

一类变时滞饱和和不确定系统鲁棒 H_∞ 滤波器设计

洪晓芳^{1,2}, 王玉振¹

(1. 山东大学控制科学与工程学院, 山东 济南 250061; 2. 山东劳动职业技术学院 电气及自动化系, 山东 济南 250100)

摘要: 研究一类不确定时变时滞饱和系统的 H_∞ 滤波器设计问题. 该类系统状态方程中含有时变时滞和有界不确定项, 输出方程中含有饱和项, 系统的噪声信号功率有界但统计特性未知. 本文给出一种线性滤波器结构, 提出一种新的设计方法. 该方法主要应用Lyapunov-Krasovskii稳定性理论和线性矩阵不等式, 来分析和设计滤波器; 它使得时变时滞项, 饱和项以及不确定项在设计中得到有效处理, 且所设计的滤波器能满足 H_∞ 性能指标, 滤波器参数通过求解一种线性矩阵不等式来确定. 例子的分析与仿真验证了本文方法的有效性.

关键词: H_∞ 滤波器; 饱和; 不确定性; 时滞依赖; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Robust H-infinity filter for a class of uncertain systems with time-varying delay and saturation

HONG Xiao-fang^{1,2}, WANG Yu-zhen¹

(1. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan Shandong 250061, China;

2. Department of Electrics and Automation, Shandong Labor Vocational and Technical College, Jinan Shandong 250100, China)

Abstract: This paper investigates the H-infinity filtering problem for a class of uncertain systems with both time-varying time-delay and saturation. In these systems, bound uncertain terms exist in their state equations and the saturation appears in their output equations; process and measurement noises are of unknown statistical characteristics but are bounded in power. For these systems, we propose the generalized dynamic filter architecture, and develop a novel method for designing the filter. By using the stability theorem of Lyapunov-Krasovskii and employing linear matrix inequalities (LMI), we effectively handle the time-varying time-delay, the saturation output and the bound uncertain terms. The parameters of the filter are obtained by solving a special kind of linear matrix inequalities. The designed filter also meets the requirements in H-infinity performances. The analysis of an illustrative example shows that the proposed method is effective.

Key words: H-infinity filter; saturation; uncertainty; delay-dependent; linear matrix inequality

1 引言(Introduction)

在控制系统的设计及其信号处理中, H_∞ 滤波问题都具有重要的理论和实际意义, 受到了广泛的关注和研究^[1-8]. H_∞ 滤波的目标是设计一个动态系统, 使其对应的滤波误差对于参数、外部噪声等不确定性具有一定的鲁棒抗干扰性能. 与Kalman滤波^[9-10]方法相比, H_∞ 滤波不必知道系统外部噪声的先验知识, 也不要求精确的数学模型, 只要求系统的扰动有界即可, 这些特性使得 H_∞ 滤波在实际工程中具有重要的应用价值. 关于 H_∞ 滤波器的设计方法, 目前主要有3种类型: 求解Riccati方程法^[11-12]、线性矩阵不等式法^[13-16]和多项式法^[7, 17-19].

在实际工程应用中, 系统会受到饱和因素的影响, 这会限制系统的运行或导致不期望的结果, 影响系统的稳定性^[20-21]. 对于饱和问题的研究, 大多数

结果是针对执行器饱和, 即在控制系统中, 考虑控制器的饱和限制, 并取得了大量的研究成果^[21-28]. 但是对于输出中的测量饱和、幅值饱和、传感器饱和等饱和问题则研究较少^[29-31]. 除此之外, 导致滤波系统不稳定的另一因素为时滞. 在实际系统中, 时滞是一种常见的不可避免的现象, 如通讯系统、化工系统及生物系统等中均存在时滞现象^[32-33]. 由于时滞现象是引起系统不稳定以及使系统性能指标变坏的主要因素之一^[3, 32-33], 所以时滞系统的研究受到人们的广泛重视. 通过得到的判断条件是否与时滞相关可以把这些结果分为两类, 分别是时滞独立^[15, 18]与时滞依赖结果^[3, 7, 13, 19, 34-35]. 由于在时滞依赖的条件中包含与时滞相关的信息, 尤其是在系统的时滞较小时, 它的保守性比时滞独立条件小, 因此时滞依赖的稳定条件得到了人们更为广泛的关

注. 注意到, 在滤波器研究中, 人们只是单一考虑饱和或时滞现象. 同时含有时滞与饱和的系统更为复杂, 研究难度更大. 据作者所知, 同时考虑时滞与饱和的 H_∞ 滤波器的研究结果, 目前还没有文献报道.

本文研究一类不确定时变时滞饱和系统的鲁棒 H_∞ 滤波器设计问题, 给出一种线性滤波器结构, 提出一种新的设计方法. 该方法应用Lyapunov-Krasovskii稳定性理论和LMI方法来分析和设计系统的 H_∞ 滤波器, 以保证滤波误差系统渐近稳定, 并使滤波器达到 H_∞ 性能指标. 滤波器参数通过求解线性矩阵不等式来确定. 例子分析和仿真验证了本文设计方法的有效性.

需要指出的是, 本文同时考虑了饱和和时滞现象以及参数摄动对系统的影响. 系统状态方程中含有时变时滞和有界不确定项, 输出方程中含有饱和项. 本文所考虑的系统更为复杂, 研究难度更大. 本文的贡献在于: 1) 构造了适当的Lyapunov-Krasovskii函数, 得到了保守性更小的时滞相关的稳定性条件. 2) 通过引入两个满足一定条件的非奇异矩阵 S 和 W , 获得了与其相关的滤波器参数求解公式. 同时, 考虑滤波器的传递函数特性, 将参数求解公式简化为不含 W 的表达式, 简化了参数运算.

文中用到的符号: \mathbb{R}^n 表示 n 维实向量空间, $\mathbb{R}^{n \times m}$ 表示 $n \times m$ 维实矩阵所构成的空间, $L_2[0, \infty)$ 为在 $[0, \infty)$ 上平方可积的向量集合, $\|x\|_2$ 表示向量 x 的 L_2 范数, I_n 为 $n \times n$ 维单位矩阵, $*$ 表示矩阵的对称结构, $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示对角(块)矩阵; 矩阵不等式 $X > Y$ 和 $X \geq Y$ 分别表示 $X - Y$ 是正定和半正定矩阵.

2 问题描述(Problem formulation)

本节给出问题描述, 包括系统模型, 滤波器形式和设计目标.

考虑一类含有时变时滞和饱和的不确定系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t - \tau(t)) + \\ \quad f(t, x(t), x(t - \tau(t))) + Bw(t), \\ y(t) = \text{sat}(Cx(t)) + Dw(t), \\ z(t) = Lx(t), \\ x(\theta) = \tilde{\varphi}(\theta), \forall t \in [-d, 0], \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态, $y(t) \in \mathbb{R}^r$ 是系统的测量输出, $z(t) \in \mathbb{R}^q$ 是待估计信号, $\tilde{\varphi}(\theta)$ 是已知的连续向量值初始函数; A, A_1, B, C, D 和 L 是适当维数的已知矩阵; $\tau(t)$ 是一个时滞函数, 满足

$$0 \leq \tau(t) \leq d, \dot{\tau}(t) \leq \mu < 1, \quad (2)$$

d 和 μ 是已知常数; $f(t, x(t), x(t - \tau(t))) \in \mathbb{R}^n$ 是未知时变非线性函数, 表示系统的参数摄动或不确定性, 满足 $f(t, 0, 0) = 0$ 和

$$f^T(t, x, y)f(t, x, y) \leq \alpha x^T x + \beta y^T y, \quad (3)$$

其中 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha > 0, \beta > 0$ 为已知常量; $w(t) \in$

\mathbb{R}^p 是噪声信号(包括过程和测量噪声), $w(t) \in L_2[0, \infty)$; 向量饱和函数 $\text{sat}: \mathbb{R}^n \rightarrow [-1, 1]^n$ 定义为

$$\text{sat}(u) = [\text{sat}(u_1) \text{sat}(u_2) \cdots \text{sat}(u_n)]^T, \quad (4)$$

其分量 $\text{sat}(u_i) = \text{sgn}(u_i) \min(1, |u_i|), i = 1, 2, \dots, n$.

本文待设计的滤波器具有如下形式:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_f \hat{x}(t) + B_f y(t), \\ \hat{z}(t) = C_f \hat{x}(t), \end{cases} \quad (5)$$

其中, $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 是滤波器的状态, $\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^q$ 是系统的观测输出, A_f, B_f 和 C_f 为需要设计的滤波器参数.

为了便于分析, 首先给出如下引理:

引理 1^[21] 饱和函数 $\text{sat}(u)$ 定义为(4)时, 如下关系式成立:

$$\eta^T(u)\eta(u) \leq u^T u, \quad (6)$$

此处 $\eta(u) = \text{sat}(u) - u$.

利用引理1的记号, 系统(1)和(5)可分别表示为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t - \tau(t)) + \\ \quad f(t, x(t), x(t - \tau(t))) + Bw(t), \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) + \eta(Cx(t)), \\ z(t) = Lx(t), \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_f \hat{x}(t) + B_f(Cx(t) + Dw(t) + \\ \quad \eta(Cx(t))), \\ \hat{z}(t) = C_f \hat{x}(t). \end{cases} \quad (8)$$

定义估计信号的误差函数 $\tilde{z}(t) := z(t) - \hat{z}(t)$, 令 $e(t) := [x^T(t) \hat{x}^T(t)]^T$. 联合式(7)和式(8), 得到如下扩展系统:

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = \tilde{A}e(t) + \tilde{A}_1He(t - \tau(t)) + \\ \quad \tilde{A}_2H\tilde{f}(t, e(t), e(t - \tau(t))) + \\ \quad \tilde{B}w(t) + \tilde{B}_1H\tilde{\eta}(e(t)), \\ \tilde{z}(t) = \tilde{L}e(t), \end{cases} \quad (9)$$

其中:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C & A_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{f}(t, e(t), e(t - \tau(t))) &= \begin{bmatrix} f(t, x(t), x(t - \tau(t))) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B \\ B_f D \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_f \end{bmatrix}, \quad H = [I \quad 0], \\ \tilde{\eta}(e(t)) &= \begin{bmatrix} \eta(Cx(t)) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{L} = [L \quad -C_f]. \end{aligned} \quad (10)$$

本文的设计目标是: 给定干扰抑制水平 $\gamma > 0$, 设计滤波器(5), 使其满足

a) 系统(9)在 $w(t) = 0$ 时渐近稳定;

b) 在零初始条件之下, 对于任意非零 $w(t) \in L_2[0, \infty)$, 估计误差 $\tilde{z}(t)$ 的 L_2 范数满足

$$\|\tilde{z}\|_2 \leq \gamma(\|w\|_2). \quad (11)$$

如果能找到一个最小的正标量 γ^* 满足上述条件a)和b), 则系统(5)是一个最优H_∞滤波器.

3 H_∞滤波器设计(H_∞ filter design)

本节中, 作者利用Lyapunov-Krasovskii稳定性理论和LMI方法, 来分析并设计满足条件a)和b)的H_∞滤波器(5).

为了设计H_∞滤波器(5), 首先给出如下定理. 该定理刻画了使扩展系统(9)满足H_∞性能指标的条件.

定理 1 如果存在标量 $\varepsilon_1 > 0$ 和 $\varepsilon_2 > 0$, 以及适当维数的对称正定矩阵 P, P_1, P_2 和 Q 满足

$$\tilde{S}_1 = \begin{bmatrix} \Psi & P\tilde{A}_1 & P\tilde{B} & \tilde{L}^T & P\tilde{A}_2 & P\tilde{B}_1 \\ * & \varepsilon_1\beta I - (1-\mu)Q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

其中 $\Psi = \tilde{A}^T P + P\tilde{A} + H^T(\varepsilon_1\alpha I + \varepsilon_2 C^T C + Q + d(P_1 + P_2))H$, 则存在一个H_∞滤波器(5)使得系统(9)在 $w(t) = 0$ 时渐近稳定, 估计误差向量 $\tilde{z}(t)$ 满足 $\|\tilde{z}\|_2 \leq \gamma\|w\|_2$, 且 γ 的最小值 γ^* 可由如下最优化问题得到:

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma^2, \\ \text{s.t.} \quad & \tilde{S}_1 < 0, P > 0, P_1 > 0, P_2 > 0, \\ & Q > 0, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0. \end{aligned} \quad (13)$$

证 首先, 证明系统的稳定性.

系统(9)在无外部噪声即 $w(t) = 0$ 时可表示为

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = \tilde{A}e(t) + \tilde{A}_1He(t - \tau(t)) + \tilde{A}_2H\tilde{f}(t, e(t), e(t - \tau(t))) + \tilde{B}_1H\tilde{\eta}(Ce(t)), \\ \tilde{z}(t) = \tilde{L}e(t). \end{cases} \quad (14)$$

构造如下Lyapunov-Krasovskii函数:

$$V(t, e_t) = V_1(t, e_t) + V_2(t, e_t), \quad (15)$$

其中: $e_t(\theta) = e(t + \theta), \forall \theta \in [-d, 0]$,

$$V_1(t, e_t) = e^T(t)Pe(t) + \int_{t-\tau(t)}^t e^T(s)H^TQHe(s)ds,$$

$$V_2(t, e_t) = \int_{-d}^0 \int_{t+\theta}^t e^T(s)H^TP_1He(s)dsd\theta + \int_{-d}^0 \int_{t-\tau(t)+\theta}^t e^T(s)H^TP_2He(s)dsd\theta.$$

沿系统(14)的轨线求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t, e_t) &= 2e^T(t)P\dot{e}(t) + e^T(t)H^TQHe(t) - (1 - \dot{\tau}(t))e^T(t - \tau(t))H^TQHe(t - \tau(t)) \leq \\ &2e^T(t)P[\tilde{A}e(t) + \tilde{A}_1He(t - \tau(t)) + \tilde{A}_2H\tilde{f}(t, e(t), e(t - \tau(t))) + \tilde{B}_1H\tilde{\eta}(e(t))] + e^T(t)H^TQHe(t) - \\ &(1 - \mu)e^T(t - \tau)H^TQHe(t - \tau) \leq \\ &2e^T(t)P[\tilde{A}e(t) + \tilde{A}_1He(t - \tau(t))] + \varepsilon_1^{-1}e^T(t)P\tilde{A}_2\tilde{A}_2^TPe(t) + \varepsilon_1(\alpha e^T(t)H^THe(t) + \beta e^T(t - \tau(t))H^THe(t - \tau(t))) + \varepsilon_2^{-1}e^T(t)P\tilde{B}_1\tilde{B}_1^TPe(t) + \varepsilon_2e^T(t)H^TC^TCHe(t) + e^T(t)H^TQHe(t) - \\ &(1 - \mu)e^T(t - \tau)H^TQHe(t - \tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t, e_t) &= de^T(t)H^T(P_1 + P_2)He(t) - \int_{-d}^0 e^T(t + \theta)H^TP_1He(t + \theta)d\theta - \\ &(1 - \dot{\tau}(t)) \int_{-d}^0 e^T(t - \tau(t) + \theta)H^TP_2He(t - \tau(t) + \theta)d\theta \leq \\ &de^T(t)H^T(P_1 + P_2)He(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, e_t) &= \dot{V}_1(t, e_t) + \dot{V}_2(t, e_t) \leq \begin{bmatrix} e(t) \\ He(t - \tau(t)) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \Gamma & P\tilde{A}_d \\ * & \varepsilon_1\beta I - (1 - \mu)Q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e(t) \\ He(t - \tau(t)) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中:

$$\Gamma = \tilde{A}^T P + P\tilde{A} + \varepsilon_1^{-1}P\tilde{A}_2\tilde{A}_2^TP + \varepsilon_2^{-1}P\tilde{B}_1\tilde{B}_1^TP + H^T(\varepsilon_1\alpha I + \varepsilon_2 C^T C + Q + d(P_1 + P_2))H.$$

因此, 如果

$$\tilde{S}_0 = \begin{bmatrix} \Gamma & P\tilde{A}_1 \\ * & \varepsilon_1\beta I - (1 - \mu)Q \end{bmatrix} < 0,$$

则 $\dot{V}(t, e_t) < 0$. 又由于 $\tilde{S}_0 < 0$ 由已知条件(12)容易得到, 依照Lyapunov-Krasovskii稳定定理, 系统(14)渐近稳定.

其次, 证明零初始条件下, 滤波扩展系统满足H_∞性能指标.

对于系统(9), 仍然使用(15)中构造的Lyapunov-

Krasovskii函数, 易知式(11)等价于

$$\begin{aligned}
 J(w(t)) &= \int_0^T [\tilde{z}^T \tilde{z} - \gamma^2 w^T(t)w(t)]dt = \\
 &\int_0^T [\tilde{z}^T \tilde{z} - \gamma^2 w^T(t)w(t) + \dot{V}(t, e_t)]dt - \\
 &V(T) + V(0) \leq \\
 &\int_0^T [\tilde{z}^T \tilde{z} - \gamma^2 w^T(t)w(t) + \dot{V}(t, e_t)]dt = \\
 &\int_0^T [e^T(t)\tilde{L}^T\tilde{L}e(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + \dot{V}(t, e_t)]dt,
 \end{aligned} \tag{17}$$

其中:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t, e_t) &= \\
 &\begin{bmatrix} e(t) \\ He(t - \tau(t)) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Gamma & P\tilde{A}_1 & P\tilde{B} \\ * & \varepsilon_1\beta I - (1-\mu)Q & 0 \\ * & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \\
 &\begin{bmatrix} e(t) \\ He(t - \tau(t)) \\ w(t) \end{bmatrix}, \\
 e^T(t)\tilde{L}^T\tilde{L}e(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) &= \\
 &\begin{bmatrix} e(t) \\ He(t - \tau(t)) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{L}^T\tilde{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \cdot \\
 &\begin{bmatrix} e(t) \\ He(t - \tau(t)) \\ w(t) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

由此, 容易得到

$$\begin{aligned}
 J(w(t)) &\leq \int_0^T [\tilde{z}^T \tilde{z} - \gamma^2 w^T(t)w(t) + \dot{V}(t, e_t)]dt = \\
 &\int_0^T \begin{bmatrix} e(t) \\ He(t - \tau(t)) \\ w(t) \end{bmatrix}^T S_1 \begin{bmatrix} e(t) \\ He(t - \tau(t)) \\ w(t) \end{bmatrix} dt,
 \end{aligned}$$

其中,

$$S_1 = \begin{bmatrix} \Gamma + \tilde{L}^T\tilde{L} & P\tilde{A}_1 & P\tilde{B} \\ * & \varepsilon_1\beta I - (1-\mu)Q & 0 \\ * & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}.$$

如果 $S_1 < 0$, 则 $J(w(t)) < 0$. 根据矩阵补引理^[5],

$$S_1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{S}_1 = \begin{bmatrix} \Psi & P\tilde{A}_1 & P\tilde{B} & \tilde{L}^T P\tilde{A}_2 & P\tilde{B}_1 \\ * & \varepsilon_1\beta I - (1-\mu)Q & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & -I & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \\ * & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0.$$

由已知条件, $J(w(t)) < 0$, 即估计误差向量 $\tilde{z}(t)$ 的 L_2 增益不超过 γ ; 且通过解最小化问题(13), 可以获得最小的 γ^* . 证毕.

注 1 系统(9)中 $\tilde{f}(t, e(t), e(t - \tau(t))), \tilde{\eta}(e(t))$ 为非线性项, 在求导运算中利用了条件(3)和引理1以及适当的不等式放缩进行了处理.

注 2 根据定理1, 本文能够获得系统(9)的 H_∞ 性能. 但是, 由于式(12)是一个非线性矩阵不等式, 很难从中解得滤波器的参数. 为了使用简单易行的LMI方法设计滤波器, 本文需要将式(12)变为线性的(见下面的定理2).

定理 2 如果存在标量 $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$, 适当维数的矩阵 Z_1, Z_2, Z_3 , 以及对称正定矩阵 X, R, P_1, P_2 和 Q 使得下列最优化问题有解:

$$\begin{aligned}
 \min \quad &\gamma^2, \\
 \text{s.t.} \quad &X - R > 0, \\
 &\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & RA_1 & RB & L^T - Z_3 & R & 0 \\ * & \Xi_{22} & XA_1 & \Xi_{24} & L^T & X & Z_2 \\ * & * & \Xi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0,
 \end{aligned} \tag{18}$$

其中:

$$\begin{aligned}
 \Xi_{11} &:= RA + A^T R + (Q + d(P_1 + P_2) + \varepsilon_2 C^T C + \varepsilon_1 \alpha I), \\
 \Xi_{12} &:= RA + A^T X + (Z_2 C)^T + Z_1 + (Q + d(P_1 + P_2) + \varepsilon_2 C^T C + \varepsilon_1 \alpha I), \\
 \Xi_{22} &:= XA + A^T X + Z_2 C + (Z_2 C)^T + (Q + d(P_1 + P_2) + \varepsilon_2 C^T C + \varepsilon_1 \alpha I), \\
 \Xi_{24} &:= XB + Z_2 D, \quad \Xi_{33} := \varepsilon_1 \beta I - (1 - \mu)Q,
 \end{aligned}$$

则存在一个最优 H_∞ 滤波器(5)使得 $w(t) = 0$ 时系统(9)渐近稳定, 且估计误差向量 $\tilde{z}(t)$ 满足性能指标 $\|\tilde{z}\|_2 \leq \gamma \|w\|_2$. 此时, H_∞ 滤波器(5)的参数可由下式求出:

$$\begin{cases} A_f = (R - X)^{-1} Z_1^T, \\ B_f = (R - X)^{-1} Z_2, \\ C_f = Z_3^T. \end{cases} \tag{20}$$

证 由已知条件及式(18)可知, XR^{-1} 非奇异且 $XR^{-1} \neq I$. 从而, 存在两个非奇异矩阵 S 和 W , 使得 $XR^{-1} + SW^T = I$.

令

$$J = \begin{bmatrix} R^{-1} & I \\ W^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{J} = \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & S^T \end{bmatrix},$$

$$\tilde{J}J^{-1} = \begin{bmatrix} X & S \\ S^T & W^{-1}R^{-1}(X - R)R^{-1}W^{-T} \end{bmatrix} := P,$$

可得

$$\begin{aligned} X - R > 0 &\Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} R^{-1} & I \\ I & X \end{bmatrix} = J^T P J > 0 &\Leftrightarrow \\ P > 0, \end{aligned}$$

即P是一个对称正定矩阵.

用diag{R⁻¹, I, I, I, I, I, I}分别左乘和右乘式(19), 可得

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & A_1 & B & \Theta_{15} & I & 0 \\ * & \Xi_{22} & XA_1 & \Xi_{24} & L^T & X & Z_2 \\ * & * & \Xi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{21}$$

其中:

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &:= AR^{-1} + R^{-1}A^T + R^{-1}(Q + \\ &\quad d(P_1 + P_2) + \varepsilon_2 C^T C + \varepsilon_1 \alpha I)R^{-1}, \\ \Theta_{12} &:= A + R^{-1}A^T X + R^{-1}(Z_2 C)^T + R^{-1}Z_1 + \\ &\quad R^{-1}(Q + d(P_1 + P_2) + \varepsilon_2 C^T C + \varepsilon_1 \alpha I), \\ \Theta_{15} &:= R^{-1}L^T - R^{-1}Z_3. \end{aligned}$$

取参数A_f, B_f和C_f分别为

$$\begin{cases} A_f = S^{-1}Z_1^T R^{-1}W^{-T}, \\ B_f = S^{-1}Z_2, \\ C_f = Z_3^T R^{-1}W^{-T}, \end{cases} \tag{22}$$

则易知

$$\begin{cases} RWA_f^T S^T = Z_1, \\ SB_f = Z_2, \\ RWC_f^T = Z_3. \end{cases} \tag{23}$$

用diag{J^{-T}, I, I, I, I, I}分别左乘和右乘(21), 并利用式(10)和(23), 则有

$$\begin{bmatrix} \Psi & P\tilde{A}_1 & P\tilde{B} & \tilde{L}^T & P\tilde{A}_2 & P\tilde{B}_1 \\ * & \Xi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0,$$

其中

$$\begin{aligned} \Psi &= \tilde{A}^T P + P\tilde{A} + H^T(\varepsilon_1 \alpha I + \\ &\quad \varepsilon_2 C^T C + Q + d(P_1 + P_2))H. \end{aligned}$$

这样, 定理1的全部条件已满足. 由定理1知, 存在一个最优H_∞滤波器(5)使得系统(9)在w(t) = 0时渐进稳定, 且在定理2条件下估计误差向量z̃(t)满足式(11).

另一方面, 滤波器的传递函数矩阵为G(s) = C_f(sI - A_f)⁻¹B_f. 将式(22)代入, 得

$$\begin{aligned} G(s) &= \\ Z_3^T R^{-1}W^{-T}[sI - S^{-1}Z_1^T R^{-1}W^{-T}]^{-1}S^{-1}Z_2 &= \\ Z_3^T R^{-1}[sSW^T - Z_1^T R^{-1}]^{-1}Z_2 &= \\ Z_3^T R^{-1}[s(I - XR^{-1}) - Z_1^T R^{-1}]^{-1}Z_2 &= \\ Z_3^T [s(R - X) - Z_1^T]^{-1}Z_2 &= \\ Z_3^T [sI - (R - X)^{-1}Z_1^T]^{-1}(R - X)^{-1}Z_2. \end{aligned}$$

由此可知, 滤波器的参数可取为式(20), 这样的滤波器当然满足本文要设计的所有性能指标.

证毕.

注 3 定理2证明中, 由已知条件X, R正定及式(18), 本文得到XR⁻¹非奇异且XR⁻¹ ≠ I, 并引入两个非奇异矩阵S和W使其满足条件XR⁻¹ + SW^T = I, 借助该条件最终获得了滤波器参数求解公式即式(22).

注 4 考虑了滤波器的传递函数特性, 滤波器的参数取值由式(22)变为了式(20), 减少了一个变量W的计算, 简化了参数运算.

4 例子与仿真(Example and simulation)

本节中, 本文给出一个实际例子和仿真, 以验证本文所提出的滤波器设计方法的有效性.

考虑一个单自由度有阻尼振系的力学模型如图1所示. 它由弹簧、质量块及阻尼器构成. 图1中m为质量块质量, k为弹簧刚度, c包括c₀和c_r两部分, c₀为基值阻尼, c_r为控制阻尼, 变量x为质量块m的位移. 由控制阻尼力F = c_rẋ可以看出, 时滞的产生主要来自于速度通道, 将质量块的速度作为输出, 同时考虑模型的不确定性, 噪声干扰与输出中的测量饱和, 该模型可表示为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c_0}{m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c_r}{m} \end{bmatrix} \cdot \\ \quad x(t - \tau(t)) + f(t, x(t), x(t - \tau(t))) + \\ \quad \begin{bmatrix} -0.45 \\ 0.9 \end{bmatrix} w(t), \\ y(t) = \text{sat}([0 \ 1]x(t)) + w(t), \\ z(t) = [0 \ 1]x(t), \end{cases} \tag{24}$$

其中: 令m = 1, k = 1, c₀ = 2, c_r = 0.5, 时滞函数τ(t)满足:

$$0 \leq \tau(t) \leq 3, \dot{\tau}(t) \leq 0.5;$$

未知项 $f(t, x(t), x(t - \tau(t)))$ 满足条件(3), 这里 $\alpha = 0.01, \beta = 0.01$; 饱和函数 $\text{sat}(\cdot)$ 如式(4)定义, $w(t)$ 为噪声信号.

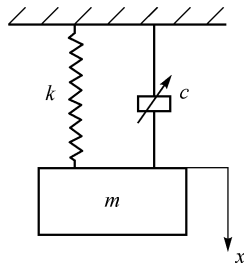


图1 单自由度质量-弹簧系统

Fig. 1 Single degree-of-freedom mass-spring system

本文应用定理2来设计系统(24)的一个 H_∞ 滤波器. 利用MATLAB的LMI工具箱求解对应系统(24)的不等式(18)–(19), 得

$$\begin{aligned}
 X &= \begin{bmatrix} 2.2157 & 0.8138 \\ 0.8138 & 1.6879 \end{bmatrix}, \\
 R &= \begin{bmatrix} 1.8706 & 0.6354 \\ 0.6354 & 1.0849 \end{bmatrix}, \\
 P_1 &= \begin{bmatrix} 0.0167 & 0.0065 \\ 0.0065 & 0.0157 \end{bmatrix} = P_2, \\
 Q &= \begin{bmatrix} 0.2444 & 0.0251 \\ 0.0251 & 0.9942 \end{bmatrix}, \\
 Z_1 &= \begin{bmatrix} 0.1258 & 0.2742 \\ -0.2888 & 1.1774 \end{bmatrix}, \\
 Z_2 &= \begin{bmatrix} 0.0804 \\ -0.5588 \end{bmatrix}, Z_3 = \begin{bmatrix} -0.0009 \\ 0.9950 \end{bmatrix}, \\
 \varepsilon_1 &= 9.4569, \varepsilon_2 = 0.3229, \gamma^* = 0.8718.
 \end{aligned}$$

容易验证: 本文定理2的所有条件已被满足. 由定理2和公式(20), 本文所设计的最优 H_∞ 滤波器参数如下:

$$\begin{cases}
 A_f = \begin{bmatrix} -0.1528 & 2.1797 \\ -0.4094 & -2.5971 \end{bmatrix}, \\
 B_f = \begin{bmatrix} -0.8408 \\ 1.1754 \end{bmatrix}, \\
 C_f = [-0.0009 \ 0.9950].
 \end{cases} \quad (25)$$

为验证上述滤波器的滤波效果和鲁棒性, 本文进行了仿真. 取初始条件 $x(0) = (0.4, -0.2)$, $\hat{x}(0) = (0.6, -0.3)$, 在时间段 $[2\text{s}, 4\text{s}]$ 给原始系统加入一个幅值为3的外部噪声, 令

$$f(t, x(t), x(t - \tau(t))) = \begin{bmatrix} 0.1x_1(t) \\ 0.1x_2(t - \tau(t)) \end{bmatrix}.$$

仿真结果如图2所示, 其为 $z(t)$ 和 $\hat{z}(t)$ 的响应曲线.

由图2可知, 当外部干扰移掉后估计信号很快拟合到 $z(t)$, 估计误差 $\hat{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t)$ 很快收敛于零. 仿真结果表明: 滤波器非常有效且对外部干扰有较强的鲁棒性.

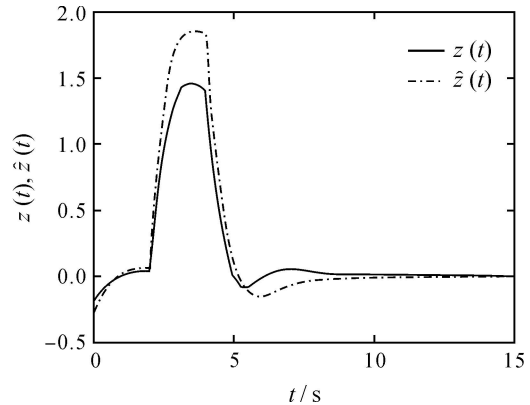


图2 估计信号

Fig. 2 Estimation signals

为了进一步验证本文方法的有效性, 本文与文献[29]的结果作了比较. 将系统退化为不含时滞和不确定项的情形^[29]. 首先, 本文应用定理2来设计该系统的一个 H_∞ 滤波器, 通过计算得 $\gamma^* = 0.1000$ (明显优于文献[29]中的 $\gamma^* = 0.6680$), 对应的最优 H_∞ 滤波器参数为

$$\begin{aligned}
 A_f &= \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ -0.0001 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ -12.0005 & 0.9999 & -0.5001 & -0.0000 \\ 2.0000 & -2.0000 & 0.0000 & -1.0000 \end{bmatrix}, \\
 B_f &= [-0.0001 \ 0.0001 \ 10.0005 \ -0.0000]^T, \\
 C_f &= [0.0001 \ 0.9999 \ -0.0000 \ -0.0001].
 \end{aligned}$$

其次, 本文对该 H_∞ 滤波器进行仿真. 仿真结果见图3. 图4是文献[29]给出的仿真结果. 比较图3和图4, 本文看出本文结果在退化到仅含饱和项时要优于文献[29]的结果.

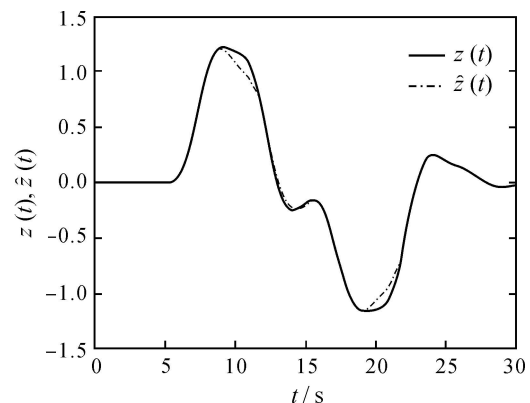


图3 退化模型的仿真结果

Fig. 3 Simulation of degradation model

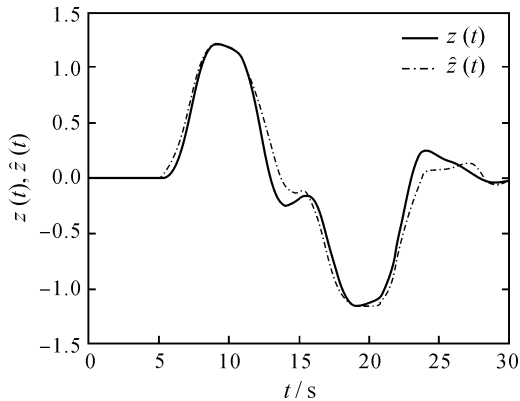


图 4 文献[24]的仿真结果

Fig. 4 Simulation of [24]

5 结论(Conclusions)

本文研究了一类不确定时变时滞饱和系统的鲁棒 H_∞ 滤波器设计问题,提出了一种新的设计方法.该方法主要应用Lyapunov-Krasovskii稳定性理论和线性矩阵不等式方法,来分析和设计滤波器;它使得时变时滞项,饱和项以及不确定项在设计中得到有效处理,且所设计的滤波器能够满足 H_∞ 性能指标,滤波器参数通过求解线性矩阵不等式来确定.例子分析与仿真验证了本文设计方法的有效性.

参考文献(References):

- [1] YANG G H, GUO X G. Insensitive H_∞ filter design for continuous-time systems with respect to filter coefficient variations [J]. *Automatica*, 2010, 46(11): 1860 – 1869.
- [2] AN J Y, WEN G L, GAN N F, et al. A delay-derivative-dependent approach to robust H_∞ filter design for uncertain systems with time-varying distributed delays [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2011, 348(2): 179 – 200.
- [3] ZHANG X M, HAN Q L. Delay-dependent robust H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems with time-varying delay based on a finite sum inequality [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2006, 53(12): 1446 – 1470.
- [4] HE X, WANG Z D, ZHOU D. Robust H_∞ filtering for networked systems with multiple state delays [J]. *International Journal of Control*, 2007, 80(8): 1217 – 1232.
- [5] TSENG C S. Robust fuzzy filter design for a class of nonlinear stochastic systems [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, 15(2): 261 – 274.
- [6] GAO H J, CHEN T W. H_∞ estimation for uncertain systems with limited communication capacity [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(10): 2070 – 2084.
- [7] QIU J B, FENG G, YANG J. Improved delay-dependent H_∞ filtering design for discrete-time polytopic linear delay systems [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2008, 55(2): 178 – 182.
- [8] ABBASZADEH M, MARQUEZ H J. Nonlinear robust H_∞ filtering for a class of uncertain systems via convex optimization [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2012, 10(2): 152 – 158.
- [9] 马静, 孙书利. 广义系统信息融合稳态与自校正满阶Kalman滤波器 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(9): 1169 – 1174. (MA Jing, SUN Shuli. Information fusion steady-state and self-tuning full-order Kalman filters for descriptor systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(9): 1169 – 1174.)
- [10] 徐伟杰, 李平, 韩波. 扩展Kalman滤波框架下的地平线检测算法 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(2): 225 – 228. (XU Weijie, LI Ping, HAN Bo. Horizon detection algorithm in extended Kalman filter framework [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(2): 225 – 228.)
- [11] PILA A W, SHAKED U, SOUZA C E D. H_∞ filtering for continuous-time linear systems with delay [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(7): 1412 – 1417.
- [12] WANG Z D, HUANG B, UNBEHAUENC H. Robust H_∞ observer design of linear time-delay systems with parametric uncertainty [J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 42(4): 303 – 312.
- [13] GAO H, WANG C. A delay-dependent approach to robust H_∞ filtering for uncertain discrete-time state-delayed systems [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(6): 1631 – 1640.
- [14] PALHARES R M, SOUZA C E D, PERES P L D. Robust H_∞ filtering for uncertain discrete-time state-delayed systems [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, 49(8): 1696 – 1703.
- [15] XIE L H, LIU L L, ZHANG D, et al. Improved robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems [J]. *Automatica*, 2004, 40(5): 873 – 880.
- [16] SOUZA C E D, BARBOSA K A, NETO A T. Robust H_∞ filtering for discretetime linear systems with uncertain time-varying parameters [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(6): 2110 – 2118.
- [17] GAO H J, CHEN T W. New results on stability of discrete-time systems with time-varying state delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(2): 328 – 334.
- [18] ZHANG H S, ZHANG D, XIE L H. An innovation approach to H_∞ prediction with application to systems with delayed measurements [J]. *Automatica*, 2004, 40(7): 1253 – 1261.
- [19] GAO H J, MENG X Y, CHEN T W. A parameter-dependent approach to robust H_∞ filtering for time-delay systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(10): 2420 – 2425.
- [20] XIAO Y F, CAO Y Y, LIN Z L. Robust filtering for discrete-time systems with saturation and its application to transmultiplexers [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(5): 1266 – 1277.
- [21] WEI A R, WANG Y Z. Stabilization and H_∞ control of nonlinear port-controlled Hamiltonian systems subject to actuator saturation [J]. *Automatica*, 2010, 46(12): 2008 – 2013.
- [22] BERNSTEIN D S, MICHEL A N. A chronological bibliography on saturating actuators [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1995, 5(5): 375 – 380.
- [23] GOMES D, TARBOURIECH S, GARCIA G. Antiwindup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(1): 105 – 111.
- [24] HU T S, LIN Z L. *Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design* [M]. Boston: Birkhäuser, 2001.
- [25] SABERI A, LIN Z L, TEEL A R. Control of linear systems with saturating actuators [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(3): 368 – 378.
- [26] TARBOURIECH S, GARCIA G, GLATTFELDER H. Advanced strategies in control systems with input and output constraints [R] // *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Berlin: Springer-Verlag Press, 2007, 346: 173 – 205.
- [27] 王瑞芬, 贾廷纲, 牛玉刚. 一类控制输入饱和和受限的不确定系统滑模控制 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(9): 1154 – 1158. (WANG Rui fen, JIA Ting gang, NIU Yu gang. Sliding-mode control for uncertain systems with input saturation [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(9): 1154 – 1158.)
- [28] WEI A R, WANG Y Z. On estimation of attraction domain for port-controlled Hamiltonian systems subject to actuator saturation [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2012, 10(2): 195 – 200.

- [29] ZHANG Z J, XIAO X Q, ZHOU L. Robust H_∞ filtering for continuous-time linear systems under measurement saturation [J]. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2011, 28(3): 365 – 375.
- [30] YANG F W, LI Y M. Set-membership filtering for systems with sensor saturation [J]. *Automatica*, 2009, 45(8): 1896 – 1902.
- [31] WANG Z D, SHEN B, LIU X H. H_∞ filtering with randomly occurring sensor saturations and missing measurements [J]. *Automatica*, 2012, 48(3): 556 – 562.
- [32] XU S Y, CHEN T W. Robust H_∞ control for uncertain discrete-time systems with time-varying delays via exponential output feedback controllers [J]. *Systems & Control Letters*, 2004, 51(3): 171 – 1837.
- [33] MOON Y S, PARK P, KWON W H, et al. Delay-dependent robust stabilization of uncertain time-delayed systems [J]. *International Journal of Control*, 2001, 74(14): 1447 – 1455.
- [34] HE Y, WANG Q G, LIN C, et al. Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay [J]. *Automatica*, 2007, 43(2): 371 – 376.
- [35] GEROMEL J C, OLIVEIRA M C DE, BERNUSSOU J. Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent lyapunov functions [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2002, 41(3): 700 – 711.

作者简介:

洪晓芳 (1982–), 女, 博士研究生, 研究方向为时滞饱和系统鲁棒控制, E-mail: qingfeng3582@sina.com;

王玉振 (1963–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为非线性控制、布尔网络, E-mail: yzwang@sdu.edu.cn.