文章编号: 1000−8152(2012)11−1433−07

旋转球与乒乓球台/球拍的反弹模型

任艳青[1], 徐 德[1,2], 谭 民[1]

(1. 中国科学院 自动化研究所 复杂系统管理与控制国家重点实验室, 北京 100190;

2. 中国科学院 自动化研究所 精密感知与控制研究中心, 北京 100190)

摘要: 本文在对乒乓球与球台/球拍反弹过程的受力、冲量、冲量矩分析的基础上, 提出"临界摩擦角"的概念, 并利用"临界摩擦角"给出乒乓球与球台/球拍之间是滚动还是滑动的判定条件, 从而进一步得到乒乓球与球台/球拍之间的物理反弹模型. 另外, 通过学习算法, 利用多元线性回归得到了一种反弹模型. 最后通过参数估计、试验验证、误差分析, 证明了两种反弹模型的有效性.

关键词: 乒乓球机器人; 反弹模型; 临界摩擦角; 多元线性回归; 参数估计

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Rebound model between spinning table tennis ball and table/racket

REN Yan-qing[1], XU De[1,2], TAN Min[1]

(1. State Key Laboratory of Management and Control for Complex Systems, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. Research Center of Precision Sensing and Control, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: Based on the stress, impulse, and impulse moment received by a spinning table tennis ball from the table/racket in the rebound process, a concept of 'critical friction angle' is introduced and a criterion is put forward to distinguish the types of the friction effects, thus a physical rebound model is built. In addition, a linear rebound model is obtained through the learning algorithm and multiple linear regressions. Experiments and the error analysis validate the effectiveness of the two rebound models.

Key words: table tennis robot; rebound model; critical friction angle; multiple linear regressions; parameter estimation

1 引言(Introduction)

因乒乓球的快速性和准确性均对打乒乓球机器人提出了很高的要求, 因此吸引了国内外很多研究人员的关注. 文献[1]从视觉系统、控制系统、执行结构等方面对国内外乒乓球机器人的研究现状进行了综述.

利用机器人打乒乓球, 需要解决快速运动乒乓球的跟踪、轨迹预测以及控制机器人击球等问题[2]. 也就是说, 对于机器人来讲, 与人对打的任务可以划分为以下几个子任务: 1) 通过视觉传感器(一般是高速智能相机)获取乒乓球的飞行轨迹, 然后进行图像处理, 测量乒乓球的位置、速度、角速度等飞行状态; 2) 利用测量得到的乒乓球的飞行状态和对乒乓球飞行轨迹的分析, 预测乒乓球下一阶段的飞行轨迹, 即位置、速度、角速度等状态; 3) 对机器人进行运动规划, 控制机器人在一定时间内, 以一定的姿态在一定的位置击打乒乓球, 并达到一定的击球指标.

从打乒乓球机器人的控制过程可知, 乒乓球与球台/球拍的反弹模型对于准确预测乒乓球的飞行轨迹、规划机器人的运动控制方案均起着非常重要的作用. 乒乓球与球台/球拍碰撞后, 乒乓球在摩擦力的作用下产生一定的旋转量, 因此反弹后的乒乓球轨迹会在马格努斯力的影响下发生一定的偏转. 因此乒乓球与球台/球拍的反弹模型吸引了很多研究人员的关注. Zhang等[3]假设平行于接触平面的两个方向上的速度在碰撞前后成线性关系, 在碰撞平面的法线方向上, 利用弹性恢复系数得到碰撞后的速度. 文献[4]中指出乒乓球在与桌面反弹的过程中会有一定的能量损失, 并将能量(速度)的损失用水平方向上的速度损失率和竖直方向上的恢复系数来描述. 以上两种模型均未考虑乒乓球的旋转, 限制了其使用范围. Andersson在文献[5]中指出反弹结果是由来球速度、角速度、乒乓球和球台的特性决定的, 在接触平面的法线方向上, 反弹后的状态主要是由恢复系数决定, 在水平方向上, 球的反弹速度是由球的旋转速度、球台的摩擦系数、竖直方向的反弹参数决定. 但Andersson仅给出定性理论, 未给出反弹模型的解析表达式. 文献[6–7]通过分析乒乓球与击球

收稿日期: 2012−03−20; 收修改稿日期: 2012−05−10.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61075035, 61273337).

面的接触类型, 给出了乒乓球与击球面之间是滚动还是滑动的判定条件, 并得到了反弹模型的解析表达式, 但文中做了诸多假设限制了模型的适用范围.

2 问题分析(Problem analysis)

对乒乓球与某一平面的碰撞过程进行分析的难点在于: 1) 能量转化过程比较复杂: 乒乓球本身是有弹性的, 接触平面也可能具有弹性, 当乒乓球与击球面接触时, 乒乓球的动能是否会转化为弹性势能, 有多少转化为弹性势能是难以确定的; 2) 乒乓球与击球面之间的相对运动是滑动、滚动还是两者结合不容易确定; 3) 乒乓球与击球面之间是否存在摩擦力, 摩擦力的大小是多少不容易确定. 这些问题的不确定性给建模带来一定困难.

物理学家在这方面进行了深入的研究并取得了一些科研成果. Garwin[8]提出平行于接触平面方向上的"恢复系数", 并提出一种方法从实验数据来检测球与平面之间的相互作用是滑动、滚动还是两个结合; 以及动能是否存储为弹性势能. Brody[9]在不考虑球压缩的情况下, 研究了平面摩擦的作用效果, 得出了两者之间是滚动摩擦的条件, 该条件与反弹前的平移和滚动速度有关. Cross[10–11]对具备各种特性的球和固定平面的作用情况进行了分析, 对二者之间的相互作用力、竖直方向的恢复系数等进行了深入的研究. 从以上文献可以得知, 摩擦力和弹力在反弹过程中起决定性作用. 在球台的反弹过程中, 摩擦力起主要作用, 其大小取决于乒乓球和球台之间的相对运动是滚动、滑动还是二者结合; 而在乒乓球与球拍的反弹过程中, 弹力起主要作用. 体育学家们也进行了诸多研究, 得出了很多定性结果, 例如文献[12]利用旋转量值定理分析了乒乓球与球拍的碰撞过程, 提出击球摩擦角的定义并定性讨论了击球摩擦角对出球速度、旋转效应、击球动作等的影响.

本文在文献[6–7]的基础上, 提出"临界摩擦角"的概念, 并利用"临界摩擦角"给出乒乓球与球台/球拍之间是滚动还是滑动的判定条件, 从而进一步得到乒乓球与球台/球拍之间的物理反弹模型. 另外, 通过学习算法, 利用多元线性回归得到了一种反弹模型. 最后通过参数估计、试验验证、误差分析, 证明了两种反弹模型的有效性.

3 临界摩擦角(Critical friction angle)

3.1 临界摩擦角的定义(Definition of critical friction angle)

当飞行中的乒乓球向一定的击球面击去时, 假设来球速度与击球面法线方向的夹角为α, 当α大于等于φ时, 乒乓球与击球面之间的相对运动是滑动, 当α小于φ, 两者之间发生滚动, 这个角φ被称为是临界摩擦角. 临界摩擦角与接触平面的材质和乒乓球的特性有关, 尤其与接触面的摩擦系数和反弹系数关系密切, 下面将给出其解析表达式的推导过程.

3.2 临界摩擦角的推导过程(Derivation of critical friction angle)

本小节以乒乓球与球台的反弹过程(如图1所示)为例给出临界摩擦角的求解过程. 首先建立世界坐标系, 球台的长边为X轴, 短边为Y轴, 垂直于球台平面朝上为Z轴正方向, 并假设根据飞行轨迹获得的乒乓球入射速度为$\boldsymbol{V}_{\rm i}$和角速度为$\boldsymbol{\omega}_{\rm i}$, 碰撞后乒乓球的出球速度为$\boldsymbol{V}_{\rm e}$、角速度为$\boldsymbol{\omega}_{\rm e}$, 速度和角速度在$X$, Y, Z轴的分量分别用下标x, y, z表示, 例如来球速度在乒乓球台法线方向即Z轴上的分量为$V_{\rm iz}$. 入射和出射的变量分别用下标i和e表示.

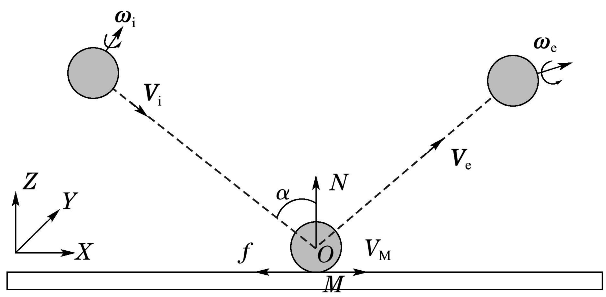

图 1 乒乓球与球台的反弹过程

Fig. 1 Rebound phenomenon between the table tennis ball and the table

乒乓球与球台碰撞过程中, 乒乓球不断挤压球台, Z轴速度逐渐变小, 当到达最低点M时, 乒乓球在Z轴速度分量等于零即$V_{\rm iz}=0$. 如果不考虑乒乓球的旋转, 乒乓球可作为质点处理. 当考虑球的旋转信息时, 通过对最低点进行受力分析来分析乒乓球与球台的反弹过程. 设r为乒乓球的半径, 假设乒乓球与球台反弹过程中, 乒乓球不发生形变, 则从乒乓球的球心O到接触点M的向量为$\overrightarrow{OM}=(0,0,-r)^{\rm T}$, M点的运动速度为

$$\boldsymbol{V}_{\rm M}=\boldsymbol{V}+\overrightarrow{OM}\times\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix} v_{\rm x}-r\omega_{\rm y} \\ v_{\rm y}+r\omega_{\rm x} \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中$\boldsymbol{\omega}=[\omega_x\ \ \omega_y\ \ \omega_z]$为球的角速度.

M点在平行于球台方向上的速度如图2所示. 由图2可知, M点在球台切向方向的速度为

$$v_{\rm xy}=\sqrt{(v_{\rm x}-r\omega_{\rm y})^2+(v_{\rm y}+r\omega_{\rm x})^2},$$

且

$$\sin\theta=\frac{v_{\rm x}-r\omega_{\rm y}}{\sqrt{(v_{\rm x}-r\omega_{\rm y})^2+(v_{\rm y}+r\omega_{\rm x})^2}}=\frac{v_{\rm x}-r\omega_{\rm y}}{\|v_{\rm xy}\|},$$
$$\cos\theta=\frac{v_{\rm y}+r\omega_{\rm x}}{\sqrt{(v_{\rm x}-r\omega_{\rm y})^2+(v_{\rm y}+r\omega_{\rm x})^2}}=\frac{v_{\rm y}+r\omega_{\rm x}}{\|v_{\rm xy}\|}.$$

由文献[6–7]知, 乒乓球与球台反弹前后, M点在平行于球台分量方向的速度方向一致时, 乒乓球与球

台之间产生相对滑动, 当反弹前后的速度方向不一致时, 乒乓球与球台之间相对滚动, 下面通过分析乒乓球和球台之间相对滑动时的反弹模型获得边界条件, 进而得到临界摩擦角的解析表达式.

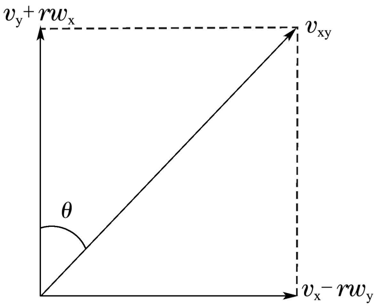

图 2 M点在平行于球台方向上的速度

Fig. 2 The velocity in the horizontal direction of the table at the point M

3.3 乒乓球与球台相对滑动时的反弹模型(Rebound model of spinning ball and table while sliding)

当乒乓球与球台之间是相对滑动时, 对M点进行受力分析. 球台对乒乓球有竖直向上的支撑力N和水平方向上的摩擦力f, 假设二者之间的滑动摩擦系数为μ, 则f的大小满足

$$f=\mu N,$$

其方向与M点在击球面切线方向上的速度分量方向相反. 假设乒乓球的质量为m, 乒乓球所受的冲量为$\boldsymbol{P}$, 乒乓球的转动惯量为$I=\dfrac{2}{3}mr^2$, 乒乓球与球台的反弹过程如图1所示, 由动量定理和动量矩定理得

$$m\boldsymbol{V}_{\rm e}-m\boldsymbol{V}_{\rm i}=\boldsymbol{P}, \tag{1}$$

$$I\boldsymbol{\omega}_{\rm e}-I\boldsymbol{\omega}_{\rm i}=\overrightarrow{OM}\times\boldsymbol{P}. \tag{2}$$

乒乓球在击球面法线方向上的运动与其在平行于击球面方向上的运动是解耦的, 下面本文分别讨论两个方向上的运动. 乒乓球在击球面法线方向上仅受到支撑力的作用, 故其在击球面法线方向的运动速度变化仅与N有关, 假设球台的弹性恢复系数为e, 则有

$$V_{\rm ez}=-eV_{\rm iz}.$$

根据冲量定理, 有

$$mV_{\rm ez}-mV_{\rm iz}=P_{\rm z}=\int_0^S N{\rm d}t=-(1+e)mV_{\rm iz},$$

其中S为乒乓球与球台碰撞过程的作用周期.

假设乒乓球在平行于击球面方向上所受到的冲量为$P_{\rm xy}$, 则由$f=\mu N$和冲量定理, 得$P_{\rm xy}$的大小满足

$$mV_{\rm exy}-mV_{\rm ixy}=P_{\rm xy}=-\int_0^S f{\rm d}t=\\-\mu\int_0^S N{\rm d}t=-\mu P_{\rm z}=(1+e)m\mu V_{\rm iz}.$$

$P_{\rm xy}$的方向与M点在球台切线方向的速度$v_{\rm xy}$方向相同, 而摩擦力f的方向与$v_{\rm xy}$方向相反, 所以有了第2个等号后面的负号. 由图2知, X轴和Y轴方向上的冲量分别为

$$P_{\rm x}=P_{\rm xy}\sin\theta=-\mu\left|P_{\rm z}\right|\sin\theta,$$
$$P_{\rm y}=P_{\rm xy}\cos\theta=-\mu\left|P_{\rm z}\right|\cos\theta,$$

则有

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}P_{\rm x}\\P_{\rm y}\\P_{\rm z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\mu\left|P_{\rm z}\right|\sin\theta\\-\mu\left|P_{\rm z}\right|\cos\theta\\P_{\rm z}\end{bmatrix}.$$

将其代入式(1)和式(2)并化简得

$$\boldsymbol{V}_{\rm e}=\boldsymbol{V}_{\rm i}+\frac{\boldsymbol{P}}{m}=\\\begin{bmatrix}V_{\rm ix}-(1+e)\left|V_{\rm iz}\right|\mu\dfrac{V_{\rm ix}-r\omega_{\rm iy}}{\|v_{\rm ixy}\|}\\V_{\rm iy}-(1+e)\left|V_{\rm iz}\right|\mu\dfrac{V_{\rm iy}+r\omega_{\rm ix}}{\|v_{\rm ixy}\|}\\-eV_{\rm iz}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\rm e}=\boldsymbol{\omega}_{\rm i}+\frac{\overrightarrow{OM}\times\boldsymbol{P}}{I}=\\\begin{bmatrix}\omega_{\rm ix}-\dfrac{3(1+e)}{2r}\left|V_{\rm iz}\right|\mu\dfrac{V_{\rm iy}+r\omega_{\rm ix}}{\|v_{\rm ixy}\|}\\\omega_{\rm iy}+\dfrac{3(1+e)}{2r}\left|V_{\rm iz}\right|\mu\dfrac{V_{\rm ix}-r\omega_{\rm iy}}{\|v_{\rm ixy}\|}\\\omega_{\rm iz}\end{bmatrix}.$$

假设来球速度与击球面法线方向的夹角为α, 即入射角为α, 则有${\rm ctg}\,\alpha=\dfrac{|V_{\rm iz}|}{\|v_{\rm ixy}\|}$, 则当考虑乒乓球的角速度时, 乒乓球与球台之间的反弹模型可以写为

$$\begin{cases}\boldsymbol{V}_{\rm e}=\boldsymbol{V}_{\rm i}+\dfrac{\boldsymbol{P}}{m}=\\\begin{bmatrix}V_{\rm ix}-(1+e)\mu{\rm ctg}\alpha(V_{\rm ix}-r\omega_{\rm iy})\\V_{\rm iy}-(1+e)\mu{\rm ctg}\alpha(V_{\rm iy}+r\omega_{\rm ix})\\-eV_{\rm iz}\end{bmatrix},\\\boldsymbol{\omega}_{\rm e}=\boldsymbol{\omega}_{\rm i}+\dfrac{\overrightarrow{OM}\times\boldsymbol{P}}{I}=\\\begin{bmatrix}\omega_{\rm ix}-\dfrac{3(1+e)}{2r}\mu{\rm ctg}\alpha(V_{\rm iy}+r\omega_{\rm ix})\\\omega_{\rm iy}+\dfrac{3(1+e)}{2r}\mu{\rm ctg}\alpha(V_{\rm ix}-r\omega_{\rm iy})\\\omega_{\rm iz}\end{bmatrix}.\end{cases} \tag{3}$$

3.4 临界摩擦角的确定(Determination of critical friction angle)

由3.1节获得的乒乓球与球台之间相对滑动时的反弹模型得, 乒乓球与球台反弹后M点的速度为

$$\boldsymbol{V}_{\rm eM}=\begin{bmatrix}v_{\rm ex}-r\omega_{\rm ey}\\v_{\rm ey}+r\omega_{\rm ex}\\0\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} V_{\mathrm{ix}} - r\omega_{\mathrm{iy}} - \dfrac{5(1+e)}{2r}\mathrm{ctg}\,\alpha\mu(V_{\mathrm{ix}} - r\omega_{\mathrm{iy}}) \\ V_{\mathrm{iy}} + r\omega_{\mathrm{ix}} - \dfrac{5(1+e)}{2r}\mathrm{ctg}\,\alpha\mu(V_{\mathrm{iy}} + r\omega_{\mathrm{ix}}) \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$(1 - \frac{5(1+e)}{2}\mu\mathrm{ctg}\,\alpha) \begin{bmatrix} V_{\mathrm{ix}} - r\omega_{\mathrm{iy}} \\ V_{\mathrm{iy}} + r\omega_{\mathrm{ix}} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$(1 - \frac{5(1+e)}{2}\mu\mathrm{ctg}\alpha)\boldsymbol{V}_{\mathrm{iM}}. \tag{4}$$

由$\boldsymbol{V}_{\mathrm{eM}}, \boldsymbol{V}_{\mathrm{iM}}$方向相同, 可得$1 - \frac{5(1+e)}{2}\mu\mathrm{ctg}\,\alpha \geqslant 0$, 即$\mathrm{tg}\,\alpha \geqslant \frac{5(1+e)}{2}\mu$, $\alpha \geqslant \arctan(\frac{5(1+e)}{2}\mu)$. 乒乓球与球台之间相对滑动的边界条件为$\alpha \geqslant \arctan(\frac{5(1+e)}{2}\mu)$, 也就说临界摩擦角为$\varphi = \arctan(\frac{5(1+e)}{2}\mu)$. 文献[12]通过分析乒乓球与球拍的反弹过程得到类似的结论.

3.5 乒乓球与球台相对滚动时的反弹模型(Rebound model between spinning ball and table while rolling)

以上给出了临界摩擦角的推导过程, 当来球速度与击球面法线方向的夹角大于或者等于临界摩擦角时, 乒乓球与球台之间是滑动摩擦, 反弹模型如式(3)所示.

当来球速度的入射角小于临界摩擦角时, 两者之间发生相对滚动, 滚动摩擦力相对较小, 可以忽略不计, 则有$P_{\mathrm{xy}} = P_{\mathrm{x}} = P_{\mathrm{y}} = 0$. 由冲量、冲量矩定理得, 平行于击球面方向上的速度、角速度不变, 在击球面法线方向上, 速度按照恢复系数比例衰减, 角速度保持不变. 当旋转球与球台相对滚动时, 反弹模型为

$$\begin{cases} \boldsymbol{V}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} V_{\mathrm{ix}} \\ V_{\mathrm{iy}} \\ -eV_{\mathrm{iz}} \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{i}}. \end{cases} \tag{5}$$

4 根据学习算法得到的乒乓球与球台之间的反弹模型(Learning rebound model between spinning ball and table)

由于乒乓球飞行过程中的受力情况在击球面的切线方向和法线方向上是解耦的, 可以单独分析两个方向上的反弹模型.

由乒乓球与球台反弹过程中的受力、冲量和冲量矩的分析可知, 在击球面法线方向上, 速度按照恢复系数比例衰减, 角速度保持不变, 即其反弹前后速度和角速度满足以下关系:

$$\begin{cases} V_{\mathrm{ez}} = -eV_{\mathrm{iz}}, \\ \omega_{\mathrm{ez}} = \omega_{\mathrm{iz}}. \end{cases} \tag{6}$$

在击球面的切线方向上, 从第3节的分析过程得知: 反弹后X轴方向上的速度与反弹前的X轴方向上的速度和Y轴方向上的角速度相关, 角速度与反弹前X轴方向上的角速度和Y轴方向上的速度相关. 与此对应的, 反弹后Y轴方向上的速度与反弹前的X轴方向上的角速度和Y轴方向上的速度相关, 角速度与反弹前X轴方向上的速度和Y轴方向上的角速度相关. 本文假设其为线性关系, 并利用其多元线性回归来拟合反弹前后的速度与角速度关系

$$\begin{cases} V_{\mathrm{ex}} = k_{\mathrm{vx1}}V_{\mathrm{ix}} + k_{\mathrm{vx2}}\omega_{\mathrm{iy}} + b_{\mathrm{vx}}, \\ V_{\mathrm{ey}} = k_{\mathrm{vy1}}V_{\mathrm{iy}} + k_{\mathrm{vy2}}\omega_{\mathrm{ix}} + b_{\mathrm{vy}}, \\ \omega_{\mathrm{ex}} = k_{\mathrm{wx1}}V_{\mathrm{iy}} + k_{\mathrm{wx2}}\omega_{\mathrm{ix}} + b_{\mathrm{wx}}, \\ \omega_{\mathrm{ey}} = k_{\mathrm{wy1}}V_{\mathrm{ix}} + k_{\mathrm{wy2}}\omega_{\mathrm{iy}} + b_{\mathrm{wy}}. \end{cases} \tag{7}$$

通过多组测量数据, 利用多元线性回归来获得各个参数值.

5 乒乓球与球拍之间的反弹模型(Rebound model between spinning ball and racket)

球拍和桌面对于乒乓球运动的差别在于: 球拍是运动的, 而球桌是静止的. 因而乒乓球绝对运动=乒乓球对球拍的相对运动+乒乓球拍运动. 由此引入乒乓球与球拍之间的反弹模型.

世界坐标系中表示的速度与球拍坐标系中表示的速度之间的关系:

$$\boldsymbol{V} = \dot{T}\cdot {}^{e}\boldsymbol{Q} + T\cdot {}^{e}\boldsymbol{V}, \tag{8}$$

其中: $\boldsymbol{V}$是世界坐标系中表示的速度, T是世界坐标系到球拍坐标系的变换矩阵, $\dot{T}$是T的导数, ${}^{e}\boldsymbol{Q}$是球拍坐标系中的齐次坐标, ${}^{e}\boldsymbol{V}$是球拍坐标系中表示的速度.

假定在击球时刻球拍的姿态保持不变, 则T矩阵中的旋转矩阵部分元素对时间求导均为零, 而T矩阵中的平移向量部分对时间求导均不为零. 假设T矩阵中平移向量对时间的导数为$(\dot{q}_{\mathrm{x}}, \dot{q}_{\mathrm{y}}, \dot{q}_{\mathrm{z}})^{\mathrm{T}}$, 球拍在击球时刻的速度$\boldsymbol{V}_{\mathrm{ph}} = (v_{\mathrm{phx}}, v_{\mathrm{phy}}, v_{\mathrm{phz}})^{\mathrm{T}}$, 有

$$\dot{T}\cdot {}^{e}Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{q}_{\mathrm{x}} \\ 0 & 0 & 0 & \dot{q}_{\mathrm{y}} \\ 0 & 0 & 0 & \dot{q}_{\mathrm{z}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{e}q_{\mathrm{x}} \\ {}^{e}q_{\mathrm{y}} \\ {}^{e}q_{\mathrm{z}} \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & v_{\mathrm{phx}} \\ 0 & 0 & 0 & v_{\mathrm{phy}} \\ 0 & 0 & 0 & v_{\mathrm{phz}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{e}q_{\mathrm{x}} \\ {}^{e}q_{\mathrm{y}} \\ {}^{e}q_{\mathrm{z}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{\mathrm{phx}} \\ v_{\mathrm{phy}} \\ v_{\mathrm{phz}} \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{ph}}. \tag{9}$$

将式(9)代入式(8)可得

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{ph}} + T^{e}\boldsymbol{V}. \tag{10}$$

将根据飞行轨迹获得的乒乓球来球速度$\boldsymbol{V}_{\mathrm{i}}$和角速度$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{i}}$, 碰撞后乒乓球的出球速度$\boldsymbol{V}_{\mathrm{e}}$、角速度$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}$分别代入式(10), 并将方程变换为如下形式:

$${}^{e}\boldsymbol{V}_{\mathrm{i}} = T^{-1}(\boldsymbol{V}_{\mathrm{i}} - \boldsymbol{V}_{\mathrm{ph}}), \tag{11}$$

$$^{e}\boldsymbol{V}_{\mathrm{e}} = T^{-1}(\boldsymbol{V}_{\mathrm{e}} - \boldsymbol{V}_{\mathrm{ph}}). \tag{12}$$

对于角速度, 由于在击球时刻球拍的姿态保持不变, 世界坐标系中表示的角速度与球拍坐标系中表示的角速度之间的关系满足

$$\boldsymbol{\omega} = T\,^{e}\boldsymbol{\omega},\ \text{即}\ ^{e}\boldsymbol{\omega} = T^{-1}\boldsymbol{\omega}.$$

将$^{e}\boldsymbol{V}_{\mathrm{i}}$和$^{e}\boldsymbol{V}_{\mathrm{e}}$及上式其代入式(3)和式(5)或者式(6)和式(7), 即可得到球拍的反弹模型.

6 参数估计(Parameter estimation)

令$(1+e)\mu = \eta$, 则系统(3)可简化为关于参数η和e的线性系统

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{e}} - \begin{bmatrix} V_{\mathrm{ix}} \\ V_{\mathrm{iy}} \\ 0 \end{bmatrix} = -\eta \begin{bmatrix} \mathrm{ctg}\alpha(V_{\mathrm{ix}} - r\omega_{\mathrm{iy}}) \\ \mathrm{ctg}\alpha(V_{\mathrm{iy}} + r\omega_{\mathrm{ix}}) \\ 0 \end{bmatrix} - e \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V_{\mathrm{iz}} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{i}} + \eta \begin{bmatrix} \dfrac{3}{2r}\mathrm{ctg}\alpha(V_{\mathrm{iy}} + r\omega_{\mathrm{ix}}) \\ -\dfrac{3}{2r}\mathrm{ctg}\alpha(V_{\mathrm{ix}} - r\omega_{\mathrm{iy}}) \\ 0 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} V_{\mathrm{ex}} - V_{\mathrm{ix}} \\ V_{\mathrm{ey}} - V_{\mathrm{iy}} \\ V_{\mathrm{ez}} \\ \omega_{\mathrm{ex}} - \omega_{\mathrm{ix}} \\ \omega_{\mathrm{ey}} - \omega_{\mathrm{iy}} \\ \omega_{\mathrm{ez}} - \omega_{\mathrm{iz}} \end{bmatrix} = \eta \begin{bmatrix} -\mathrm{ctg}\alpha(V_{\mathrm{ix}} - r\omega_{\mathrm{iy}}) \\ -\mathrm{ctg}\alpha(V_{\mathrm{iy}} + r\omega_{\mathrm{ix}}) \\ 0 \\ \dfrac{3\mathrm{ctg}\alpha(V_{\mathrm{iy}} + r\omega_{\mathrm{ix}})}{2r} \\ -\dfrac{3\mathrm{ctg}\alpha(V_{\mathrm{ix}} - r\omega_{\mathrm{iy}})}{2r} \\ 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -V_{\mathrm{iz}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

通过实验平台[13]获取了12组乒乓球的运动轨迹, 按照文献[14]中的方法获得乒乓球碰撞球台前后的速度与角速度值, 如表1所示.

表 1 测量得到的速度和角速度值

Table 1 The measured values of velocity and angular velocity

序号	$\boldsymbol{V}_{\mathrm{i}}$ / (m · s^{-1})	$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{i}}$ / (rad · s^{-1})	$\boldsymbol{V}_{\mathrm{e}}$ / (m · s^{-1})	$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{e}}$ / (rad · s^{-1})
1	$(0.92, -2.89, -2.46)^{\mathrm{T}}$	$(-35.44, 4.13, -7.29)^{\mathrm{T}}$	$(0.54, -1.97, 2.22)^{\mathrm{T}}$	$(11.35, 0.85, 0.00)^{\mathrm{T}}$
2	$(-0.20, -3.03, -2.57)^{\mathrm{T}}$	$(-45.95, -43.76, -41.16)^{\mathrm{T}}$	$(-0.15, -2.08, 2.28)^{\mathrm{T}}$	$(12.42, 13.56, -9.98)^{\mathrm{T}}$
3	$(0.45, -3.21, -2.60)^{\mathrm{T}}$	$(30.25, -23.41, -15.86)^{\mathrm{T}}$	$(0.26, -2.14, 2.31)^{\mathrm{T}}$	$(17.45, 7.45, -6.44)^{\mathrm{T}}$
4	$(0.72, -2.96, -2.61)^{\mathrm{T}}$	$(47.27, 2.32, 12.83)^{\mathrm{T}}$	$(0.41, -1.92, 2.31)^{\mathrm{T}}$	$(20.32, 8.03, -5.70)^{\mathrm{T}}$
5	$(0.41, -3.14, -2.64)^{\mathrm{T}}$	$(-12.55, -77.00, -85.94)^{\mathrm{T}}$	$(0.24, -2.14, 2.32)^{\mathrm{T}}$	$(14.24, -11.74, 12.66)^{\mathrm{T}}$
6	$(0.29, -2.70, -2.50)^{\mathrm{T}}$	$(-33.25, -38.83, -43.38)^{\mathrm{T}}$	$(0.16, -1.82, 2.25)^{\mathrm{T}}$	$(14.03, 5.38, 1.30)^{\mathrm{T}}$
7	$(-0.27, -2.71, -2.59)^{\mathrm{T}}$	$(-37.32, -55.61, -52.33)^{\mathrm{T}}$	$(-0.19, -1.82, 2.3)^{\mathrm{T}}$	$(16.57, 15.10, -6.47)^{\mathrm{T}}$
8	$(-0.41, -3.04, -2.86)^{\mathrm{T}}$	$(-47.10, -23.22, -17.21)^{\mathrm{T}}$	$(-0.29, -2.09, 2.45)^{\mathrm{T}}$	$(14.34, 24.63, -18.79)^{\mathrm{T}}$
9	$(-0.46, -2.64, -2.98)^{\mathrm{T}}$	$(-54.17, -59.29, -49.50)^{\mathrm{T}}$	$(-0.32, -1.78, 2.51)^{\mathrm{T}}$	$(16.53, 16.76, -8.02)^{\mathrm{T}}$
10	$(-0.24, -3.07, -2.62)^{\mathrm{T}}$	$(-45.00, -26.57, -20.09)^{\mathrm{T}}$	$(-0.18, -2.11, 2.31)^{\mathrm{T}}$	$(12.95, 20.98, -16.85)^{\mathrm{T}}$
11	$(-0.52, -3.18, -2.68)^{\mathrm{T}}$	$(-27.07, -51.55, -43.15)^{\mathrm{T}}$	$(-0.35, -2.17, 2.35)^{\mathrm{T}}$	$(16.11, 20.68, -16.52)^{\mathrm{T}}$
12	$(0.35, -3.17, -2.64)^{\mathrm{T}}$	$(-53.60, -21.51, -19.13)^{\mathrm{T}}$	$(-0.25, -2.2, 2.32)^{\mathrm{T}}$	$(11.59, 20.23, -18.05)^{\mathrm{T}}$

当乒乓球碰撞乒乓球台前后的速度和角速度均已知时, 系统(13)中, 只有参数η和e未知, 然后通过最小二乘参数辨识获得参数η和e的估计值, 并由$\mu = \eta/(1+e)$计算得μ的估计值, 由$\varphi = \arctan(\dfrac{5(1+e)}{2}\mu)$计算临界摩擦角, 结果如下所示:

$$e = 0.8788,\ \mu = 0.1049,\ \varphi = 26.2318.$$

7 实验验证(Experiment)

本文将式(3)和式(5)组成的模型称为物理模型(physical model), 由式(6)和式(7)组成的模型称为学习模型(learning model). 将通过最小二乘参数辨识获得的参数μ和e的估计值、乒乓球与球台碰撞前的速度和角速度, 分别代入本文提到的两种模型与文献[3, 6–7]中提到的模型中, 并将计算得到反弹后的速度和角速度值与测量值进行了比较, 结果如图3和图4所示. 几个反弹模型计算得到的反弹后的速度和角速度与测量值之间的估计误差如图5和图6所示, 几种模型的误差比较结果如表2所示.

由图3–6可以看到, 本文提出的两种反弹模型都获得了比较好的估计结果, 验证了模型的有效性. 对比本文提到的两种模型与文献[3, 6–7]中提到的模型共4种模型的优缺点, 可以得到:

1) 在球台法线方向上, 4种反弹模型是相同的, 其对速度具有很好的估计结果, 而角速度的估计误差相对较大, 但因法线方向上的角速度对轨迹

预测准确性的影响不大, 因此不影响该模型的有效性.

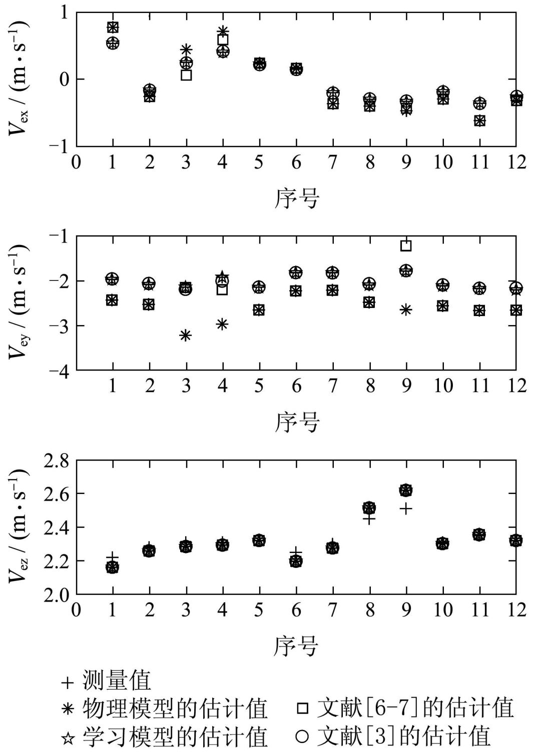

图 3 几种反弹模型的速度估计结果与测量值的比较

Fig. 3 Comparison of the estimated velocities of several rebound models and measured values

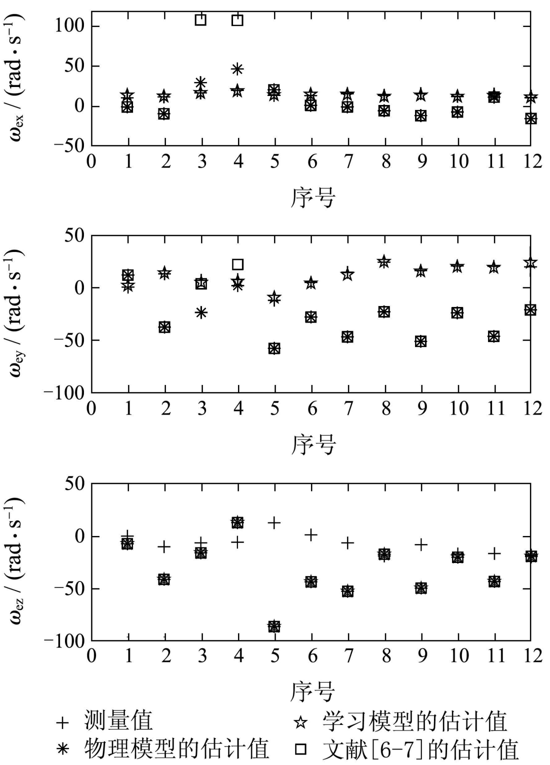

图 4 几种反弹模型的角速度估计结果与测量值的比较

Fig. 4 Comparison of the estimated angular velocities of several rebound models and measured values

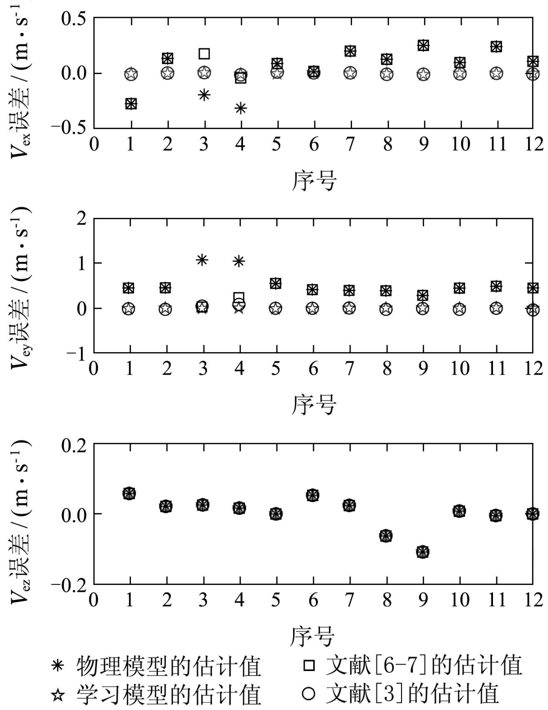

图 5 几种反弹模型的速度估计结果与测量值的误差

Fig. 5 Errors between the estimated velocities of several rebound models and measured values

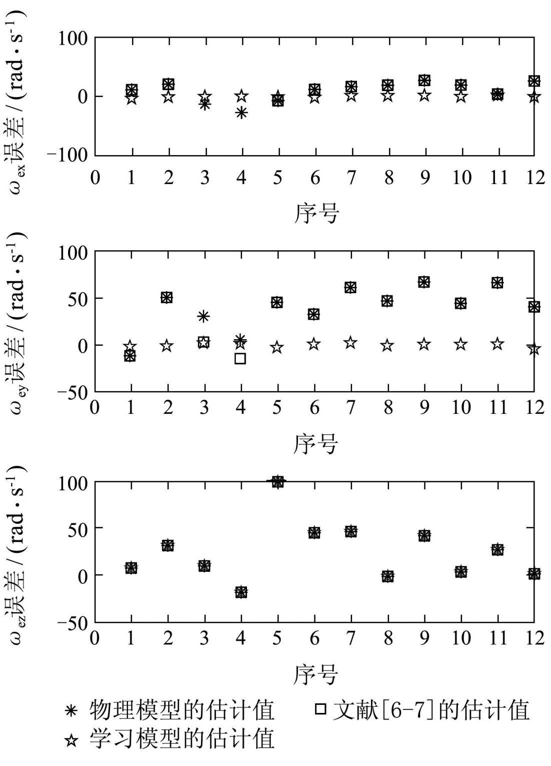

图 6 几种反弹模型的角速度估计结果与测量值的误差

Fig. 6 Errors between the estimated angular velocities of several rebound models and measured values

2) 在平行于球台方向上, 本文学习模型获得最佳估计效果, 尤其是角速度的估计误差明显小于本文物理模型和文献[6–7]中的模型. 文献[3]中

的模型对速度的估计效果较好, 但因未考虑角速度限制了其使用范围. 学习模型中参数估计结果依赖于选取的测量数据, 实际应用时可以通过在线学习不断更新模型中的参数值, 以进一步减小模型估计误差.

3) 本文物理模型较其他3种模型的优点是: 推导过程物理意义更加明确, 乒乓球与击球面的运动类型的判定条件与入射信息有关, 而文献[6–7]给出的判定条件与输出信息有关, 本文物理模型的判定条件可以通过反弹前测量的数据获得, 实时性、准确性较高. 当乒乓球与球台相对滚动时(即图3–6中, 序号3–4的数据), 本文物理模型比文献[6–7]的估计结果更精确, 尤其是角速度的估计误差更小.

表 2 几个反弹模型的估计结果与测量值的误差平均值、最大值和方差
Table 2 Average errors, maximum errors, and mean square errors between estimated values of the several models and the measured values

变量		本文物理模型	本文学习模型	文献[6–7]中的模型	文献[3]中的模型
$\boldsymbol{V}_e$/ $(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$	误差均值	$(0.0420, 0.5344, 0.0023)^{\mathrm{T}}$	$(0, 0, 0.0023)^{\mathrm{T}}$	$(0.0951, 0.3805, 0.0023)^{\mathrm{T}}$	$(0, 0, 0.0023)^{\mathrm{T}}$
	最大误差	$(0.2524, 1.0700, 0.0582)^{\mathrm{T}}$	$(0.0073, 0.0081, 0.0582)^{\mathrm{T}}$	$(0.2524, 0.5490, 0.0582)^{\mathrm{T}}$	$(0.0119, 0.0866, 0.0582)^{\mathrm{T}}$
	均方差	$(0.0374, 0.0631, 0.0022)^{\mathrm{T}}$	$(0, 0, 0.0022)^{\mathrm{T}}$	$(0.0204, 0.0195, 0.0022)^{\mathrm{T}}$	$(0, 0.0012, 0.0022)^{\mathrm{T}}$
ω_e/ $(\mathrm{rad\cdot s^{-1}})$	误差均值	$(9.19, 40.33, 24.11)^{\mathrm{T}}$	$(0, 0, 24.11)^{\mathrm{T}}$	$(-2.36, 36.35, 24.11)^{\mathrm{T}}$	—
	最大误差	$(27.46, 67.62, 98.59)^{\mathrm{T}}$	$(2.31, 2.43, 98.59)^{\mathrm{T}}$	$(27.46, 67.62, 98.59)^{\mathrm{T}}$	—
	均方差	$(282.90, 558.39, 976.80)^{\mathrm{T}}$	$(2.49, 3.87, 976.80)^{\mathrm{T}}$	$(1734.3, 821.8, 976.8)^{\mathrm{T}}$	—

8　结论(Conclusiona)

本文在对乒乓球与球台/球拍反弹过程动量、角动量进行分析的基础上, 提出“临界摩擦角”的概念, 并利用“临界摩擦角”给出乒乓球与球台/球拍之间是滚动还是滑动的判定条件, 即, 当飞行中的乒乓球向一定的击球面击去时, 来球速度与击球面法线方向的夹角大于等于临界摩擦角时, 乒乓球与击球面之间的相对运动是滑动; 当入射角小于临界摩擦角, 两者之间发生滚动, 并在此基础上进一步得到乒乓球与球台/球拍之间的一种反弹模型. 另外, 根据分析物理过程, 获得各种变量之间的相互关系, 通过学习和多变量线性拟合得到了一种线性反弹模型. 仿真实验验证了模型的有效性.

参考文献(References):

[1] ZHANG Z, XU D, YU J. Research and latest development of ping-pong robot player [C] //*Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Chongqing: IEEE, 2008: 4881 – 4886.

[2] 张正涛. 乒乓球机器人视觉测量与控制 [D]. 北京: 中国科学院, 2010.
(ZHANG Zhengtao. *Visual measurement and control for table tennis robot* [D]. Beijing: Chinese Academy of Sciences, 2010.)

[3] ZHANG Z T, XU D, YANG P. Rebound model of table tennis ball for trajectory prediction [C] //*Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*. Tianjin: IEEE, 2010: 376 – 380.

[4] 彭博, 洪永潮, 杜森森, 等. 乒乓球机器人击打点的预测方法 [J]. 江南大学学报(自然科学版), 2007, 6(4): 433 – 437.
(PENG Bo, HONG Yongchao, DU Sensen, et al. An approach to hit point prediction for ping pong robot [J]. *Journal of Jiangnan University (Natural Science Edition)*, 2007, 6(4): 433 – 437.)

[5] ANDERSSON R L. Dynamic sensing in a ping-pong playing robot [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1989, 5(6): 728 – 739.

[6] CHEN X P, TIAN Y, HUANG Q, et al. Dynamic model based ball trajectory prediction for a robot ping-pong player [C] //*Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*. Tianjin: IEEE, 2010: 603 – 608.

[7] AKIRA N, YOSUKE K, YUKI O, et al. Modeling of rebound phenomenon between ball and racket rubber [C] //*ICROS-SICE International Joint Conference 2009*. Japan: IEEE, 2009: 2295 – 2300.

[8] GARWIN R. Kinematics of an ultraelastic rough ball [J]. *American Journal of Physics*, 1969, 37(1): 88 – 92.

[9] BRODY H. That’s how the ball bounces [J]. *The Physics Teacher*, 1984, 22(8): 494 – 497.

[10] CROSS R. Effects of friction between the ball and strings in tennis [J]. *Sport England*, 2000, 3: 85 – 97.

[11] CROSS R. Measurements of the horizontal coefficient of restitution for a superball and a tennis ball [J]. *American Journal of Physics*, 2001, 70(5): 482 – 489.

[12] 刘维曾. 论击球摩擦角——兼论旋转量值定理和旋转效应 [J]. 武汉体育学院学报, 1985, 19(2): 83 – 88.

[13] 杨平. 直角坐标机器人的运动规划及控制策略研究 [D]. 北京: 中国科学院, 2011.
(YANG Ping. *Research on motion planning and control strategy for cartesian robots* [D]. Beijing: Chinese Academy of Sciences, 2010.)

[14] HUANG Y L, XU D, TAN M, et al. Trajectory prediction of spinning ball for ping-pong player robot [C] //*2011 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. San Francisco: IEEE, 2011: 3434 – 3439.

作者简介:

任艳青　(1983–), 女, 博士研究生, 目前研究方向为机器人的视觉测量与控制、智能控制, E-mail: yanqing.ren@ia.ac.cn;

徐　德　(1965–), 男, 研究员, 博士生导师, 目前研究方向为机器人视觉测量与控制、智能控制, E-mail: de.xu@ia.ac.cn;

谭　民　(1962–), 男, 研究员, 博士生导师, 主要研究方向为先进机器人控制、仿生机器人、多机器人协调与控制, E-mail: min.tan@ia.ac.cn.