

控制系统的脆弱性分析

何 朕^{1†}, 王广雄¹, 张 静², 戚建成¹, 周 荻¹

(1. 哈尔滨工业大学 控制科学与工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001; 2. 哈尔滨理工大学 自动化系, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要: 脆弱性是指一闭环系统的稳定性对参数摄动极端敏感. 这类系统的开环频率特性经过临界点 $(-1, j0)$ 的近旁, 这种与 $(-1, j0)$ 点之间脆弱的相对关系遇到任何可能的摄动就会遭到破坏. 文中分析指出, 控制系统的脆弱性可以用Bode积分来进行定量分析. 对于一个非最小相位的不稳定对象的控制来说, 控制器的不稳定极点与对象的不稳定极点加到一起会大大增加系统灵敏度函数的峰值. 故这类系统的设计必然是脆弱的. 对于不稳定的多变量对象的控制来说, 如果其中一个等价的输出反馈回路中有一个较大的不稳定极点, 那么其灵敏度函数也会出现大的峰值, 会导致脆弱性, 而利用Bode积分则可以避免设计的脆弱性.

关键词: 脆弱性; Bode积分; 输出反馈; 非最小相位系统; 不稳定对象

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Fragility analysis for control systems

HE Zhen^{1†}, WANG Guang-xiong¹, ZHANG Jing², QI Jian-cheng¹, ZHOU Di¹

(1. Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China;

2. Department of Automation, Harbin University of Science and Technology, Harbin Heilongjiang 150080, China)

Abstract: Fragility means that the stability of a closed-loop system is extremely sensitive to parameter perturbations. For these systems, the open-loop frequency response is closely passing by the critical stability point $(-1, j0)$, and the fragile relationship with the point $(-1, j0)$ can easily be violated by any possible perturbation. It is analyzed and pointed out that the fragility of a control system can be quantitatively analyzed by using the Bode integrals. For non-minimum-phase unstable plants, the unstable pole of the controller in addition with the unstable pole of the plant may greatly increase the peak of the sensitivity function. So the resulting design for such systems is unavoidably fragile. For multivariable unstable plants, there may be a rather large unstable pole in an equivalent output feedback loop, which can also cause a large peak of the sensitivity function and results in a fragile design. The Bode integral can also be used to avoid the fragility of the design.

Key words: fragility; Bode integral; output feedback; non-minimum-phase system; unstable plant

1 引言(Introduction)

脆弱性原是指一个优化设计的系统由于控制器参数的极微小摄动而失去稳定性^[1], 但是文献[1]把这归之为控制器的脆弱性, 所以一经提出就遭到质疑^[2-3]. 其实这是一个控制系统设计上的问题, 确实不应该只从控制器上来找原因. 大家知道任何一个反馈系统的稳定性都具有鲁棒性^[4], 虽然容许的摄动有大、有小. 这就是说, 只要系统的设计是稳定的, 都能容许实际上存在的各种微小摄动, 因而这个设计的工作点总是可以实现的, 当然稳定工作的范围有大有小. 但是实际上有些系统设计好以后却无法稳定工作, 尤其是一些优化设计的系统. 这就是脆弱性. 本文将分析指出, 控制系统的脆弱性问题是一种极端敏感的鲁棒性问题, 不是一种常规的有界摄动可以衡量的鲁棒性问题. 由于这种系统的稳定性即

使在理论上也只允许极微小的摄动(包括控制器或对象的摄动), 所以脆弱性的系统实际上是无法实现的, 即所设计的系统实际上是调试不出来的. 现实世界中, 一个优化设计的系统如果调试不出来, 即无法实现时, 很可能就是这个脆弱性问题. 这时如果从脆弱性的角度来审视和修改设计, 就有可能使这个设计起死回生. 这就是为什么要研究脆弱性问题的意义所在.

这里要指出的是自文献[1]提出脆弱性以来, 顺着文献[1]归之为控制器摄动的思路也常有一些有关脆弱性的文章发表, 这方面的代表性文献有[5-7]. 这些文献一般都只是在讨论控制器参数摄动对系统性能的影响, 都不去触及失去稳定性的问题, 将脆弱性等同于一般的参数摄动问题, 丧失了脆弱性问题的特殊性. 不过现在文献[1]的作者已经意识到系统

稳定性对参数摄动极端敏感的原因是在对象上,并归之为系统设计时采用了不适当的最小实现方法而引起的^[8].从文献[8]中的算例分析可以看出,这实际上是在最小实现的计算中出现了不稳定零极点相对消,使得设计后的实际系统无法稳定工作.应该指出的是,这个造成脆弱性的理由是值得商榷的.因为对实际设计来说,总有一定的物理背景,是否出现不稳定零极点相消是很容易察觉到的.而且实际上脆弱性也不能简单的用零极点相对消来解释.本文将利用Bode积分定理来对脆弱性进行定量的分析.

2 Bode积分(Bode integrals)

从现有的文献来看,脆弱性大多出现在不稳定对象的控制设计中,尤其是非最小相位不稳定对象的控制中常会出现脆弱性问题.小车-倒摆系统就是这类系统的典型代表.本文将以小汽车-倒摆系统作为对脆弱性问题进行定量分析时的背景.以文献[9]中的数据为例,小车-倒摆系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{5.715[1 - (0.13034s)^2]}{s^2[(0.12168s)^2 - 1]} = \frac{6.5574(58.8633 - s^2)}{s^2(s^2 - 67.5400)}. \quad (1)$$

这个 $G(s)$ 是从施加在小车上的力(控制输入)到小车位移(输出)的传递函数.由于式(1)中的非最小相位零点和不稳定极点的值相当接近.又因为这是一个不稳定对象,采用负反馈时一定要将这个频率特性拉到第3象限,所以控制器一定要有一个不稳定极点,才能提供 -180° 以上的相移.由于又增加了一个不稳定极点,使这个设计成为脆弱性的.注意到任何设计都要满足Bode积分约束^[10],所以这里采用Bode积分来进行分析.

定理1 Bode积分定理^[10-11].设开环传递函数 $L(s)$ 有不稳定极点 p_1, p_2, \dots, p_N ,系统的相对阶为 $\nu \triangleq n - m$.并设闭环系统是稳定的,则系统的灵敏度函数 $S(j\omega)$ 满足下列关系式:

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi \sum_{i=1}^N \operatorname{Re}(p_i), \quad \nu > 1, \quad (2)$$

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = -\gamma \frac{\pi}{2} + \pi \sum_{i=1}^N \operatorname{Re}(p_i), \quad \nu = 1. \quad (3)$$

这里 n 为传递函数 $L(s)$ 分母的阶次, m 为分子的阶次,

$$\gamma = \lim_{s \rightarrow \infty} sL(s).$$

而灵敏度函数

$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + L(j\omega)}. \quad (4)$$

定理的证明见文献[11].这个Bode积分定理说明,对数灵敏度的积分是一个常数.如果对象是稳定的,那

么这个积分等于零(设 $\nu > 1$),即

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = 0. \quad (5)$$

由于这里用的是对数,所以可以以 $|S| = 1$ 为界,小于1时对数为负,大于1时为正.式(5)的积分等于零,就是指对数灵敏度的正负面积相等.如果对象有不稳定极点,那么对数灵敏度的正面积就要超出负面积.另外,注意到超出系统的带宽时系统的开环增益 $|L|$ 有很大衰减,而灵敏度 $S = 1/(1 + L)$,所以带宽以外时 $S \rightarrow 1$,其对数为零.也就是说式(2)的积分上限虽然是 ∞ ,而积分面积的计算都是指在有限带宽之内的面积.对这里的脆弱性问题来说,灵敏度函数都存在很大的峰值,对数灵敏度从峰值衰减到带宽处的零就可近似按三角形的图形来考虑(参见下面的图2).由于带宽总是一定的,即三角形的底宽是一定的,如果式(2)右项的值越大,那么灵敏度的峰值就越大.

图1是系统Nyquist特性的示意图,设 ρ 为 $L(j\omega)$ 距 -1 点的最小距离.根据图中的几何关系可知

$$\rho = \min |1 + L|. \quad (6)$$

令灵敏度的最大幅值为 M_S ,则有

$$M_S = \max |S(j\omega)| = 1/\rho. \quad (7)$$

M_S 越大,表示频率特性离 -1 点越近,这时如果对象的参数有些变化,很容易导致不稳定,所以常以灵敏度的最大值 M_S 作为(闭环)系统鲁棒性的一个指标. M_S 的值一般应在1.2~2.0之间^[12], $M_S = 3$ 的系统实际上已不容易控制了^[10].

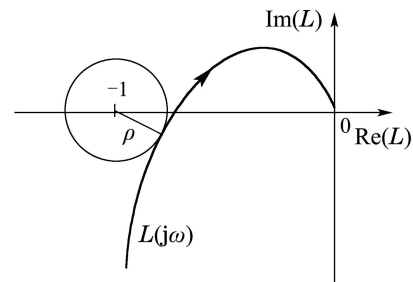


图1 系统的Nyquist图

Fig. 1 Nyquist plot of the system

上面已经指出,对于像小车-倒摆那样的非最小相位的不稳定对象的控制来说,控制器中一定会有一个不稳定极点.这样,与对象的不稳定极点加在一起,式(2)的右项就比较大了.正的面积增加了,而三角形的底宽(带宽)是一定的,所以灵敏度的峰值 M_S 就会很大,如果大大超出正常值,就称这个设计是脆弱性的.例如,当 M_S 超过20时,频率特性离 -1 点的距离就会小于0.05.系统实际实现时任何可能的摄动,或不精确性,或少许的时延,都可能到达这个数值.这样的系统实际上是不可能稳定工作的.

3 脆弱性分析(Fragility analysis)

这里先用一个简单的算例来进行说明. 因为这个算例中的数据比较简单, 便于进行定量分析. 这个算例选自 H_∞ 控制理论早期的经典著作^[13]. 这本来是一个 H_∞ 控制理论中用来说明双互质分解的一个算例, 可是从设计结果来分析, 这个设计却是脆弱的, 也从一个侧面说明了 H_∞ 优化设计中可能隐藏着脆弱性问题.

例1 双互质分解控制器. 设对象

$$G(s) = \frac{1-s}{s(s-2)}. \quad (8)$$

文献[13]算得的双互质分解控制器为

$$K(s) = \frac{1-41s}{s^2+6s-23}. \quad (9)$$

根据式(8)–(9)可得此反馈系统的特征方程式为

$$s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 = (s+1)^4 = 0. \quad (10)$$

式(10)表明, 该系统的4个极点都在-1点上, 应该是具有很好的动态性能了.

这个控制器 $K(s)$ 有两个极点: $-8.6568, 2.6568$, 而对象 $G(s)$ 的不稳定极点是2, 所以这个系统共有2个不稳定极点. 根据Bode积分式(2)可得对数灵敏度的面积为

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi \times (2 + 2.6568) = 14.6298 \text{ rad/s}. \quad (4)$$

如果这个面积按三角形来计算, 取其底宽(即带宽)为10 rad/s, 即三角形的高为 $\ln |S_{\max}| = 2.92596$, 对应的峰值 $S_{\max} = 18.65$.

图2是根据式(8)–(9)所求得的此系统的对数灵敏度曲线. 这个系统的灵敏度在低频时是小于1的, 即其对数小于0, 当 $\omega = 0.022 \text{ rad/s}$ 时, $\ln |S|$ 已从负值进入到正的区域. 可是在图2的自然坐标中, 这个 $\omega = 0.022$ 基本上就可算是原点了. 因此本例中对数灵敏度的面积只要按图2所示的 $\ln |S| > 0$ 的正面积来考虑. 超出带宽时 $\ln |S| \rightarrow 0$, 所以脆弱性问题中 $\ln |S|$ 是在有限的带宽内从峰值衰减到零, 对数灵敏度特性近似是一种三角形的图形.

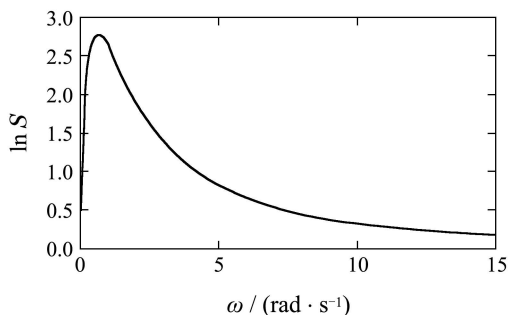


图2 例1的对数灵敏度曲线

Fig. 2 Sensitivity function of example 1

本例中 $\ln |S|$ 的峰值等于2.77, 对应于系统灵敏度的最大值 $M_S = 16$. 上面的18.65则是按三角形来近似估计的值. 三角形估计常用于正式设计前的近似估算. 本例的 $M_S = 16$, 即系统的Nyquist图线^[14]离-1点的最小距离约为0.06(见图3), 表明参数若稍有摄动系统就会不稳定了. 为了说明这个问题, 现在设这个对象 $G(s)$ 有一个很小的摄动, 成为 $G_\Delta(s)$,

$$G_\Delta(s) = \frac{1-s}{s(s-2)} \frac{1.05}{(0.05s+1)}.$$

即对象的增益增加了5%, 另有一个小时间常数. 现在这个 $G_\Delta(s)$ 与控制器 $K(s)$ (见式(9))形成的闭环特征方程式的极点为

$$-22.4003, -0.7145 \pm j2.8821, -0.0852 \pm j0.3147.$$

原来4个-1点的极点(见式(10)), 摄动后变成靠近虚轴的2对弱阻尼复数极点. 虽然系统理论上是稳定的, 但是这两对弱阻尼极点表明, 系统的稳定性极差, 是不能工作的. 本例的 $M_S = 16$, 虽然还没有超出下面对脆弱性界定的 $M_S > 20$, 不过当存在很小的摄动时, 系统的4个-1点的实数极点变成2对弱阻尼的极点(另有一个极点与小时间常数0.05 s对应), 还是反映出了脆弱性的基本特点.

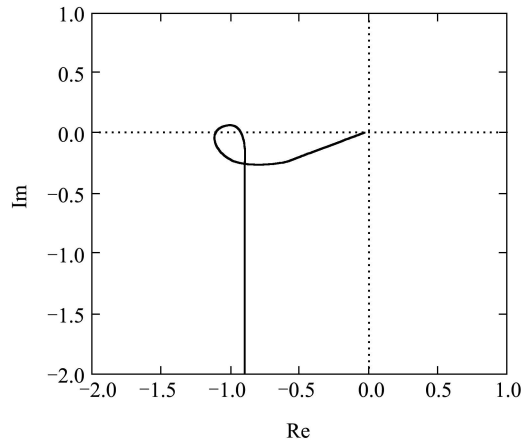


图3 例1的Nyquist图

Fig. 3 Nyquist plot of example 1

例2 小车-倒摆的输出反馈控制. 小车-倒摆是一个大家都熟悉的系统, 这里来讨论这个系统的输出反馈控制问题, 即取小车位置 x 作为输出来进行控制. 式(1)所示即为本例中的传递函数^[9].

这里用Bode积分来对文献[9]的设计结果进行分析. 文献[9]中采用的是常规的 H_∞ 控制中的PS/T混合灵敏度设计^[15], 所得的 H_∞ 控制器为

$$K(s) = \frac{q_3 s^3 + q_2 s^2 + q_1 s + q_0}{s^4 + p_3 s^3 + p_2 s^2 + p_1 s + p_0}, \quad (12)$$

式中:

$$q_3 = -297830.3275, p_3 = 413.5564,$$

$$q_2 = -2442666.2092, p_2 = 8506.7326,$$

$$q_1 = 41612.0346, p_1 = -1793408.3581,$$

$$q_0 = 32434.2268, p_0 = -14114070.2750.$$

该控制器的极点为

$$-7.692, 57.390, -84.385, -378.869,$$

而式(1)中对象的不稳定极点是8.2183, 总共是2个不稳定极点, 故Bode积分式(2)为

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi \times (8.2183 + 57.390) = 206.11 \text{ rad/s.} \quad (5)$$

此系统的带宽较宽, 如果按80 rad/s计算, 并按三角形来计算面积, 那么峰值, 即三角形的高为 $\ln |S_{\max}| \approx 5$, 对应的 $S_{\max} \approx 150$. 系统实际上的对数灵敏度图如图4所示.

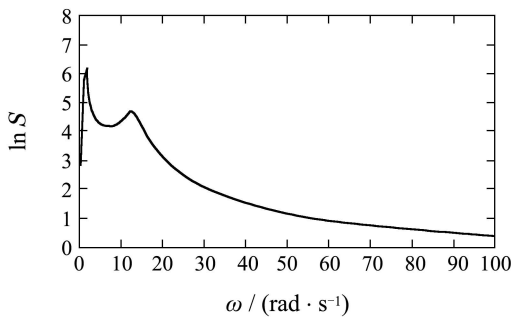


图4 小车-倒摆的对数灵敏度曲线

Fig. 4 Sensitivity function of the inverted pendulum system

这个系统的 S_{\max} 极高, 说明系统的Nyquist图是以极近的距离 (< 0.01) 绕过 -1 点的, 理论上当然还是稳定的. 此时闭环系统的极点为^[9]

$$-392.9, -8.195, -6.421, -2.179 \pm j13.052,$$

$$-1.223, -0.226 \pm j1.666$$

图5所示就是此输出反馈系统在初始偏差 $\theta(0) = 0.1 \text{ rad}$ 下的调节过程. 图5中: x 是小车位移, $\theta(t)$ 是倒立摆偏离倒立位置的角度.

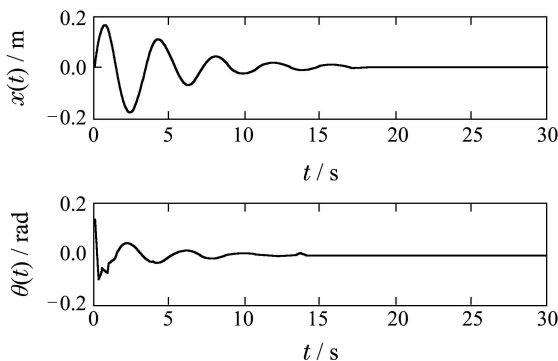


图5 小车-倒摆输出反馈下的调节过程

Fig. 5 Transient responses of the inverted pendulum system

在输出反馈控制问题中这个 θ 只是一个内部的

状态变量. 本例中包含 θ 的小车-倒摆系统的动态结构图如图6所示^[16], 而式(1)就是这个系统的从 u 到输出 x 的传递函数 $G(s)$. 所谓输出反馈, 就是指从输出 x 通过控制器 $K(s)$ (见式(12)), 作用到控制输入 u 的负反馈控制. 图5表明在这个输出反馈控制下, 小车上摆的倒立状态 ($\theta = 0^\circ$) 是稳定的, 虽然过渡过程中存在一些波动.

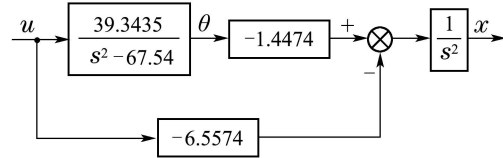


图6 小车-倒摆系统的动态结构

Fig. 6 Dynamic model of the inverted pendulum system

注意到图5只是一个仿真结果, 对于这种具有超高 S_{\max} 值的系统来说, 由于实际存在的模型的不精确性, 时延等因素很容易破坏系统Nyquist图线与 -1 点之间那种脆弱的相对关系. 所以实际系统的稳定的工作点是无法实现的. 也就是因为这个原因, 虽然输出反馈的解是存在的, 可是迄今为止还从来没有一个单靠输出反馈而使摆能稳定倒立在小车上的实例. 这就是脆弱性. 作为例子, 设控制器式(12)的增益增加为1.01倍(即系统的增益增加1%), 与此相应的闭环系统的极点变为

$$-393, -8.198, -6.931, -3.002 \pm j15.136,$$

$$-0.7184, 0.667 \pm j1.693,$$

与增益未增加前的极点比较, 最靠近虚轴的一对复数极点 $-0.226 \pm j1.666$ 已穿越虚轴进入右半面. 也就是说, 增益仅变化1%, 系统就不稳定了.

上面的控制器是用 H_∞ 控制理论来设计的, 其实这个脆弱性与设计方法并无直接联系, 第2节中应用Bode积分定理, 通过定性分析就已经可以预见出这个小车-倒摆系统的输出反馈是脆弱的. Isidori在文献[17]中针对这种非最小相位系统的输出反馈曾提出了一种“零动态解法”的设计方法, 但是不论设计思路怎么先进, 都解脱不了Bode积分的约束, “零动态解法”用在小车-倒摆上也同样是没有鲁棒性的^[18]. 这个脆弱性问题还可上溯到早年的Ishida的工作^[19], Ishida设计了 H_∞ 控制器, 但在实验中却无法稳定工作. 这恐怕是关于脆弱性的最早的报导了. 由于实验无法实现, 故文献[19]中并没有给出具体的控制器.

4 关于脆弱性与设计方法的讨论(Discussions about the fragility and the control design methods)

讨论1 文献中还有一些脆弱性的例子, 例如文献[1]中最有份量的两个例子(例1和例2)的对象也是

非最小相位的不稳定对象. 以该文的例1为例, 例中的对象为

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2},$$

其控制器是采用 H_∞ 的模型匹配法来求解的, 控制器为6阶, 控制器有一个不稳定极点174.70. 显然这个系统的Bode积分值是非常大的(试与式(13)对比). 事实上, 这个系统的Nyquist图线是在负实轴上的-1.0008处绕过-1点的^[1]. 理论上是稳定的, 实际上是无法工作的. 其实这种脆弱性与系统的设计方法并无必然的联系. 对于这种不易控制的对象, 常规的设计方法往往无法下手. 而优化设计方法, 尤其是 H_∞ 优化设计, 因为是一种synthesis(综合)方法, 控制器的解还是可以求得的, 可是这个解却无法摆脱Bode积分的约束, 出现了脆弱性问题. 所以即使可解得控制器, 实际上也是无法工作的. 但由于这种脆弱性常是在某一种优化设计下出现的, 会使人误以为优化设计必然会带来脆弱性^[1], 对这一点应该有正确的认识.

讨论2 上面的讨论是针对单回路系统的, 或者说是一种简单的输出反馈控制. 文献[14]中给出了另一种脆弱性的例子: 球-杆系统的 H_∞ 控制. 在那个例子中, 球-杆系统的控制器是用 H_∞ 的PS/T问题来设计的, 并通过了仿真验证, 可是在实验装置上却无法稳定工作^[14]. 球-杆系统是一个1输入2输出的不稳定对象. 对于一般的多变量不稳定对象的控制来说, 由于设计方法不同, 会形成不同的多回路结构, 如果这时某一个(物理)变量的等效回路中的不稳定极点与该回路的带宽相接近, 那么根据Bode积分式(2), 对数灵敏度的峰值 $\ln |S_{\max}| > \pi$ (注: 按三角形图形来估算), 即 $S_{\max} > 23$. 这时这个设计就是脆弱的, 即实际系统的稳定工作点是无法实现的. 这种脆弱性就与设计方法有关, 设计时应该根据Bode积分定理, 适当安排等效回路的不稳定极点以减少 S_{\max} 来避免脆弱性^[14]. 另外的一个例子是文献[20], 这实质上是一个关于脆弱性和避免脆弱性的设计实例, 也可供参考. 当然该文并没有正面提及脆弱性.

讨论3 对于相对阶 $\nu = 1$ (参见式(3))的情况, 如果所设计的系统是稳定的, 那么这个系统就是无源的^[21]. 理论上无源性设计总是稳定的. 不过对脆弱性问题来说, 要考虑到存在摄动, 包括有未建模动态, 而实际的物理(动态)系统, 分母的阶次总是高于分子的阶次, 因此考虑有未建模动态时, 系统的相对阶 ν 总是大于1的. 所以对研究以实际系统为背景的脆弱性问题来说, $\nu > 1$ 的情况更具有普遍性.

5 结论(Conclusions)

脆弱性是指一个优化设计的系统, 由于控制器或

对象的极微小摄动而失去稳定性, 本文指出这是一种对摄动极端敏感的鲁棒性问题. 这时系统的频率特性非常靠近-1点, 这种与-1点的脆弱的相对关系很容易遭到破坏. 因为实际系统总存在模型不精确性、信号传递中的时延等等因素都会使这稳定条件遭到破坏. 所以对脆弱性的系统来说, 设计的稳定工作点在实际上是无法实现的. 因此脆弱性问题是—个控制设计是否真能实现的问题.

控制系统的脆弱性定量上可以采用Bode积分对灵敏度函数的最大值 M_S 来进行分析. 一般正常设计的系统, M_S 都在2或者2以内, 如果作为鲁棒性问题来讨论时, M_S 的值可能还会大一些, 但这个系统仍是可以实验来研究的. 可是如果 $M_S > 20$, 那么任何实际上存在的微小摄动都会破坏其稳定性, 因此对于 $M_S > 20$ 的系统, 虽然设计是稳定的, 仿真时也能观察到系统是稳定的, 但是实际系统却是不存在的(不能工作的). 这就是脆弱性. 所以从定量分析来说, 可以将 $M_S > 20$ 的系统称为脆弱的.

Bode积分定理对处理脆弱性问题是很有有效的. 这是因为根据对象的零极点和带宽在设计开始阶段就可作出判断, 例如文中对小车-倒摆输出反馈脆弱性所作的判断.

参考文献(References):

- [1] KEEL L H, BHATTACHARYYA S P. Robust, fragile, or optimal? [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1098 – 1105.
- [2] MÄKILÄ P M. Comments on “robust, fragile, or optimal?” [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(9): 1265 – 1268.
- [3] PAATILAMMI J, MÄKILÄ P M. Fragility and robustness: a case study on paper machine headbox control [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2000, 20(1): 13 – 22.
- [4] EL-SAKKARY A K. The gap metric: robustness of stabilization of feedback systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1985, 30(3): 240 – 247.
- [5] FAMULARO D, DORATO P, ABDALLAH C T. Robust non-fragile LQ controller: the static state feedback case [J]. *International Journal of Control*, 2000, 73(2): 159 – 165.
- [6] WHIDBORNE J F, ISTEPANIAN R, WU J. Reduction of controller fragility by pole sensitivity minimization [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(2): 320 – 325.
- [7] 孙文安, 孙凤杰, 裴炳南, 等. 一类不确定时延网络控制系统的非脆弱 H_∞ 保成本控制 [J]. *电机与控制学报*, 2010, 14(2): 53 – 59. (SUN Wen'an, SUN Fengjie, PEI Bingnan, et al. Non-fragile H_∞ guaranteed cost control for a class of networked control systems with uncertain time delay [J]. *Electric Machines and Control II*, 2010, 14(2): 53 – 59.)
- [8] KEEL L H, BHATTACHARYYA S P. Structural instability and minimal realizations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 1014 – 1017.
- [9] 王广雄, 张静, 朱井泉. 倒立摆的输出反馈控制: 脆弱性和鲁棒性分析 [J]. *电机与控制学报*, 2002, 6(3): 221 – 223. (WANG Guangxiong, ZHANG Jing, ZHU Jingquan. Output feedback control of inverted pendulum: fragility and robustness [J]. *Electric Machines and Control*, 2002, 6(3): 221 – 223.)

- [10] STEIN G. Respect the unstable [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2003, 23(4): 12 – 25.
- [11] 王广雄, 何朕. 控制系统设计 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.
(WANG Guangxiong, HE Zhen. *Control System Design* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008.)
- [12] ÅSTRÖM K J, PANAGOPOULOS H, HÄGGLUND T. Design of PI controllers based on non-convex optimization [J]. *Automatica*, 1998, 34(5): 585 – 601.
- [13] FRANCIS B A. A Course in H_∞ control theory [R] // *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. New York: Springer-Verlag, 1987, 88.
- [14] 何朕, 饶丹, 王广雄, 等. 控制系统的脆弱性与鲁棒性 [J]. 电机与控制学报, 2011, 15(4): 80 – 84.
(HE Zhen, RAO Dan, WANG Guangxiong, et al. Fragility and robustness of the control system [J]. *Electric Machines and Control*, 2011, 15(4): 80 – 84.)
- [15] 王广雄, 何朕. 应用 H_∞ 控制 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2010.
(WANG Guangxiong, HE Zhen. *Applied H_∞ Control* [M]. Harbin: HIT Press, 2010.)
- [16] 张静, 王广雄, 何朕. 不稳定零动态系统的鲁棒控制 [J]. 电机与控制学报, 2005, 22(1): 67 – 71.
(ZHANG Jing, WANG Guangxiong, HE Zhen. Robust control of systems with unstable zero-dynamics [J]. *Electric Machines and Control*, 2005, 22(1): 67 – 71.)
- [17] ISIDORI A. A tool for semiglobal stabilization of uncertain non-minimum-phase nonlinear systems via output feedback [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(10): 1817 – 1827.
- [18] WANG G X, ZHANG J. Robustness of the design by unlocking the unstable zero-dynamics [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(1): 108 – 113.
- [19] ISHIDA T, GANEKO S. Consideration of H_∞ control of an inverted pendulum (in Japanese) [C] // *The 19th Symposium on Control Theory*. Tokyo: Hobonsya Press, 1990: 157 – 160.
- [20] BALINI H, SCHERER C, WITTE J. Performance enhancement for AMB systems using unstable H_∞ controllers [J]. *IEEE Control Systems Technology*, 2011, 19(6): 1479 – 1492.
- [21] KOKOTOVIC' P, ARCAK M. Constructive nonlinear control: a historical perspective [J]. *Automatica*, 2001, 37(5): 637 – 662.

作者简介:

何朕 (1972–), 女, 教授, 主要研究方向为 H_∞ 控制理论、控制系统的鲁棒设计, E-mail: hezhen@hit.edu.cn;

王广雄 (1933–), 男, 教授, 主要研究方向为 H_∞ 控制理论、控制系统的鲁棒设计, E-mail: gxwang@hit.edu.cn;

张静 (1968–), 女, 教授, 主要研究方向为控制系统的鲁棒设计, E-mail: zhangjing@hrbust.edu.cn;

戚建成 (1987–), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为控制系统的鲁棒设计, E-mail: zhangjing@hrbust.edu.cn;

周荻 (1969–), 男, 教授, 主要研究方向为非线性控制理论、非线性滤波理论, E-mail: zhou@hope.hit.edu.cn.