_{l=1}^m D_l(t) \delta y(t - \tau_l(t)) - \\ \quad L \delta y(t), t \neq t_k, \\ \Delta \delta y(t) = (1 + \Delta_q) E_k \delta y(t), t = t_k, \end{cases} \quad (15)$$

其中:

$$\begin{aligned} \delta y(t) &= [\delta y_1^T(t) \quad \delta y_2^T(t) \quad \dots \quad \delta y_N^T(t)]^T, \\ A &= \text{diag} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y_1(t)}, \frac{\partial f}{\partial y_2(t)}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_N(t)} \right\}, \\ B &= \text{diag} \left\{ \frac{\partial g}{\partial y_1(t - \tau(t))}, \dots, \frac{\partial g}{\partial y_N(t - \tau(t))} \right\}, \\ D_l(t) &= \varepsilon_l (C_l(t) \otimes \Gamma_l(t)), \\ E_k &= (I_N \otimes B_k), \end{aligned}$$

$$L = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & \alpha & \dots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \dots & \alpha \end{bmatrix}_{Nn \times Nn}.$$

注 3 对于混杂网络(8), 当初始条件未知时, 可以利用收缩理论和偏收缩理论来研究其同步问题. 与绝大部分现有基于Lyapunov稳定性理论的结果所不同的是, 利用收缩理论并不要求了解系统确切吸引域的准确信息. 更重要的是, 对于非线性函数 $f(x_i(t))$ 和 $g(x_j(t - \tau(t)))$ 的假设^[5, 21-22], 例如: $\|f(x(t)) - f(y(t))\| \leq \rho_1 \|x(t) - y(t)\|$, $f^T(x_i) P x_i \leq \varphi(x_i^T P x_i)$, $\|g(x(t - \tau)) - g(y(t - \tau))\| \leq \rho_2 \|x(t - \tau) - y(t - \tau)\|$ 和 $\|x_i(t - \tau)\| \leq \varrho_i x_i(t)$ (ρ_1, ρ_2 及 ϱ_i 为非负常数, φ 为连续函数), 通常是用来获得基于Lyapunov稳定性定理的动态网络同步基本条件, 而这些假设可利用收缩理论来消除, 从而降低保守性, 拓宽结果的应用范围.

引理 3^[23] 对于时滞系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau), \quad (16)$$

其中 A 和 B 是具有适当维数的矩阵, 若系统(16)稳定, 则意味着下述系统:

$$\dot{y}(t) = (A + zB)y(t), \quad \forall |z| = 1 \quad (17)$$

也是稳定的, 其中: $z = e^{j\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $j = \sqrt{-1}$. 反之亦然.

由上述引理, 容易得到下列结果.

引理 4 虚拟系统(15)是收缩的, 当且仅当系统

$$\delta \dot{y}(t) = (A + z_0 B + \sum_{i=1}^m z_i D_i - L + K) \delta y(t), \quad \forall |z_i| = 1 \quad (18)$$

是指数稳定的, 其中: $z_i = \exp(j\omega_i)$, $\omega_i \in [0, 2\pi]$, $j = \sqrt{-1}$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$ 以及

$$K = \begin{cases} 0, & t \in [t_{k-1}, t_k); \\ (1 + \Delta_q) E_k, & t = t_k. \end{cases}$$

2.3 同步性(Synchronization)

下面利用偏收缩理论分析混杂脉冲动态网络同步流形 $x_1 = x_2 = \dots = x_N$ 的全局指数收敛性, 并提出基于平均脉冲间隔的同步条件. 与文献 [5, 21, 24] 中的结果相比, 所得的同步性条件保守性更小.

定理 1 如果存在常数 $\eta < 0$ 使得下列两个条件中的任意一个成立:

- 1) 若 T^* 不存在, $\varrho + \frac{\ln \beta}{\Delta_{i+1}} \leq \eta$;
- 2) 若 T^* 存在, $\varrho + \frac{\ln \beta}{T^*} \leq \eta$;

其中: $i \in \{0, 1, \dots, N_c(t)\}$, $\varrho(t) = \mu(A - L) + \|B\| + \sum_{l=1}^m \|D_l(t)\|$, $\beta = \max_j(\beta_j)$, $\beta_j = \|I + (1 + \Delta_q) E_j\|$,

$j \in \{1, 2, \dots, N_\zeta(t)\}$, $N_\zeta(t), T^*, \Delta_{i+1}$ 的说明见定义 2, 那么混杂脉冲动态网络(8)可利用辅助系统实现同步.

证 根据引理 4, 当 $t \in [t_0, t_1)$ 时,

$$\delta y(t) = \exp\left\{\int_{t_0}^t [A - L + z_0 B + \sum_{l=1}^m z_l D_l(s)] ds\right\} \delta y(t_0). \quad (19)$$

对上式两边同时取范数, 再利用引理 2 可得

$$\begin{aligned} \|\delta y(t)\| &\leq \|\exp\left\{\int_{t_0}^t [A - L + z_0 B + \sum_{l=1}^m z_l D_l(s)] ds\right\}\| \cdot \|\delta y(t_0)\| \leq \\ &\exp\left\{\int_{t_0}^t [\mu(A - L) + \|B\| + \sum_{l=1}^m \|D_l(s)\|] ds\right\} \|\delta y(t_0)\|. \end{aligned} \quad (20)$$

当 $t = t_1$ 时, 有

$$\delta y(t_1^+) = [I + (1 + \Delta_q) E_1] \delta y(t_1), \quad (21)$$

取范数得

$$\begin{aligned} \|\delta y(t_1^+)\| &\leq \|I + (1 + \Delta_q) E_1\| \cdot \|\delta y(t_1)\| \leq \\ &\beta_1 \|\delta y(t_0)\| \exp\left\{\int_{t_0}^{t_1} [\mu(A - L) + \|B\| + \sum_{l=1}^m \|D_l(s)\|] ds\right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

进一步地, 当 $t \in [t_1, t_2)$, 由式(18)得

$$\begin{aligned} \|\delta y(t)\| &\leq \|\exp\left\{\int_{t_1}^t [A - L + z_1 B + \sum_{l=1}^m z_l D_l(s)] ds\right\}\| \|\delta y(t_1^+)\| \leq \\ &\beta_1 \|\delta y(t_0)\| \exp\left\{\int_{t_1}^t [\mu(A - L) + \|B\| + \sum_{l=1}^m \|D_l(s)\|] ds + \int_{t_0}^{t_1} [\mu(A - L) + \|B\| + \sum_{l=1}^m \|D_l(s)\|] ds\right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

类似地, 当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时, 通过递推可得

$$\begin{aligned} \|\delta y(t)\| &\leq \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_k \|\delta y(t_0)\| \cdot \\ &\exp\left\{\int_{t_k}^t \varrho(s) ds + \cdots + \int_{t_0}^{t_1} \varrho(s) ds\right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $\varrho(s) = \mu(A - L) + \|B\| + \sum_{l=1}^m \|D_l(s)\|$.

令 $\beta = \max_j(\beta_j)$, 则由式(24)得

$$\begin{aligned} \|\delta y(t)\| &\leq \|\delta y(t_0)\| \beta^{-1} \beta^{k+1} \times \\ &\exp\left(\sum_{j=0}^{N_\zeta(t)} \varrho \Delta_{j+1}\right). \end{aligned} \quad (25)$$

下面首先考虑平均脉冲间隔 T^* 不存在的情形, 即脉冲集合 (t_k, E_k) 是不可数的. 因此,

$$\begin{aligned} \|\delta y(t)\| &\leq \\ \|\delta y(t_0)\| &\beta^{-1} \prod_{j=0}^{N_\zeta(t)} \exp(\ln \beta + \varrho \Delta_{j+1}) \leq \\ \frac{\|\delta y(t_0)\|}{\beta} &\exp\left[\sum_{j=0}^{N_\zeta(t)} (\ln \beta + \varrho \Delta_{j+1})\right] \leq \\ \frac{\|\delta y(t_0)\|}{\beta} &\exp\left[\sum_{j=0}^{N_\zeta(t)} \left(\frac{\ln \beta}{\Delta_{j+1}} + \varrho\right) \Delta_{j+1}\right] \leq \\ \frac{\|\delta y(t_0)\|}{\beta} &\exp[\eta(t - t_0)], \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $\eta = \max_j \left(\frac{\ln \beta}{\Delta_j} + \varrho\right)$.

再考虑平均脉冲间隔 T^* 存在情况, 需要分别讨论如下两种情形: $\beta > 1$ 和 $\beta \leq 1$.

情形 1 $\beta > 1$. 此时, 离散动力学是不稳定的, 即非同步脉冲. 由式(25)可得

$$\begin{aligned} \|\delta y(t)\| &\leq \|\delta y(t_0)\| \beta^{-1} \beta^{\left(\frac{1}{T^*} \sum_{j=0}^{N_\zeta(t)} \Delta_{j+1} + N_0\right)} \times \\ &\exp\left(\sum_{j=0}^{N_\zeta(t)} \varrho \Delta_{j+1}\right) = \\ \|\delta y(t_0)\| &\beta^{-1} \beta^{N_0} \exp\left(\sum_{j=0}^{N_\zeta(t)} \varrho \Delta_{j+1}\right) \times \\ &\exp\left(\frac{\sum_{j=0}^{N_\zeta(t)} \Delta_{j+1}}{T^*} \ln \beta\right) \leq \\ \|\delta y(t_0)\| &\beta^{N_0-1} \exp\left(\eta \sum_{j=0}^{N_\zeta(t)} \Delta_{j+1}\right) = \\ \|\delta y(t_0)\| &\beta^{-1} \beta^{N_0} \exp[\eta(t - t_0)]. \end{aligned} \quad (27)$$

其中 $\eta = \varrho + \frac{\ln \beta}{T^*}$.

情形 2 $\beta \leq 1$. 此时, 离散动力学是稳定的, 即同步脉冲. 由式(25)可得

$$\begin{aligned} \|\delta y(t)\| &\leq \|\delta y(t_0)\| \beta^{-1} \beta^{\left(\frac{\sum_{j=0}^{N_\zeta(t)} \Delta_{j+1}}{T^*} - N_0\right)} \times \\ &\exp\left(\sum_{j=0}^{N_\zeta(t)} \varrho \Delta_{j+1}\right) \leq \\ \|\delta y(t_0)\| &\beta^{-1} \beta^{-N_0} \exp[\eta(t - t_0)]. \end{aligned} \quad (28)$$

联合式(27)和(28)可得

$$\begin{aligned} \|\delta y(t)\| &\leq \max\{\beta^{-N_0}, \beta^{N_0}\} \|\delta y(t_0)\| \beta^{-1} \times \\ &\exp[\eta(t - t_0)]. \end{aligned} \quad (29)$$

由 ϱ 的定义知, 显示选择参数 α (或 L), 使得 $\varrho +$

$\frac{\ln \beta}{\Delta_{i+1}} < 0$ (或者当 T^* 存在时, $\varrho + \frac{\ln \beta}{T^*} < 0$) 成立. 于是, 存在 $\eta < 0$ 使得定理1中的条件成立. 因此, 系统(18)是全局指数稳定的. 由引理4可知, 混杂虚拟系统(15)是收缩的, 从而利用偏收缩引理1知, 系统(8)的所有轨迹全局指数收敛到同步流 $x_1 = x_2 = \dots = x_N$. 证毕.

注4 定理1建立了确保混杂脉冲网络(8)全局指数同步的一般性判据, 同时考虑了脉冲 $\frac{\ln \beta}{\Delta_i}$ (或者 $\frac{\ln \beta}{T^*}$) 对系统的影响, 并且同步性判据中不需要对 $\frac{\ln \beta}{\Delta_i}$ (或者 $\frac{\ln \beta}{T^*}$) 和 ϱ 额外施加限制性条件. 更重要的是, 与现有一些基于Lyapunov稳定性定理结果相比, 其优势在于, 定理1中对于正定函数 $V(t)$ 的导数在区间 $[t_{k-1}, t_k)$ 中的符号没有任何要求, 而文献[24]中的判定条件要求 $V(t)$ 的导数在上述区间中为负, 即连续子系统在 $[t_{k-1}, t_k)$ 中是渐近稳定的. 因此, 定理1的保守性更小, 使用范围更广泛.

注5 定理1的证明利用了平均脉冲间隔的概念, 需要注意的是当 $\beta > 1$ 时 (即离散子系统是非收缩的或不稳定的情况), 脉冲不利于系统实现同步, 所以要求脉冲不能出现的太频繁, 定理1也给出了平均脉冲间隔的上界. 当 $\beta \leq 1$ 时 (即离散子系统是收缩的或稳定的情况), 脉冲可以使系统实现同步, 所以希望脉冲出现的频率要尽可能高, 本文也得到了平均脉冲间隔的下界. 定理1虽然只是考虑混杂网络的完全同步问题, 但基于平均脉冲间隔和收缩理论可以很自然地将其推广到其他同步类型的研究中, 比如文献[21]中研究的广义同步等.

推论1 对于网络(15), 如果存在常数 $\eta < 0$ 使得

$$\varrho + \frac{\ln \beta}{\inf_k \{t_{k+1} - t_k\}} \leq \eta; \quad (30)$$

2) 当 $\beta \leq 1$ 时,

$$\varrho + \frac{\ln \beta}{\sup_k \{t_{k+1} - t_k\}} \leq \eta; \quad (31)$$

则混杂脉冲网络(8)可实现同步, 其中: $k \in \{0, 1, \dots, N_\zeta(t)\}$, β 和 ϱ 的定义与定理1中说明一致.

证 当 $\beta > 1$ 时, 希望脉冲发生的频率不要太高. 因此, 定理1的条件1)中的平均脉冲间隔 T^* 可由 $\inf_k \{t_{k+1} - t_k\}$ 代替, 从而可得到式(30); 当 $\beta \leq 1$ 时, 证明类似, 由于篇幅限制省略. 证毕.

注6 由推论1可知, 平均脉冲间隔 T^* 满足

$$\inf_k \{t_{k+1} - t_k\} < T^* < \sup_k \{t_{k+1} - t_k\}.$$

当 $\beta > 1$ 时, 可得 $\ln \beta > 0$. 可见, 与推论1条件1)相比, 定理1中的条件1)的保守性更小. 当 $\beta \leq 1$ 时, 可得 $\ln \beta \leq 0$. 类似可见, 定理1中的条件2)比推论1中的条件2)的保守性更少. 因此, 与基于推论1思路的文献[4-5, 7, 21, 23-24]相比, 定理1的保守性更小, 适用范围更广.

基于上述讨论, 下面给出一个更少保守性的结果.

定理2 若下列条件之一成立:

$$1) \text{ 若 } T^* \text{ 不存在, } \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\varrho(s) + \frac{\ln \beta}{\Delta_k}) ds = -\infty;$$

$$2) \text{ 若 } T^* \text{ 存在, } \int_{t_0}^{\infty} (\varrho(s) + \frac{\ln \beta}{T^*}) ds = -\infty;$$

则混杂脉冲网络(8)实现同步, 其中: $\beta = \max_j (\beta_j)$, $\beta_j = \|I + (1 + \Delta_q)E_j\|$, $j = 1, 2, \dots, k$, $\varrho(t) = \mu(A - L) + \|B\| + \sum_{l=1}^m \|D_l(t)\|$.

证 与定理1证明类似, 所以这里只考虑 T^* 不存在的情形. 由式(26)可得

$$\begin{aligned} \|\delta y(t)\| &\leq \frac{\|\delta y(t_0)\|}{\beta} \exp\left\{\sum_{j=0}^{N_\zeta(t)} \left(\frac{\ln \beta}{\Delta_{j+1}} + \varrho\right) \Delta_{j+1}\right\} = \\ &\frac{\|\delta y(t_0)\|}{\beta} \exp\left\{\int_{t_0}^t \left(\frac{\ln \beta}{\Delta_{k+1}} + \varrho\right) ds + \dots + \right. \\ &\left. \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\ln \beta}{\Delta_1} + \varrho\right) ds\right\}, \end{aligned} \quad (32)$$

可见, 若

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\varrho + \frac{\ln \beta}{\Delta_k}) ds = -\infty,$$

则当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $\|\delta y(t)\| \rightarrow 0$, 从而混杂脉冲网络(8)可实现同步. 证毕.

3 数值例子(Numerical example)

对于收缩离散子系统 (即对应 $\beta \leq 1$ 的情况), 给出数值例子来验证所得结论的有效性.

例1 考虑由 N 个Lorenz混沌系统为动力节点组成的一个复杂网络, 各节点的Lorenz系统描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = 10(x_{i2} - x_{i1}), \\ \dot{x}_{i2} = 28x_{i1} - x_{i2} - x_{i1}x_{i3}, \\ \dot{x}_{i3} = x_{i1}x_{i2} - \frac{8}{3}x_{i3}, \end{cases} \quad (33)$$

其中 $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})^T \in \mathbb{R}^3$ 是第 i 个节点的状态向量. 系统(33)呈现混沌态, 如图2所示.

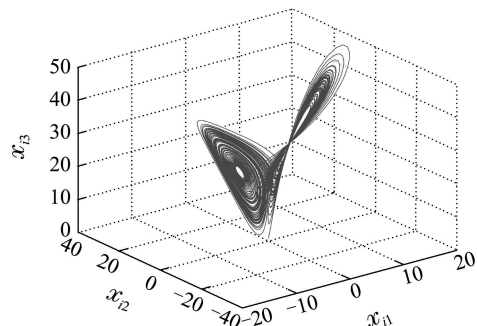


图2 系统(33)的混沌吸引子, 初始条件 $x_i = (0.4, 0.6, 0.5)^T$.
Fig. 2 The chaotic attractor of system (33) with initial condition $x_i = (0.4, 0.6, 0.5)^T$.

考虑如下包含有 $N = 5$ 个节点的混杂脉冲网络,

其离散动力学是收缩的(即 $\beta \leq 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + f(x_i(t)) + \sum_{l=1}^4 \sum_{j=1}^5 \varepsilon_l c_{ijl}(t) \times \\ \Gamma(t)x_j(t - \tau_l(t)), & t \neq t_k, \\ \Delta q(x_i(t)) = B_k x_i(t), & t = t_k, \end{cases} \quad (34)$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}, \quad f(x_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_{i1}x_{i3} \\ x_{i1}x_{i2} \end{bmatrix}.$$

耦合时滞为

$$\begin{aligned} \tau_1(t) &= 0, \quad \tau_2(t) = 0.1 + 0.05 \sin t, \\ \tau_3(t) &= 0.2 + 0.1 \sin t, \quad \tau_4(t) = 0.3 + 0.2 \sin t. \end{aligned}$$

内耦合阵 $\Gamma(t) = \Gamma = I_3$, 外耦合阵 $C_1(t)$ 为

$$C_1(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$C_2(t) = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$C_3(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C_4(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

选取耦合强度 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1, \alpha = 2$. 由于Lorenz混沌系统的状态都是有界的^[25], 即 $|x_{i1}|, |x_{i2}| \leq 28.918, |x_{i3}| \leq 56.918$, 所以

$$\begin{aligned} \varrho &= \mu(I_N \otimes A + I_N \otimes J_1 - L) + \\ &\sum_{l=1}^4 \|C_l(t) \otimes \Gamma_l(t)\| = 11.7768, \end{aligned}$$

其中

$$J_1 = \frac{\partial f(x_i(t))}{\partial x_i(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x_{i3} & 0 & -x_{i1} \\ x_{i2} & x_{i1} & 0 \end{bmatrix}.$$

考虑脉冲控制阵 $B_k = -0.8I_3$, 并设计量化器(9)使

得 $\nu = 0.1$. 则有 $\beta = 0.28 < 1$, 取平均脉冲间隔 $T^* = 0.1$, 脉冲序列分布如图3所示.



图 3 同步脉冲序列

Fig. 3 Synchronization impulsive sequences

由定理1中的条件2)可得

$$\varrho + \frac{\ln \beta}{T^*} = -0.9529 < 0,$$

所以混杂脉冲网络(34)在收缩离散动力学的作用下可实现同步. 为了观察仿真效果, 定义同步误差

$$e_j(t) = \|x_{ij}(t) - \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_{ij}(t)\|,$$

其中: $i = 1, 2, 3, 4, 5; j = 1, 2, 3$. 系统(34)的同步误差如图4所示. 由图4可以看出, 系统(34)在量化脉冲的作用下实现了同步.

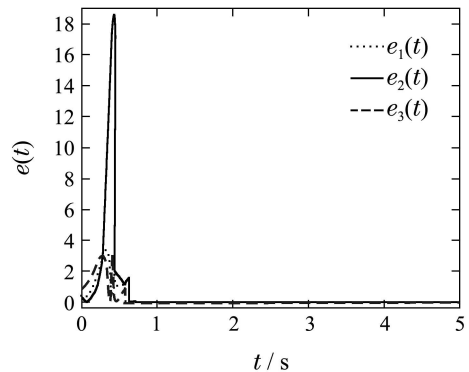


图 4 动态网络(34)在量化脉冲作用下的同步误差

Fig. 4 Synchronization errors of the dynamical network (34) under quantized impulsive control

注意到图3所示脉冲序列中最大的脉冲间隔为 $\Delta_{\max} = \sup\{t_k - t_{k-1}\} = 0.5127$. 如果用 $\sup\{t_k - t_{k-1}\}$ 代替推论1中的平均脉冲间隔 T^* , 则有

$$\varrho + \frac{\ln \beta}{\sup\{t_k - t_{k-1}\}} = 9.2939 > 0,$$

根据推论1, 对于所有 $t \geq t_0$, 要求

$$\varrho + \frac{\ln \beta}{\sup\{t_k - t_{k-1}\}} < 0,$$

所以对于由此脉冲序列图3构成的网络, 利用推论1不能保证混杂网络(34)各节点之间的同步. 因此, 与

基于推论1的文献[7, 21]相比, 基于平均脉冲间隔的定理1结论的保守性更小。

4 结论(Conclusions)

本文研究了一种具有量化脉冲效应的时滞混杂动态网络的同步性, 此类网络模型涵盖了许多现有模型, 更具有一般化。利用偏收缩理论、矩阵测度和平均脉冲间隔概念, 提出了网络节点实现同步的一般性条件, 与以往大多数基于Lyapunov稳定性方法所提出的结果不同, 利用本文的方法可以消除单个节点和网络耦合中的非线性函数的限制性假设, 从而降低保守性。最后通过将所得到的结果应用于由Lorenz混沌系统为网络节点的复杂动态网络, 数值分析和计算机仿真结果表明了所得结果的有效性。

参考文献(References):

- [1] ARENAS A, DIAZ-GUILERA A, KURTHS J, et al. Synchronization in complex networks [J]. *Physics Reports*, 2008, 469(3): 93 – 153.
- [2] PECORA L M, CARROLL T L. Master stability functions for synchronized coupled systems [J]. *Physical Review Letters*, 1998, 80(10): 2109 – 2112.
- [3] CHEN M Y. Some simple synchronization criteria for complex dynamical networks [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, 2006, 53(11): 1185 – 1189.
- [4] CAI S M, ZHOU J, XIANG L, et al. Robust impulsive synchronization of complex delayed dynamical networks [J]. *Physics Letters A*, 2008, 372(30): 4990 – 4995.
- [5] YANG Y Q, CAO J D. Exponential synchronization of the complex dynamical networks with a coupling delay and impulsive effects [J]. *Nonlinear Analysis – Real World Applications*, 2010, 11(3): 1650 – 1659.
- [6] YU W W, CAO J D, LÜ J H. Global synchronization of linearly hybrid coupled networks with time-varying delay [J]. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2008, 7(1): 108 – 133.
- [7] DAI Y, CAI Y, XU X. Synchronisation analysis and impulsive control of complex networks with coupling delays [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2009, 3(9): 1167 – 1174.
- [8] ZHOU J, XIANG L, LIU Z R. Synchronization in complex delayed dynamical networks with impulsive effects [J]. *Physica A – Statistical Mechanics and Its Applications*, 2007, 384(2): 684 – 692.
- [9] SORRENTINO F, OTT E. Adaptive synchronization of dynamics on evolving complex networks [J]. *Physical Review Letters*, 2008, 100(11): 114101-1 – 114101-4.
- [10] 杨月全, 余星火, 张天平. 时变内耦合复杂网络的平衡态同步smart变结构控制 [J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(2): 181 – 187. YANG Y Q, YU X H, ZHANG T P. Smart variable structure control of complex network with time-varying inner-coupling matrix to its equilibrium [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(2): 181 – 187.
- [11] 王磊, 戴华平, 孙优贤. 时变复杂动力学网络的同步控制 [J]. *控制理论与应用*, 2008, 25(4): 603 – 607. (WANG Lei, DAI Huaping, SUN Youxian. Synchronization control of a time-varying complex dynamical network [J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(4): 603 – 607.)
- [12] 郭凌, 年晓红, 潘欢. 一般耦合结构时变时滞复杂网络的同步准则 [J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(1): 73 – 78. (GUO Ling, NIAN Xiaohong, PAN Huan. Synchronization criteria for general coupling complex networks with time varying delay [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(1): 73 – 78.)
- [13] LOHMILLER W, SLOITINE J J E. On contraction analysis for nonlinear systems [J]. *Automatica*, 1998, 34(6): 683 – 696.
- [14] SCHWARTZ L. *Analyse* [M]. Paris: Hermann, 1993.
- [15] WANG W, SLOITINE J J E. On partial contraction analysis for coupled nonlinear oscillators [J]. *Biological Cybernetics*, 2005, 92(1): 38 – 53.
- [16] HESPANHA J P, MORSE A S. Stability of switched systems with average dwell-time [C] // *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*. Phoenix, Arizona USA: IEEE Standards Office, 1999: 2655 – 2660.
- [17] ZHANG Y P, SUN J T. Chaotic synchronization and anti-synchronization based on suitable separation [J]. *Physics Letters A*, 2004, 330(6): 442 – 447.
- [18] LANCASTER P, TISMENETSKY M. *The Theory of Matrices with Applications* [M]. New York: Academic Press, 1985.
- [19] LIU T, ZHAO J, HILL D J. Exponential synchronization of complex delayed dynamical networks with switching topology [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 2010, 57(11): 2967 – 2980.
- [20] LU J Q, HO D W C, CAO J D. A unified synchronization criterion for impulsive dynamical networks [J]. *Automatica*, 2010, 46(7): 1215 – 1221.
- [21] CHEN J, LU J A, WU X Q, et al. Generalized synchronization of complex dynamical networks via impulsive control [J]. *Chaos*, 2009, 19(4): 043119.
- [22] GUAN Z H, LIU Z W, FENG G, et al. Synchronization of complex dynamical networks with time-varying delays via impulsive distributed control [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 2010, 57(8): 2182 – 2195.
- [23] HMAMED A. Further results on the robust stability of uncertain time-delay systems [J]. *International Journal of Systems Science*, 1991, 22(3): 605 – 614.
- [24] XU H L, TEO K L. Exponential stability with L_2 -gain condition of nonlinear impulsive switched systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(10): 2429 – 2433.
- [25] LI D, LU J, WU X, et al. Estimating the ultimate bound and positively invariant set for the Lorenz system and a unified chaotic system [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2006, 323(2): 844 – 853.

作者简介:

- 叶倩 (1985–), 女, 博士, 主要研究方向为混杂系统理论, E-mail: yeqian85@gmail.com;
- 朱会宾 (1984–), 男, 博士, 主要研究方向为复杂网络, E-mail: hbzhu8@gmail.com;
- 崔宝同 (1960–), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为复杂系统控制理论与应用, E-mail: btcui@vip.sohu.com.