

无人飞行器纵向剖面轨迹优化

陈晓[†], 王新民, 周健

(西北工业大学 自动化学院, 陕西 西安 710129)

摘要: 对飞行管理系统的纵向剖面轨迹优化功能进行了研究. 以固定距离最省油为优化指标, 用能量法动态地建立了3阶段轨迹优化模型. 区别于固定推力只对速度寻优的传统的模型求解方法, 把发动机推力和速度同时作为寻优变量, 并结合无人飞行器飞行的物理过程, 将3阶段轨迹优化模型进一步变换成非线性规划问题, 利用再开始FR(Fletcher-Reeves)共轭梯度法进行求解. 最后以某型无人飞行器为例进行仿真验证, 结果表明将发动机推力设为变量比推力固定求得的纵向剖面最优轨迹更省油, 对节省燃油降低经济成本有一定的实用参考价值.

关键词: 无人飞行器; 能量方法; 轨迹优化; 非线性规划; 再开始FR共轭梯度法

中图分类号: V249 **文献标识码:** A

Optimization of vertical profile trajectory for unmanned aerial vehicle

CHEN Xiao[†], WANG Xin-min, ZHOU Jian

(College of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi 710129, China)

Abstract: In optimizing the vertical profile trajectory by energy method, we choose the fuel-efficient performance index for a given distance as the cost function and build a three-stage trajectory-optimization model. Being different from traditional methods that optimize the speed, while keeping the engine thrust in constant, this method optimizes both the engine thrust and the speed simultaneously. The three-stage trajectory-optimization model combined with the real flight process of the unmanned aerial vehicle is transformed into a nonlinear programming problem to be solved by using the restart FR (Fletcher-Reeves) conjugate gradient method. Simulations have been carried out on the unmanned aerial vehicle model. Results show that vertical profile optimal trajectory obtained by the proposed algorithm saves more fuel than that obtained by keeping the engine thrust in constant. The superiority in fuel-saving and cost-reduction is significant.

Key words: unmanned aerial vehicle (UAV); energy method; trajectory optimization; nonlinear programming; restart FR conjugate gradient method

1 引言(Introduction)

飞行管理系统在各类飞机上的应用越来越广泛, 纵向剖面轨迹优化是飞行管理系统的一项核心技术^[1], 它为飞行控制系统提供垂直制导指令, 并且可以节省燃油消耗、降低经济成本, 因此开展纵向剖面轨迹优化的研究十分重要.

无人飞行器纵向剖面轨迹优化, 即优化无人飞行器的纵向剖面参数, 如速度、高度和推力设置等, 这些连续的最优飞行状态, 构成了无人飞行器的最优飞行轨迹. 纵向飞行轨迹的优化研究^[2]已有几十年的历史了, 国内外出现了很多优化方法, 研究内容上也从点优化、段优化发展到全剖面优化. 全剖面的优化研究始于上世纪70年代, 近来该项研究在航空航天领域仍是一个热点课题^[3-4].

能量法^[5-8]是全剖面优化方法中的一个有效且实用的方法, 不仅可以简化无人飞行器质点方程, 还可以动态地优化整个纵向飞行剖面, 即利用该方法建立的3阶段优化模型之间是相互关联、不可分割的. 目前文献在求解这3阶段优化模型时, 均采用固定推力方式并只对速度寻优^[2, 9-11], 尚无人考虑将油门推力和速度变量同时进行优化. 若性能指标中含有节油这一项, 将油门推力固定, 得出的最优飞行轨迹其实并不是最省油的.

针对以上情况, 选取固定距离最省油为优化指标, 区别于文献^[2, 4], 提出将油门推力设为变量, 并结合无人飞行器的物理特性, 将能量法建立的优化模型进一步转换成非线性规划问题, 由于转化后的目标函数是非二次的, 采用再开始FR(Fletcher-

Reeves)共轭梯度法进行求解。

2 基于能量法的轨迹优化模型(Trajectory optimization model based on energy method)

2.1 性能指标函数(Performance index function)

要求按预先给定的距离优化整个纵向飞行剖面,因此选取性能指标为固定距离最省油,具体定义为

$$J = \int_0^{t_f} \dot{f} dt, \quad (1)$$

其中: t_f 为终端时间, \dot{f} 为单位时间的燃油消耗率。

$$\dot{f} = -\frac{dm}{dt}, \quad (2)$$

其中 m 为无人飞行器质量。

2.2 基于能量法的轨迹优化模型(Trajectory optimization model based on energy method)

2.2.1 无人飞行器质点模型的简化(Simplification of UAV particle model)

用能量法优化飞行轨迹时,对于固定距离下最省油的优化问题,其飞行轨迹一般具有爬升-巡航-下滑3段^[12-14],且无人飞行器的能量在爬升段单调增加、巡航段保持常值,下滑段单调减少。

定义单位重量的总能量 E 为

$$E = H + \frac{V^2}{2g}, \quad (3)$$

其中: H 为飞行高度, V 为无人飞行器相对地面的飞行速度,无风时即为相对空气速度, g 为重力加速度。

欧美坐标系中无人飞行器纵向剖面质点方程^[15]如下:

$$\begin{cases} m \frac{dV}{dt} = T \cos(\alpha + \varphi) - D - mg \sin \gamma, \\ mV \frac{d\gamma}{dt} = T \sin(\alpha + \varphi) + L - mg \cos \gamma, \\ \frac{dx}{dt} = V \cos \gamma, \\ \frac{dz}{dt} = -V \sin \gamma, \\ \frac{dm}{dt} = -\dot{f}, \end{cases} \quad (4)$$

式中: T 为发动机推力, D 为阻力, L 为升力, α 为迎角, φ 为发动机安装角, γ 为航迹倾斜角, x, z 为地面坐标系中无人飞行器质心的纵向和法向坐标,且 $H = -z$ 。

假设发动机安装角为0,且飞行过程中航迹倾斜角变化不大则 $\frac{d\gamma}{dt} = 0$,式(3)和式(4)联立得到无人飞行器能量状态方程:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = \frac{V(T \cos \alpha - D)}{mg}, \\ \frac{dx}{dt} = V \cos \gamma. \end{cases} \quad (5)$$

进一步简化无人飞行器质点方程,减少状态变量个数,由式(5)得

$$\frac{dx}{dE} = \frac{mgV \cos \gamma}{V(T \cos \alpha - D)}. \quad (6)$$

2.2.2 能量轨迹优化模型的建立(Establishment of energy trajectory optimization model)

将能量代替时间作为新的积分变量,将式(5)代入性能指标函数式(1)中,得

$$J = \int_{E_0}^{E_f} \frac{mg\dot{f}}{V(T \cos \alpha - D)} dE, \quad (7)$$

其中: E_0, E_f 分别表示爬升开始和下滑终止时的能量。此时末端能量 E_f 由终端速度和终端高度决定。

根据无人飞行器纵向剖面飞行轨迹的3段式结构,式(6)和式(7)可以分别变换为与能量变量相关的状态方程式(8)和性能指标函数式(9)。

状态方程:

$$\frac{dx}{dE} = \frac{d(x_{up} + x_{dn})}{dE} = \frac{V_{up} \cos \gamma}{\dot{E}} \Big|_{\dot{E} > 0} + \frac{V_{dn} \cos \gamma}{|\dot{E}|} \Big|_{\dot{E} < 0}, \quad (8)$$

式中: $x_{up}, x_{dn}, V_{up}, V_{dn}$ 为无人飞行器爬升、下降时的前向飞行距离和飞行速度。

性能指标函数:

$$J = \lambda d_c + \int_{E_0}^{E_c} \left(\frac{\dot{f}}{E} \right) dE \Big|_{\dot{E} > 0} + \int_{E_c}^{E_f} \left(\frac{\dot{f}}{E} \right) dE \Big|_{\dot{E} < 0}, \quad (9)$$

式中: E_0, E_c, E_f 为无人飞行器爬升初始能量、巡航段初始能量和下滑段末端能量, λ 为巡航段单位距离耗油成本, d_c 为巡航距离。

这样最初的固定距离最省油问题,经过变换得到式(8)和式(9)组成的最优控制问题,根据最优控制理论中的变分法和极小值原理推导出三段结构的飞行轨迹优化模型,如下:

巡航段:

$$\lambda = \min_{V_c, T} \frac{\dot{f}}{V_c}. \quad (10)$$

爬升段:

$$I_{up} = \min_{V_{up}, T} \left[\frac{\dot{f} - \lambda_1 V_{up} \cos \gamma}{\dot{E}} \right] \Big|_{\dot{E} > 0}. \quad (11)$$

下滑段:

$$I_{dn} = \min_{V_{dn}, T} \left[\frac{\dot{f} - \lambda_2 V_{dn} \cos \gamma}{|\dot{E}|} \right] \Big|_{\dot{E} < 0}, \quad (12)$$

其中 λ_1, λ_2 表示巡航段开始和结束时无人飞行器质量所对应的最优巡航成本,因此模型求解时首先对巡航段的优化模型进行解算。

3 非线性规划问题(Nonlinear programming problem)

将优化模型式(10)–(12)分别变换成有约束连续非线性规划问题, 如下:

$$\begin{cases} \min_{X \in M} f(X), \\ \text{s.t. } g_i(X) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p, \\ h_j(X) = 0, \quad j = 1, \dots, q. \end{cases} \quad (13)$$

可行域 M 满足下式:

$$M = \{ X = (V, T) \in \mathbb{R}^2 \mid g_i(X) \leq 0, \\ i = 1, \dots, p, h_j(X) = 0, j = 1, \dots, q \}.$$

结合无人飞行器的物理特性, 分析了3阶段非线性规划问题的确立过程.

1) 巡航段. 燃油消耗率 \dot{f} 与发动机的耗油率有关, 根据提供的离散数据, 采用最小二乘多项式曲面拟合巡航速度 V_c 和推力 T 的函数. 因此巡航段的目标函数可以表示如下:

$$\lambda(V_c, T) = \frac{\dot{f}}{V_c} = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} V_c^i T^j}{V_c}, \quad (14)$$

约束条件:

$$\begin{aligned} T - \frac{1}{2} C_D \rho V_c^2 S &= 0, \\ \frac{1}{2} C_L \rho V_c^2 S - mg &= 0, \\ 0 < V_{\min} \leq V_c \leq V_{\max}, \\ 0 < T_{\min} \leq T \leq T_{\max}, \end{aligned}$$

式中: C_D, C_L, ρ, S 分别表示阻力系数、升力系数、大气密度和机翼参考面积. 升力系数和阻力系数通过升阻比曲线联系在一起. 巡航速度 V_c 须在无人飞行器的飞行包线内. 推力 T 在其限制区间内, 其中最大推力 T_{\max} 是发动机处于最大许用转速工作状态下对应的推力, 最小推力 T_{\min} 是由发动机的最小折合转速 np_{\min} 所对应推力.

$$\begin{aligned} np_{\min} &= 22650 \times \sqrt{\frac{288.15}{C_{t1}}} / 29500, \\ C_{t1} &= C_e \left(1 + \frac{1.4 - 1}{2} \times Ma^2 \right), \end{aligned}$$

其中: C_{t1} 为发动机进气口总温, C_e 为环境温度, Ma 为无人飞行器的飞行马赫数.

2) 爬升段. 假设无人飞行器在爬升时不做大机动飞行, 迎角 α 比较小, $\cos \alpha \approx 1$, 因此模型(11)中的能量变化率 \dot{E} , 可以表示成变量 V 和 T 的函数, 见式(5), 其中阻力 $D = C_D \rho V_c^2 S / 2$. 参照文献 [14], 爬升时的航迹角可以表示成

$$\gamma = \arcsin \frac{\Delta T}{mg},$$

其中: $\Delta T = T_a - T_R$ 为爬升时的剩余推力, T_a 为发动机可用推力, T_R 为无人飞行器平飞时的需用推力.

所以爬升段的目标函数可以表示如下:

$$\begin{aligned} I_{\text{up}}(V_{\text{up}}, T) &= \frac{mg[\dot{f} - \lambda_1 V_{\text{up}} \cos \gamma]}{V_{\text{up}}(T - D)} = \\ &= \frac{mg[\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} V_{\text{up}}^i T^j - \lambda_1 V_{\text{up}} \cos(\arcsin(\frac{\Delta T}{mg}))]}{V_{\text{up}}(T - C_D \rho V_{\text{up}}^2 S / 2)}. \end{aligned} \quad (15)$$

约束条件:

$$\begin{aligned} 0 < V_{\min \text{ up}} \leq V_{\text{up}} \leq V_{\max \text{ up}}, \\ 0 < T_{\min} \leq T \leq T_{\max}, \end{aligned}$$

式中 λ_1 为常值, ΔT 由发动机的特性曲线和巡航段得到的平飞需用推力曲线可以计算得出. 爬升速度 V_{up} 的约束区间需要保证在该区间内爬升时的剩余推力为正, 这样无人飞行器可以一直不掉高度地向上爬升. 推力 T 的限制区间与巡航段相同.

3) 下滑段. 无人飞行器下滑时的假设与爬升时相同, 得到的能量变化率 \dot{E} 与爬升时相差一个负号. 航迹角

$$\gamma = \arcsin \frac{\Delta T}{mg} = \arcsin \frac{T_a - T_R}{mg},$$

其中 ΔT 为下滑时的剩余推力.

所以下滑段的目标函数可以表示如下:

$$\begin{aligned} I_{\text{dn}}(V_{\text{dn}}, T) &= \frac{mg[\dot{f} - \lambda_2 V_{\text{dn}} \cos \gamma]}{V_{\text{dn}}(D - T)} = \\ &= \frac{mg[\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} V_{\text{dn}}^i T^j - \lambda_2 V_{\text{dn}} \cos(\arcsin \frac{\Delta T}{mg})]}{V_{\text{dn}}(C_D \rho V_{\text{dn}}^2 S / 2 - T)}. \end{aligned} \quad (16)$$

约束条件:

$$\begin{aligned} 0 < V_{\min \text{ dn}} \leq V_{\text{dn}} \leq V_{\max \text{ dn}}, \\ 0 < T_{\min} \leq T \leq T_{\max}. \end{aligned}$$

式中 λ_2 为常值, 下滑速度 V_{dn} 的约束区间, 需要保证在该区间内下滑时的剩余推力为负, 这样无人飞行器可以一直向下飞行.

4 再开始FR共轭梯度法(Restart FR conjugate gradient method)

利用广义乘子法将有约束非线性规划问题转化为无约束非线性规划. 由于FR共轭梯度法求解无约束非线性规划的非二次函数时, 在 n 轮迭代后, 一般不能得到目标函数的驻点, 因此采用再开始FR共轭梯度法进行求解.

再开始FR共轭梯度法的计算步骤如下:

Step 1 选取初始点 X^0 , 给定终止误差 $\epsilon > 0$.

Step 2 计算 $\nabla f(X^0)$, 若 $\|\nabla f(X^0)\| \leq \varepsilon$, 停止迭代, 输出 X^0 ; 否则, 进行Step 3.

Step 3 取 $X^0 = -\nabla f(X^0)$, 令 $k := 0$.

Step 4 进行一维搜索求 t^k , 使得

$$f(X^k + t_k p^k) = \min_{t \geq 0} f(X^k + t p^k),$$

令 $X^{k+1} = X^k + t_k p^k$.

Step 5 计算 $\nabla f(X^{k+1})$, 若 $\|\nabla f(X^{k+1})\| \leq \varepsilon$, 停止迭代, 输出 X^{k+1} ; 否则进行Step 6.

Step 6 若 $k + 1 = n$, 令 $X^0 := X^n$, 转Step 3; 否则进行Step 7.

Step 7 用F-R公式取

$$p^{k+1} = -\nabla f(X^{k+1}) + \lambda_k p^k,$$

其中

$$\lambda_k = \frac{\|\nabla f(X^{k+1})\|^2}{\|\nabla f(X^k)\|^2}.$$

令 $k := k + 1$, 转Step 4.

说明 Step 4中求步长 t^k 时, 进行精确一维搜索需要的计算量比较大, 从整体观点来看对加速 $\{X^k\}$ 的收敛作用不大, 因此采用非精确一维搜索Armijo方法. Armijo方法只要求得满足某些较宽规则的点, 从而使计算量大大减少.

再开始FR共轭梯度法在迭代过程中包含有最速下降法的迭代步骤, 因此在较弱的条件下仍然具有总体收敛性, 并且至少有线性收敛速度. 线性搜索运算保证了迭代产生的点列的目标函数是单调下降的, 经过线性迭代后, 一定能得到目标函数的极小值点.

5 仿真结果(Simulation results)

仿真条件: 飞行距离为400 km, 爬升初始高度为1 km, 初始速度为0.5 Ma, 下降终端高度为1 km, 终端速度为0.5 Ma, 巡航高度范围为6~10 km, 巡航Ma范围为0.5~0.7 Ma, 无人飞行器的满油质量为950 kg, 空油质量为600 kg.

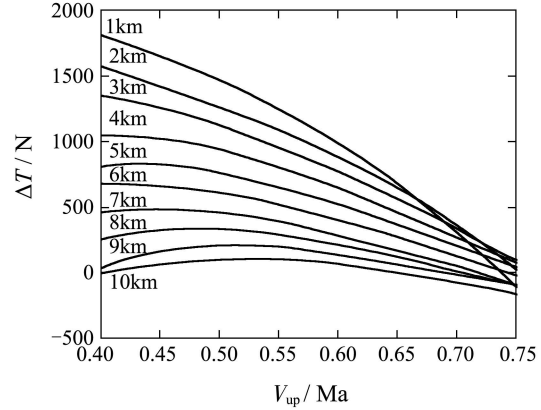
实验是在IBM计算机(奔腾4, CPU 3.00 GHz, 内存2 G)上进行的, 编程环境是MATLAB 7.0.

5.1 速度和发动机推力的变化范围(Velocity and engine thrust range)

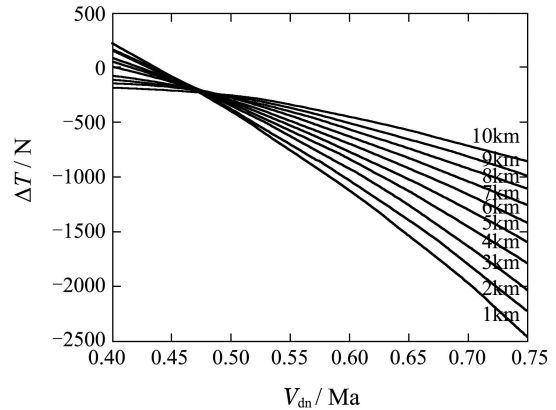
1) 速度的变化范围.

巡航Ma数范围在仿真条件中已经给定, 爬升和下滑的速度限制需要在轨迹优化仿真前确定.

根据非线性规划变换一节中速度的约束条件可知, 选用的速度区间需使爬升时的剩余推力为正, 下滑时的剩余推力为负, 否则会出现爬升时航迹角为负, 下滑时航迹角为正的情况, 这在飞行过程中是不允许的. 剩余推力曲线如图1.



(a) 爬升剩余推力随Ma数的变化曲线



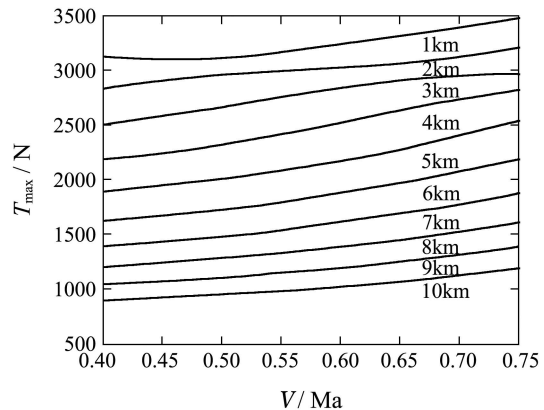
(b) 下滑剩余推力随Ma数的变化曲线

图1 不同高度下剩余推力随Ma数的变化曲线
Fig. 1 Residual thrust curve with the Ma number at different height

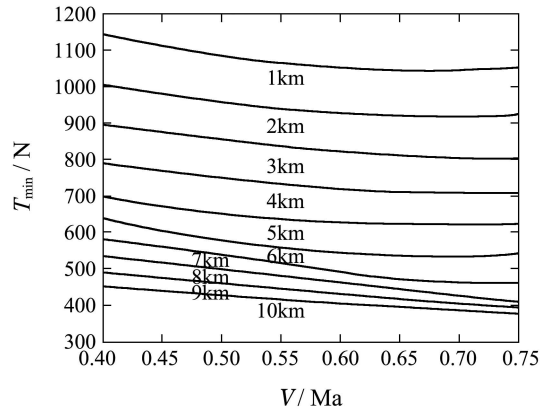
分析图1: 爬升时Ma数范围在 $[0.45, 0.65]$ 之间可以保证剩余推力为正; 下滑时Ma数范围在 $[0.45, 0.7]$ 之间, 可以保证剩余推力为负.

2) 推力的变化范围.

根据非线性规划变换一节中发动机推力的约束条件可知, 某型无人飞行器上的涡喷发动机最大和最小可用推力曲线如图2. 由图2可知, 发动机的最大和最小可用推力均随着高度的增加而不断减小. 不同的高度下, 发动机的可用推力范围也不一样.



(a) 发动机最大可用推力曲线

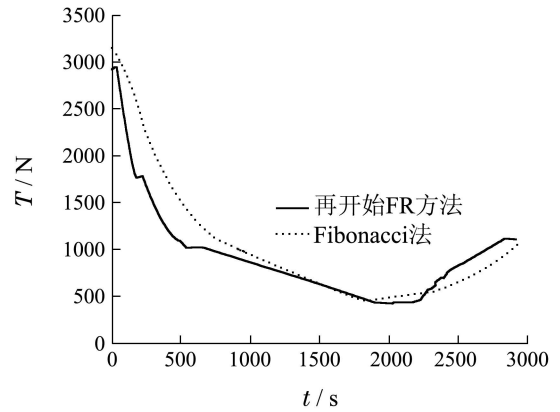


(b) 发动机最小可用推力曲线

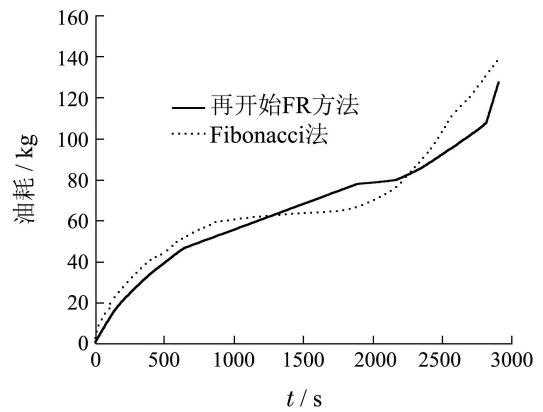
图 2 不同高度下发动机可用推力随Ma数的变化曲线
Fig. 2 Engine available thrust curve with the Ma number at different height

5.2 最优轨迹(Optimal trajectory)

无人飞行器从起始点爬升, 飞行一段时间到达终点, 纵向剖面轨迹仿真结果如图3. 分析图3知: Fibonacci法和再开始FR法, 这两种方法得到的最优Ma数在爬升阶段均随着时间和高度的增加而不断增加; 下滑时随着时间的增加和高度的降低而不断减小. 爬升时Fibonacci法所用的约束推力比再开始FR法大, 故爬升时间比较短, 而爬升刚开始时消耗的燃油就自然比较多. 图3(d)中的曲线表示无人飞行器从开始爬升到当前时刻消耗的燃油总量的变化情况.

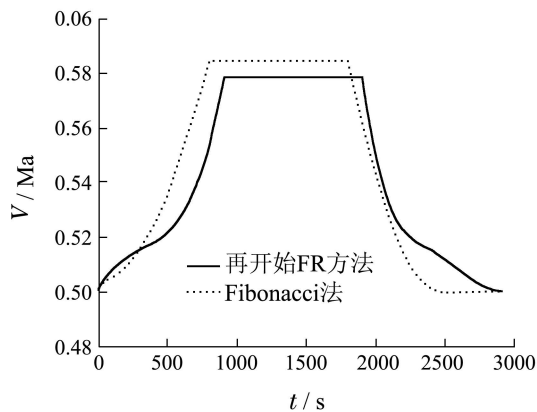


(c) 最优发动机推力变化曲线

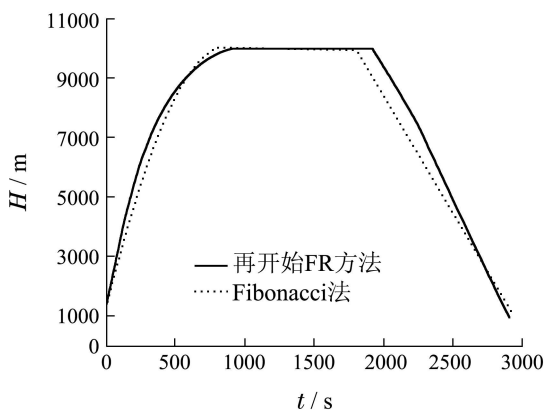


(d) 燃油消耗变化曲线

图 3 纵向剖面最优轨迹仿真结果
Fig. 3 The simulation results of vertical profile optimal trajectory



(a) 最优Ma数变化曲线



(b) 最优高度变化曲线

Fibonacci法^[2,4]应用在纵向剖面优化中求解式(10)–(12)时, 一般采取固定约束推力的方式: 爬升段使用最大推力、下滑段使用最小推力.

另外通过观察图3中的最优Ma数和最优高度变化曲线, 可以看出轨迹并没有发散, 而是趋于收敛.

表1为优化算法的比较. 通过对比可以看出, 本文算法(推力自由的再开始FR法)求得的最优巡航速度为0.5779 Ma, 比文献[2,4]采用的推力固定的Fibonacci法少0.0064 Ma; 最优巡航高度都是10 km. 两种算法的飞行时间相差不大, 本文算法比Fibonacci法快15 s. 从耗油的多少来看, 再开始FR法消耗的燃油比较少, 优于Fibonacci法, 燃油节省了: $(140.9 - 135.7) / 140.9 = 3.69\%$, 但在计算时间上却稍大于Fibonacci法. 这是由于再开始FR法的寻优变量比Fibonacci法多了一个, 因此计算时间复杂度相对来说大些, 不过随着计算机硬件的发展, 两种方法计算时间之间的差别会越来越小.

最优速度和最优高度不是衡量本文算法与Fibonacci法好坏的标准, 衡量这两种算法优劣的标准是燃油消耗量、飞行时间和计算时间. 本文算法在省油和飞行时间方面结果都比较占优, 计算时间上稍差于Fibonacci法.

表1 优化算法的比较

Table 1 Comparison between optimization algorithms

优化算法	耗油/kg	飞行时间/s	最优高度/km	最优速度/Ma	计算时间/s
推力固定的Fibonacci法(文献[2,4])	140.9	2925	10	0.5843	2.12
推力自由的再开始FR法(本文算法)	135.7	2910	10	0.5779	2.65

6 结论(Conclusions)

本文将发动机推力和速度均看作变量,结合无人飞行器飞行的物理过程,将能量法建立的巡航、爬升和下滑3阶段轨迹优化模型进一步变换成非线性规划问题,用再开始FR共轭梯度法进行求解。根据仿真结果得出:

1) 对固定距离最省油这一优化指标,模型求解时,让发动机推力自由变化比将其固定得出的纵向剖面最优轨迹更省油,飞行时间更短。

2) 再开始FR法便于数值求解,计算量不大且计算时间短,便于在机载计算机上实现。

3) 再开始FR共轭梯度法与Fibonacci法比较,省油、飞行时间短,但计算时间稍微长点。

文中目前研究的性能指标是固定距离最省油,然而飞机的节约成本指标需要考虑时间成本和燃油消耗之间的平衡,接下来笔者会进一步研究这方面的工作。

参考文献(References):

- [1] MODENA M. Flight management systems on commercial aircraft – past, present and future [J]. *Flight Airworthiness Support Technology*, 2008, 42(7): 2 – 8.
- [2] 吴树范,沈勇璋,郭锁凤. 飞机纵向飞行轨迹的优化与实现 [J]. 控制理论与应用, 1992, 9(4): 380 – 386.
(WU Shufan, SHEN Yongzhang, GUO Suofeng. Trajectory optimization of aircraft vertical flight profile [J]. *Control Theory & Applications*, 1992, 9(4): 380 – 386.)
- [3] 涂良辉,袁建平,方群. 基于能态近似法的再入轨迹优化设计 [J]. 西北工业大学学报, 2007, 25(3): 393 – 397.
(TU Lianghui, YUAN Jianping, FANG Qun. Design of reentry trajectory optimization based on energy-state approximation method [J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2007, 25(3): 393 – 397.)
- [4] 周堃,王立新. 大型军用运输机的飞行航迹优化 [J]. 北京航空航天大学学报, 2010, 36(6): 654 – 658.
(ZHOU Kun, WANG Lixin. Vertical flight trajectory optimization of heavy military airlift aircraft [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2010, 36(6): 654 – 658.)
- [5] 徐启华,肖顺达,陈新海. 基于总能量原理的飞行性能管理计算 [J]. 西北工业大学学报, 1994, 12(1): 25 – 30.
(XU Qihua, XIAO Shunda, CHEN Xinhai. Algorithm for flight performance management applicable to P R China [J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 1994, 12(1): 25 – 30.)
- [6] 吴树范,郭锁凤. 民用飞机飞行性能优化的研究 [J]. 民用飞机设计与研究, 1990, 4(3): 1 – 5.
(WU Shufan, GUO Suofeng. Research on civil aircraft flight performance optimization [J]. *Civil Aircraft Design and Research*, 1990, 4(3): 1 – 5.)
- [7] WU S F, GUO S F. Optimum flight trajectory guidance based on total energy control of aircraft [J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1994, 17(2): 291 – 296.
- [8] 田小燕,陈怀民,吴成富,等. 基于能量控制的长航时飞机轨迹优化设计及仿真 [J]. 弹箭与制导学报, 2004, 24(5): 530 – 532.
(TIAN Xiaoyan, CHEN Huaimin, WU Chengfu, et al. Trajectory optimization of long-endurance flight energy-based control [J]. *Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance*, 2004, 24(5): 530 – 532.)
- [9] 宋乐,赵淑利. 以飞行成本最优为目的的大型飞机的性能优化 [J]. 兵工自动化, 2009, 28(6): 43 – 45.
(SONG Le, ZHAO Shuli. Best flight cost performance optimization for large aircraft [J]. *Ordnance Industry Automation*, 2009, 28(6): 43 – 45.)
- [10] RUTOWSKI E S. Energy approach to the general aircraft performance problem [J]. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1954, 21(3): 187 – 195.
- [11] ZHU S B, LI G X, HAN J W. Research and modelling on performance database of flight management system [C] // *Proceedings of the 2nd International Asia Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*. New Jersey: IEEE, 2010: 295 – 298.
- [12] GORDON C N. Flight software for optimal trajectories in transport aircraft [C] // *Guidance and Control Conference*. New York: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1983: 580 – 583.
- [13] LEE H Q, ERZBERGER H. *Algorithm for fixed-range optimal trajectories* [R]. Washington, DC: the National Technical Information Service, 1980: 1 – 78.
- [14] ERZBERGER H, LEE H. Constrained optimum trajectories with specified range [J]. *Journal of Guidance and Control*, 1980, 13(1): 78 – 85.
- [15] 方振平. 航空飞行器飞行动力 [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2010: 26 – 30.
(FANG Zhenping. *Aviation Aircraft Flight Dynamics* [M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 2010: 26 – 30.)

作者简介:

陈晓 (1982–), 女, 博士研究生, 研究方向为无人飞行器性能优化理论与应用, Email: candychch@mail.nwpu.edu.cn;

王新民 (1951–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为飞行控制技术 & 导航、制导与控制, Email: wxmin@nwpu.edu.cn;

周健 (1983–), 男, 博士研究生, 研究方向为无人机系统建模与自主飞行控制, Email: zhoujian0627@sohu.com.