

时滞扰动Lorenz系统及其同步电路实现

崔智勇^{1†}, 陈正诚²

(1. 江西理工大学 软件学院, 江西 南昌 330013; 2. 国立东华大学 资讯工程系, 台湾 花莲 97401)

摘要: 以Lorenz系统为模型, 构造一个具有多个正的Lyapunov指数的四维时滞混沌系统, 分析了其基本动力学行为, 并利用滤波网络技术对新系统进行了可切换电路设计. 然后, 基于Lyapunov方法给出了两个相同高维时滞系统的耦合同步条件, 根据所提出的同步方法设计了自同步控制电路. 实验表明了该时滞系统具有丰富的动力学行为, 所设计的同步控制电路结构简单, 易于实现, 能够通过调节部分元件参数获得较好的同步性能.

关键词: 混沌系统; 时滞; 电路仿真; 同步

中图分类号: O415.5 **文献标识码:** A

Time-delay perturbation Lorenz system and its synchronous circuit realization

CUI Zhi-yong^{1†}, CHEN Zheng-cheng²

(1. School of Software, Jiangxi University of Science and Technology, Nanchang Jiangxi 330013, China;

2. Department of Computer Science and Information Engineering, National Dong Hwa University, Hualien Taiwan 97401, China)

Abstract: A four-dimensional chaotic time-delay system with multiple positive Lyapunov exponents is presented based on Lorenz system. Some of its basic dynamical properties are studied, and the switchable circuit of the new system is designed by using filter network technique. The conditions for synchronization between two identical higher-order coupled time-delay systems are put forward by using Lyapunov method. The proposed method is also applied to design synchronous control circuits. Experiment results show that this time-delay system has abundant dynamical behaviors; the designed controller is easily to be implemented in practice; better synchronous performances can be achieved by adjusting component values.

Key words: chaotic systems; time delay; circuit simulation; synchronization

1 引言(Introduction)

混沌信号具有非周期、连续宽带频谱、似噪声等特性^[1], 可提供一个丰富的信号设计和发生机制. 时滞混沌系统可产生无穷维的状态空间, 即使低维系统也能够产生多个正的Lyapunov指数, 使系统具有复杂的随机性和不可预测性等动力学行为^[2-5]. 自20世纪90年代Pecora和Carroll提出混沌同步思想以来, 相继出现了耦合同步、自适应同步和广义同步等方案, 混沌同步的稳定性控制及在保密通信中的应用成为研究人员关注的热点^[6-8].

目前混沌科学逐渐从理论研究过渡到实际应用阶段, 电路实现是证实混沌吸引子存在并运用于工程领域的最直接手段^[9-11]. 如文献[9]提出了一个新的高维混沌系统的电路设计方案; 文献[10-11]通过全通滤波电路实现了时滞系统的仿真; 文献[12]实现新的三维系统的混沌电路和同步控制电路, 但三维混沌系统存在的正的Lyapunov指数个数较少、系

统复杂性不高, 若应用在保密通信中易被破译. 四维系统具有更丰富的变形方式, 研究表明维数高于三维的混沌系统可产生超混沌现象^[13], 而本文四维时滞Lorenz系统可在不局限于系统维数的同时产生多个正的Lyapunov指数, 既获得了高可靠性, 又避免了成本的提高和同步的难度, 使其控制电路具有潜在的应用前景.

本文在四维Lorenz系统模型基础上, 通过引入时滞线性扰动项构造出新的混沌系统, 拓扑结构简单但具有多个正的Lyapunov指数, 可产生极高随机性的时间序列. 在Multisim平台实现了时滞系统的切换电路, 通过同步控制电路的仿真实验验证了设计的有效性, 为后续混沌加密通信系统的研究奠定了基础.

2 时滞扰动Lorenz系统(Time-delay perturbation Lorenz system)

以Lorenz系统为基础, 利用线性反馈扩展系统维数的方法, 构造四维混沌系统的数学模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(y(t) - x(t)), \\ \dot{y}(t) = bx(t) + cy(t) - x(t)z(t) + w(t), \\ \dot{z}(t) = x(t)y(t) - dz(t), \\ \dot{w}(t) = -hx(t). \end{cases} \quad (1)$$

显然系统仅存在两个非线性项, 其中: $x(t), y(t), z(t), w(t)$ 为系统的状态变量; a, b, c, d 和 h 为系统的控制参数. 当 $a = 35, b = 7, c = 12, d = 3, h = 5$ 时, 系统进入混沌状态, 在以上数学模型中引入时滞扰动项

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(y(t) - x(t)) + px(t - \tau), \\ \dot{y}(t) = bx(t) + cy(t) - x(t)z(t) + w(t), \\ \dot{z}(t) = x(t)y(t) - dz(t), \\ \dot{w}(t) = -hx(t). \end{cases} \quad (2)$$

式(2)中参数 p, τ 分别代表系统的延滞控制参数

与延滞时间, 对其适当赋值可使新系统进入混沌状态. 取参数 $p = 3, \tau = 1.4 \text{ ms}$, 初始函数 $x_0(t) = -20, y_0(t) = 0, z_0(t) = 0, w_0(t) = 15, t \in [-\tau, 0]$, 系统将表现出新的混沌运动, 如图1所示. 其输出变量 $x(t)$ 的混沌时间序列和该序列的功率谱如图2所示.

Lyapunov指数是状态空间内吸引子相近轨迹扩展或收缩变化的定量描述, 新系统Lyapunov指数为 $\lambda_1 = 0.6607, \lambda_2 = 0.0524, \lambda_3 = -0.6784, \lambda_4 = -25.3620$, 存在两个正的指数, 且最大Lyapunov指数为0.6607. 超混沌Lorenz系统虽然存在两个正的Lyapunov指数0.0120和0.0734, 但是其最大Lyapunov指数0.0734与新系统的0.6607差距较大, 反映出新系统动态行为比原混沌吸引子更为丰富, 这种特性在信息安全通信中尤为受用. 由图1-2和Lyapunov指数图3可知引入时滞扰动项的系统可产生混沌运动.

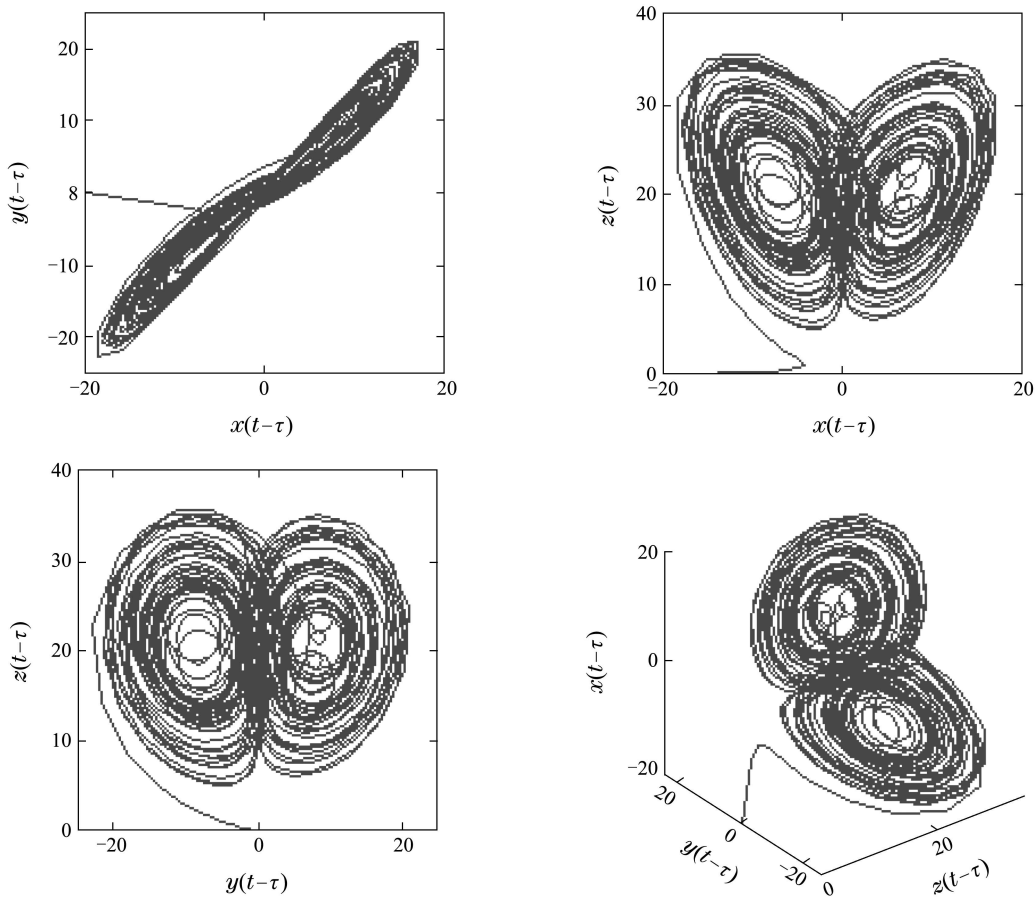


图 1 时滞Lorenz系统混沌动力学行为

Fig. 1 Phase portraits of time-delay Lorenz chaotic attractor

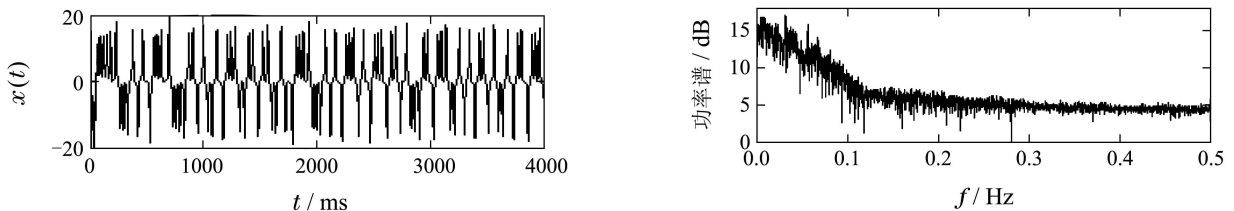


图 2 时滞系统变量 $x(t)$ 的混沌时间序列及功率谱

Fig. 2 The state variables $x(t)$ and its power spectrum

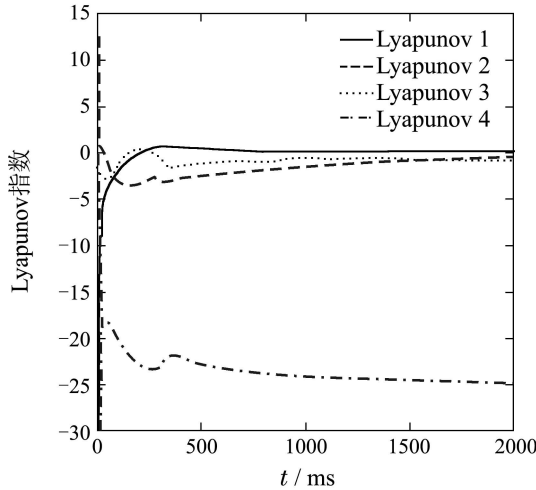


图3 时滞系统的Lyapunov指数

Fig. 3 Lyapunov exponent in the time-delay system

令方程(2)的右端为零来求解平衡点, 解得系统(2)仅有一个平衡点 $S_0 = (0, 0, 0, 0)$. 除平衡点外, 通过相平面的每一点只能有一条轨线, 即轨线不能相交. 在平衡点 S_0 上线性化系统(2), 构造特征方程为

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + a - pe^{-\lambda\tau} & -a & 0 & 0 \\ z_0 - b & \lambda - c & x_0 & -1 \\ -y_0 & -x_0 & \lambda + d & 0 \\ h & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = 0. \quad (3)$$

展开行列式后得到

$$\lambda^4 + (a - c + d)\lambda^3 + (ad - ac - ab - cd + az_0 + x_0^2)\lambda^2 + (ah + abd - acd + adz_0 +$$

$$ax_0y_0 + ax_0^2)\lambda + adh(-p\lambda^3 + cp\lambda^2 - dp\lambda^2 - px_0^2\lambda + cdp\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0,$$

$$\lambda^4 + 26\lambda^3 - 596\lambda^2 - 350\lambda + 525 + (-3\lambda^3 + 27\lambda^2 + 108\lambda)e^{-0.0014\lambda} = 0. \quad (4)$$

在固定参数条件下, 解得特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 \approx 0.7811$, 特征值均为正实数, 说明系统(2)在平衡点 S_0 处是不稳定的, 这为混沌状态的产生创造了可能性.

3 时滞系统的电路仿真(Circuit implementation in time-delay system)

振荡器电路是混沌系统最直接的物理实现方式, 可直观地验证系统的动力学行为. 根据式(1)-(2)运用Multisim软件对混沌系统的切换振荡器电路进行了仿真, 如图4所示.

电路共有5个相互耦合的通道, 分别完成4个系统变量 V_x, V_y, V_z, V_w 的积分运算和变量 $x(t)$ 的时滞功能. 通过开关 $K1$ 的通断可实现时滞系统与非时滞系统之间的切换, 开关 $K1$ 断开时表现扩展维Lorenz系统(1)的混沌动力学行为, 而导通时显示新时滞系统(2)的变化. G_1, G_2 分别是 $y(t), z(t)$ 变量通道中模拟乘法器的输出增益, 均设置为0.1. 电阻 $R_1, R_2, R_6, R_7, R_{14}, R_{16}, R_{21} = 10 \text{ k}\Omega, R_5, R_{10}, R_{15}, R_{17}, R_{22} = 100 \text{ k}\Omega, R_{11}, R_{13} = 1 \text{ k}\Omega, R_4 = 35 \text{ k}\Omega, R_8 = 15 \text{ k}\Omega, R_9 = 8.3 \text{ k}\Omega, R_{20} = 20 \text{ k}\Omega$, 积分器电容均为 $1 \mu\text{F}$. 通过节点电压法分析电路发现, 由这些参数组成的电路模型与系统(2)完全一致.

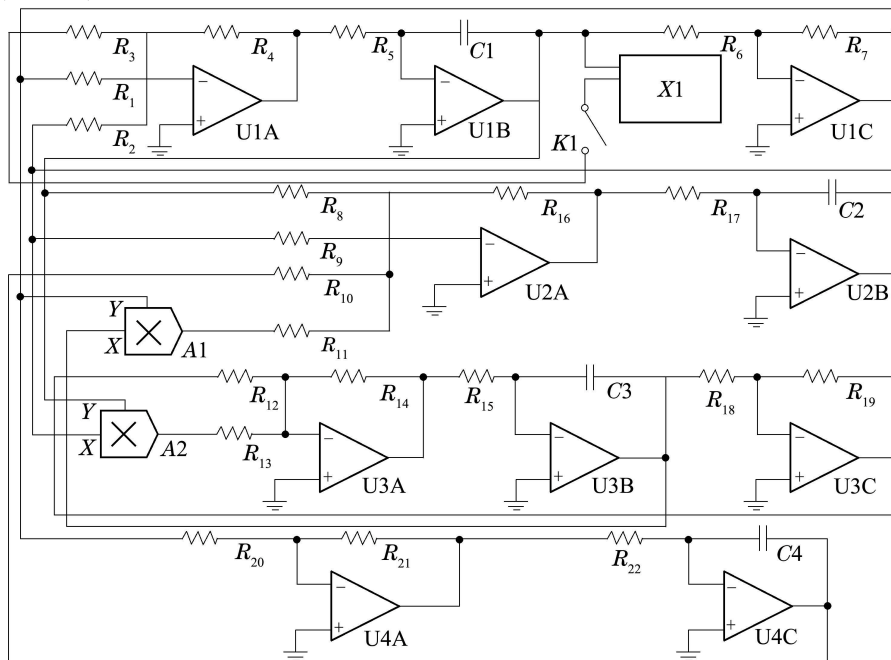


图4 切换混沌系统的振荡器电路

Fig. 4 Switchable chaotic time-delay circuit simulation

时滞功能主要由T型LCL滤波器网络构成, 如图5所示. T型滤波器包括两个电感器L和一个电容器C, 理想状态下在阻带可提供18dB/倍频的插入

损耗. 低通滤波器网络会受到信号频率的限制, 该时滞单元在截止频率 $f_c = 1\text{ kHz}$ 以下时具有平稳特性.

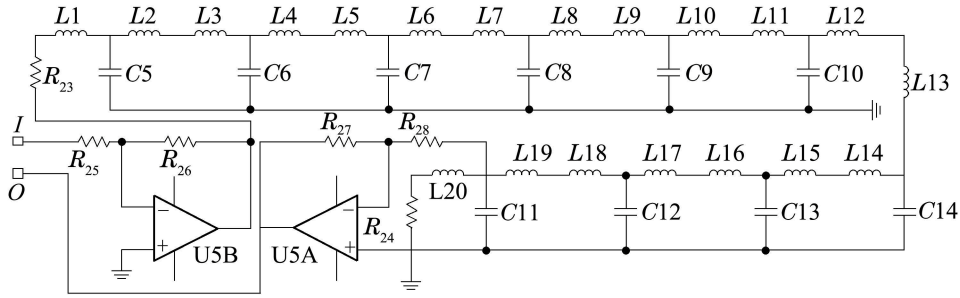


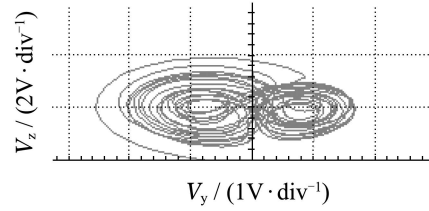
图 5 时滞单元电路

Fig. 5 The design of time-delay cell

当噪声频率和有用信号频率接近时, 单级滤波器无法达到预期效果. 此时需要选用多级滤波器来避免噪声干扰, 在输入与输出之间设 $n = 10$ 组T型滤波器, 端口处配置匹配电阻 $R_{23}, R_{24} = 1\text{ k}\Omega$, 且通带内的特性阻抗为常数. 另取 $R_{25}, R_{26}, R_{28} = 10\text{ k}\Omega, R_{27} = 22\text{ k}\Omega$, 通过式(5)近似计算出时滞值

$$\tau = n(\sqrt{2LC}). \quad (5)$$

取 $L = 20\text{ mH}, C = 500\text{ nF}$, 推算知 $\tau \approx 1.4\text{ ms}$, 即构造新系统的时滞值. 在文献[14]设计的延迟电路存在衰减高频信号的缺点, 但测试本文确定参数下图5所示电路发现, V_x 变量通道频率基本维持在 700 Hz , 远小于低通滤波器的截止频率 f_c , 确保信号以低损耗通过时滞通道. 将图4中的积分电容同时缩减到 1 nF , 可保证原系统在性质不变的情况下输出信号频率提高1000倍, 有利于在模拟示波器下观察混沌相图.



(c) $V_y - V_z$

图 6 时滞吸引子的平面相图

Fig. 6 Image of time-delay chaotic attractor

4 耦合同步实现(Coupled synchronous implementation)

选择时滞系统(2)为驱动系统, 写成矩阵形式:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + f(X(t), t) + PX(t - \tau), \quad (6)$$

这里

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \\ X_4(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ -h & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$f(X(t), t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -X_1(t)X_3(t) \\ X_1(t)X_2(t) \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

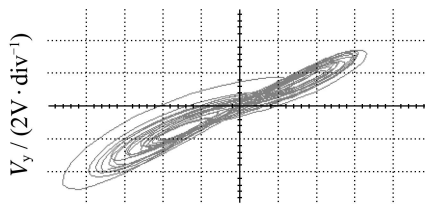
与系统(6)耦合的系统为

$$\dot{\tilde{X}}(t) = A\tilde{X}(t) + f(\tilde{X}(t), t) + P\tilde{X}(t - \tau) + Q(X(t) - \tilde{X}(t)). \quad (7)$$

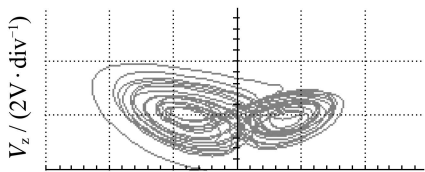
记 $e_i(t) = X_i(t) - \tilde{X}_i(t)$, 则耦合系统(7)与系统(6)的误差系统为

$$\dot{e}(t) = Ae(t) - Pe(t - \tau) + f(X(t), t) - f(\tilde{X}(t), t) - Qe(t), \quad (8)$$

其中



(a) $V_x - V_y$



(b) $V_x - V_z$

$$f(X(t), t) - f(\tilde{X}(t), t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -X_1(t)X_3(t) + \tilde{X}_1(t)\tilde{X}_3(t) \\ X_1(t)X_2(t) - \tilde{X}_1(t)\tilde{X}_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -X_3(t) & 0 & -\tilde{X}_1(t) & 0 \\ X_2(t) & \tilde{X}_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \\ e_4(t) \end{bmatrix} = Ke(t).$$

在耦合系统(7)中, 取状态变量的函数矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -X_3(t) & X_2(t) & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $q \geq 0$ 为待定参数, 这时称系统(7)与式(6)是非线性耦合的, 误差系统(8)可表示为

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + (K - Q)e(t) - Pe(t - \tau), \quad (9)$$

$$K - Q = \begin{bmatrix} 0 & X_3(t) & -X_2(t) & 0 \\ -X_3(t) & -q & -\tilde{X}_1(t) & 0 \\ X_2(t) & \tilde{X}_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

则此时有

$$\frac{1}{2}[(K - Q) + (K - Q)^T] = \text{diag}\{0, -q, 0, 0\}.$$

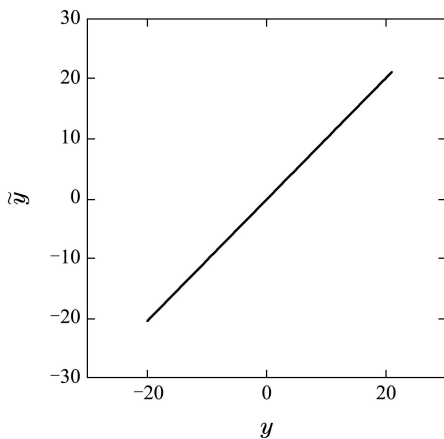
取Lyapunov函数

$$V(e) = \frac{1}{2}e^T(t)e(t) + \int_{-\tau}^0 e^T(t + \theta)e(t + \theta)d\theta,$$

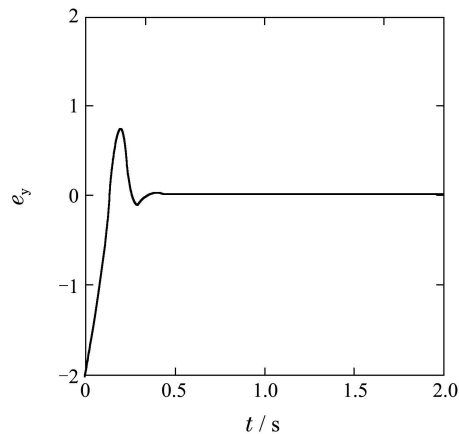
并求其时间 t 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) = & e^T(t)Ae(t) + e^T(t)(K - Q)e(t) + \\ & e^T(t)Pe(t - \tau) + [e^2(t) - e^2(t - \tau)] \leq \\ & -e^T(t) \begin{bmatrix} a-1-\frac{p^2}{4} & \frac{-a-b}{2} & 0 & \frac{h}{2} \\ \frac{-a-b}{2} & -c+q-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d-1 & 0 \\ \frac{h}{2} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} e(t) - \\ & e^T(t - \tau) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e(t - \tau). \end{aligned} \quad (10)$$

要使 \dot{V} 为负定, 则要求第一个矩阵为正定, 同时满足实对称矩阵的顺序主子式 $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0$, 计算可得当 $q > 26.88$ 时符合条件, 此时 $V(e)$ 的导数为负定, 故误差系统(8)在原点全局渐近稳定. 选取控制耦合系数 $q = 27$, 驱动系统的初值 $[-20; 0; 0; 15]$, 响应系统初值 $[-21; -2; -1; 14]$, 对两个时滞混沌系统进行 $y(t)$ 变量的耦合控制, 得到变量 $y(t)$ 的同步图, 及同步误差曲线图(如图7所示).



(a) 变量 $y(t)$ 同步图



(b) 同步误差曲线

图7 变量 $y(t)$ 耦合控制同步

Fig. 7 Coupled synchronization in variables $y(t)$

由图7发现耦合同步中两系统的 $y(t)$ 变量值基本保持一致, 并且其误差信号随着时间的变化迅速收敛于零点, 说明采用变量耦合控制能够较好地实现时滞混沌系统的同步. 以此设计单变量耦合时滞混沌同步电路, 其同步控制原理如图8所示. 此方案通过适当的选择控制增益 q , 可在两个演化

规律相同的时滞系统上, 驱动系统(2)的第2个变量反馈至响应系统, 从而调节该系统实现自身变量耦合同步.

控制电路的输入端口分别接入驱动系统(2)的变量 y 和响应系统(7)的变量 y_1 , 输出端为受控后的反馈值 $y - y_1$. 可用节点电压法推导出电阻 R_{34} 前

系统中 $\tilde{y} - \tilde{y}_1$ 的状态方程为

$$V_{\tilde{y}-\tilde{y}_1} = -\frac{R_{31}}{R_{29}}y + \frac{R_{31}R_{32}}{R_{30}R_{33}}y_1. \quad (11)$$

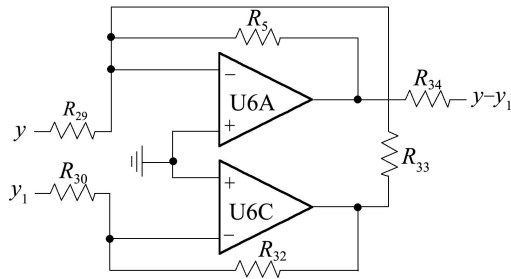


图 8 同步控制电路

Fig. 8 Synchronous control circuit

调试相应电阻 R_{29} , R_{30} , R_{31} , R_{32} 和 R_{34} , 使得产生不同的增益 q , 如表 1 所示.

可通过改变电阻 R_{34} 独立地调节增益 q 的取值, 取 $R_{34} = 37.2 \text{ k}\Omega$ 即为控制增益的临界值. 为了对比该同步控制电路在不同增益下实现的同步效果, 在模拟示波器观察变量 $y - y_1$ 同步相图如图 9 所示.

表 1 同步增益控制

Table 1 Synchronous gain control

| $(R_{29}, R_{30}, R_{31}, R_{32})/\text{k}\Omega$ | (10,10,10,10) | | | |
|---|---------------|-----|-----|-----|
| $R_{34}/\text{k}\Omega$ | 37 | 100 | 500 | 700 |
| 控制增益 q | 27 | 10 | 2 | 1.4 |

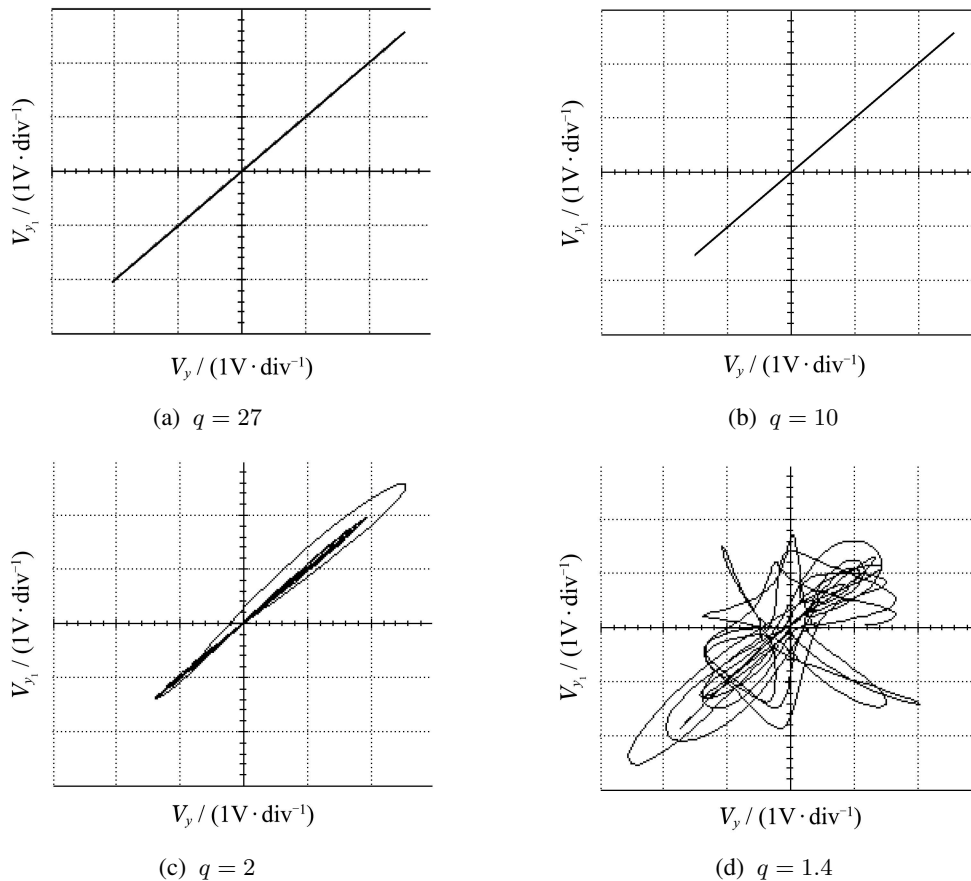


图 9 控制增益 q 变化下同步效果

Fig. 9 Synchronous effects for increasing q

在调试同步控制实验中发现, 采用以上变量耦合同步控制的方法, 分别对另外 $x - x_1$, $z - z_1$, $w - w_1$ 这 3 组耦合状态进行同步控制, 效果均不够理想, 所以当 $y - y_1$ 作为同步控制的输入信号时系统最容易控制且同步效果最佳.

5 结论(Conclusions)

本文主要研究了时滞扰动混沌系统的基本动

力学行为, 提出的时滞系统数学模型虽拓扑结构简单, 但可产生极高随机性的时间序列. 构建了可切换混沌电路, 证实该时滞混沌系统确实存在于自然界中. 另外实现了两个新的时滞系统的耦合同步控制及仿真电路实验, 实验结果与同步设计结果相符, 且效果较好, 因以具有较高不可预测性的时滞混沌系统为研究基础, 增强了在保密通信

应用中的安全性,为时滞混沌理论在保密通讯、扩频通信等实际应用提供了一定的参考。

参考文献(References):

- [1] CHEN J H. Controlling chaos and chaotification in the Chen–Lee system by multiple time delays [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, 36(4): 843 – 852.
- [2] 涂建军, 何汉林. 一类新的时滞混沌系统及其最小能量引导控制 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(10): 1383 – 1387.
(TU Jianjun, HE Hanlin. A new type of time-delay chaotic systems and its minimal-energy guided control [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(10): 1383 – 1387.)
- [3] PYRAGAS K. Transmission of signals via synchronization of chaotic time-delay systems [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1998, 8(9): 1839 – 1842.
- [4] 任海鹏, 刘丁, 韩崇昭. 基于直接延迟反馈的混沌反控制 [J]. 物理学报, 2006, 55(6): 2694 – 2701.
(REN Haipeng, LIU Ding, HAN Chongzhao. Anticontrol of chaos via direct time delay feedback [J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(6): 2694 – 2701.)
- [5] 刘永建. 受控Rabinovich系统的超混沌系统 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(11): 1671 – 1678.
(LIU Yongjian. Hyperchaotic system from controlled Rabinovich system [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(11): 1671 – 1678.)
- [6] PYRAGAS K, PYRAGIENE T. Extending anticipation horizon of chaos synchronization schemes with time-delay coupling [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 2010, 368(1911): 305 – 317.
- [7] 谢英慧, 孙增圻. 时滞Chen混沌系统的指数同步及在保密通信中的应用 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(2): 133 – 137.
(XIE Yinghui, SUN Zengqi. Exponential synchronization for delayed Chen chaotic systems and applications to secure communications [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(2): 133 – 137.)
- [8] FU Y, ZHANG F. New chaos M-ary modulation method and its application in communications [J]. *Journal of China Universities of Posts and Telecommunications*, 2011, 18(1): 77 – 83.
- [9] 仓诗建, 陈增强. 一个新四维非自治超混沌系统的分析与电路实现 [J]. 物理学报, 2008, 57(3): 1493 – 1501.
(CANG Shijian, CHEN Zengqiang. Analysis and circuit implementation of a new four-dimensional non-autonomous hyper-chaotic system [J]. *Acta Physica Sinica*, 2008, 57(3): 1493 – 1501.)
- [10] 蒋式勤, 胡国四. 时滞反馈Lorenz系统的混沌特性及其电路实现 [J]. 控制理论与应用, 2009, 26(8): 911 – 914.
(JIANG Shiqin, HU Guosi. Chaotic characteristics and circuit implementation in time-delay feedback Lorenz system [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(8): 911 – 914.)
- [11] HU G S. Hyperchaos of higher order and its circuit implementation [J]. *International Journal of Circuits Theory and Applications*, 2009, 39(1): 79 – 89.
- [12] 王繁珍, 齐国元. 一个新的三维混沌系统的分析、电路实现及同步 [J]. 物理学报, 2006, 55(8): 4005 – 4012.
(WANG Fanzhen, QI Guoyuan. Analysis, circuit implementation and synchronization of a new three-dimensional chaotic system [J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(8): 4005 – 4012.)
- [13] PARK J H. Adaptive synchronization of hyperchaotic Chen system with uncertain parameters [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 26(3): 959 – 964.
- [14] NAMAJUNAS A, PYRAGAS K, TAMASEVICIUS A. An electronic analog of the Mackey-Glass system [J]. *Physics Letters A*, 1995, 201(1): 42 – 46.

作者简介:

- 崔智勇** (1984–), 男, 讲师, 研究方向为非线性系统同步控制、时滞混沌系统电路仿真, E-mail: zhiyong49@hotmail.com;
- 陈正诚** (1985–), 男, 博士研究生, 研究方向为智能交互系统理论与工程, E-mail: p.p971@hotmail.com.