

与线性混杂自动机等价的状态依赖空间模型

庞岩^{1,3†}, 李维亮¹, 夏浩²

(1. 大连理工大学 航空航天学院, 辽宁 大连 116024; 2. 大连理工大学 控制科学与工程学院, 辽宁 大连 116024;
3. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 混杂系统可以由多种等价系统进行描述, 本文研究用状态依赖空间模型对线性混杂自动机进行描述. 线性混杂自动机是一类自治的不确定性系统, 而状态依赖空间模型是含有输入的确定性系统. 在状态依赖空间模型中, 通过增加输入变量可以描述线性混杂自动机转换过程中的不确定性, 进而将其转换成等价的状态依赖空间模型. 本文所提到的等价性是指两个系统产生的轨迹是相同的.

关键词: 线性混杂自动机; 状态依赖空间模型; 混杂系统; 建模; 等价模型

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Equivalent state-dependent models of linear hybrid automata

PANG Yan^{1,3†}, LI Wei-liang¹, XIA Hao²

(1. School of Aeronautics and Astronautics, Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116024, China;
2. School of Control Science and Engineering, Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116024, China;
3. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology,
Dalian Liaoning 116024, China)

Abstract: For different purposes, hybrid systems can be modeled differently by a few equivalent models. In this paper the research is focused on describing linear hybrid automata (LHA) with state-dependent space models. The difficulty of this description lies on that LHA are a class of autonomous non-deterministic models, while state-dependent systems are deterministic models with input. The uncertainty in LHA can be represented by introducing new input variables. In this way, the equivalent state-dependent models can be built up, where equivalence means that the two systems generate the same trajectories.

Key words: linear hybrid automata; state-dependent models; hybrid systems; model buildings; model equivalence

1 引言(Introduction)

混杂系统是由连续变量动态系统和离散事件动态系统相互作用而形成的统一的动态系统^[1-2]. 大多数的复杂工业控制过程都可以看作是一种混杂系统模型, 例如计算机集成制造系统(computer integrated manufacturing systems, CIMS), 智能交通系统, 现代飞行控制系统和工业生产的控制与调度系统^[3]等. 现代计算机技术的高速发展和普及应用, 为系统的模型化、优化控制和决策问题提供了强有力的技术支持. 对混杂系统的深入研究已经成为当今控制界与计算机科学界的前沿热点^[4].

若要准确地研究混杂系统, 精确地系统建模是必要的. 混杂系统动态模型描述主要有:

混杂自动机^[5](hybrid automata, HA): 宏观上将混杂系统看作是自动机, 微观上自动机的每一个状态为一组微分方程, 整个混杂动态系统在自动机的不

同状态上变迁.

分段仿射系统^[6](piecewise affine, PWA): 既能模拟非线性和非光滑性过程又能应对混杂现象.

混合逻辑动态系统^[7](mixed logical dynamical, MLD): 将逻辑、动态和约束三者结合而得到的系统模型.

线性互补系统^[8](linear complementary, LC): 最初用于机械力学系统的建模, 后来推广用于描述一大类混杂系统.

扩展线性互补系统^[9](extended linear complementary, ELC): 针对几类特殊的混杂系统进行建模.

最大-最小-加-刻度系统^[10](max-min-plus-scaling, MMPS): 运用最大值、最小值、加和数乘这4个运算符构成了MMPS的表达式.

它们之间的转换关系如图1所示(*表示满足一定条件才能进行转换).

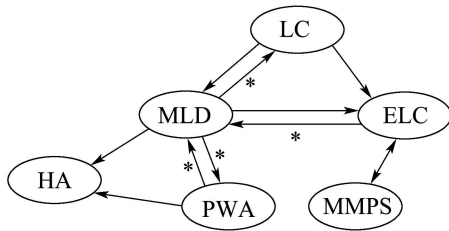


图1 各种混杂系统动态模型转换关系
Fig. 1 Translations of some hybrid dynamical models

从图1中可以看出, MLD和PWA都是HA的子集, 其他模型之间都可以相互转换. 从而可以得出结论: 相对于其他模型的优化控制问题, HA的优化控制更为复杂. 并且HA是混杂系统中最为一般的模型, 结构也比其他模型更复杂, 具有更大的研究价值.

Di Cairano和Bemporad已经将线性混杂自动机(linear hybrid automata, LHA)模型用等价的PWA进行描述^[11], Pang和Grimble将PWA转换成状态依赖空间模型^[12]. 在这些基础上, 本文主要研究将LHA直接转换成与之等价的状态依赖空间模型, 之所以要转换成状态依赖空间模型是由于这种模型结构具有以下优点^[12]:

- 1) 与传统的混杂系统控制器相比, 拥有逻辑结构的状态依赖空间模型需要更少的监控.
- 2) 与其他混杂系统的模型(例如MLD)相比, 状态依赖空间模型易于在建模时包含时滞和干扰.
- 3) 状态依赖空间模型能够描述系统中多种类型的非线性和不确定性.

由上所述可以看出, 将LHA转换成PWA, 进而再将PWA转换成状态依赖空间模型也可以得到与LHA等价的状态依赖空间模型, 但是与本文所提出的方法相比它有显著的缺点:

- 1) LHA转换成PWA, 再将PWA转换成状态依赖空间模型的过程中符号代码多, 理解起来有一定难度, 其转换过程也很复杂, 工作量与本文的直接转换相比要大很多.
- 2) 文献[11]中的LHA模型具有一定的局限性, 是本文中LHA模型的一个子集, 即本文中的LHA模型更为复杂, 所以也无法用文献[11]中的方法与PWA之间进行转换, 因此本文的直接转换方法更具有研究意义.

将LHA转换成状态依赖空间模型之后可以用非线性控制方法^[13]对其进行控制.

2 标注符号简介(Notations)

\mathbb{R} 表示实数, $x \in \mathbb{R}^n$ 表示 x 的维数是 n , 并且 x 的每一个元素为实数, x_i 表示 x 的第 i 个元素. $x = c$ ($c \in \mathbb{R}$)表示 x 的每一个元素都是常数 c .

0表示实数, $\mathbf{0}$ 表示矩阵.

\mathbb{Z} 表示整数集合, 对于 $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, a \leq b$:
 $i \in \mathbb{Z}_{[a,b]} = \{i \in \mathbb{Z} | a \leq i \leq b\}$.

对于向量 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n: x \leq y$ 表示 $x_i \leq y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 即 x 的每一个元素都小于等于 y 中对应的元素.

对于矩阵 H, H_i 表示矩阵的第 i 行, H_i^j 表示的是矩阵第 i 行第 j 列的标量元素, H^T 表示矩阵的转置. $H^{n \times m}$ 表示 H 为 n 行 m 列的矩阵.

逻辑“且”的标记为“ \wedge ”. 两个集合相交的标记为“ \cap ”.

定义表达式

$$LT(x, y) = \begin{cases} 1, & x < y, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad LE(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$Eq(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

3 系统模型的一般描述(General description of system models)

本节主要介绍线性混杂自动机和状态依赖空间模型的一般的表达式.

3.1 线性混杂自动机(Linear hybrid automata)

定义 1 线性混杂自动机模型可以用以下数组形式表示^[5]:

$$H = (X_c, M, E, \text{flow}, \text{inv}, \text{init}, \text{jump}, \text{event}, \Sigma),$$

$X_c = \{X_{c1}, X_{c2}, \dots, X_{cn}\}$ 为连续状态变量的集合. $M = \{M_1, M_2, \dots, M_l\}$ 为离散状态变量的集合, 每一个离散状态变量代表一种控制模式; $M_j = j$ ($j \in J = \{1, 2, \dots, l\}$), $M(t)$ 表示系统在 t 时刻所处的离散控制模式. $E \subseteq M \times M$ 为控制模式改变的方向.

flow为连续状态变量的动态演化过程, 本文中第 j 种控制模式的连续状态变量的一般演化过程为

$$\dot{x}_c(t) = A_j x_c(t) + B_j u_c(t).$$

外部输入的约束条件为 $H_j u_c(t) \leq V_j$, 其中: $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}, u_c(t) \in \mathbb{R}^{m_c}, A_j \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}, B_j \in \mathbb{R}^{n_c \times m_c}, H_j \in \mathbb{R}^{n_{H_j} \times m_c}, V_j \in \mathbb{R}^{n_{H_j}}$.

inv为连续状态变量的不变集, 即在每种控制模式中连续状态变量应满足的约束条件: $L_j x_c(t) \leq S_j$, 其中 $L_j \in \mathbb{R}^{n_{L_j} \times n_c}, S_j \in \mathbb{R}^{n_{L_j}}$.

为了保证优化问题有解, 假定由flow的约束条件和inv的约束条件组成的集合 Ω 为凸多面体, 并且定义

$$\Omega_j = \left\{ \begin{bmatrix} x_c \\ u_c \end{bmatrix} \mid L_j x_c \leq S_j \wedge H_j u_c \leq V_j \right\}.$$

init为初始状态变量.

jump为控制模式转换的条件, 第 j 种控制模式向第 k 种控制模式的转换条件为: $Q_{j,k} x_c \geq k_{j,k}$.

本文中的LHA控制模式转换之后, 瞬态的连续状态变量与转换之前的连续状态变量相等.

event为控制模式转换的触发事件, Σ 为触发事

件的有限集合. event和 Σ 主要用于检验验证, 与本文所研究的问题不相关, 故不对其深入探讨.

3.2 状态依赖空间模型(State-dependent models)

状态依赖空间模型的一般描述为

$$\dot{x}(t) = A(x(t), u(t))x(t) + B(x(t), u(t))u(t).$$

从上式可以看出矩阵参数 A, B 依赖于系统的状态变量 $x(t)$ 和输入变量 $u(t)$.

4 线性混杂自动机转换成状态依赖空间模型(Conversion of linear hybrid automata into state-dependent models)

LHA转换成状态依赖空间模型主要是将离散控制模式跳转的过程以及跳转时存在的不确定性利用状态依赖空间模型对其进行描述.

4.1 控制模式跳转过程中不确定性的描述(Description of the uncertainty in the process of control mode transition)

假设 1 LHA在第 $j(j \in M)$ 种控制模式中可以向其他 $l_j(l_j \geq 1$ 且 $l_j \in \mathbb{Z})$ 种控制模式跳转, 并且发生跳转时只能向一种控制模式跳转.

如图2所示, 为系统从第 j 种控制模式向第 $\sigma_j(i)$ ($i \in \{1, 2, \dots, l_j\}$)种控制模式跳转. 函数 $\sigma_j(i) \in M$, 即为跳转之后所对应的离散控制模式的编码.

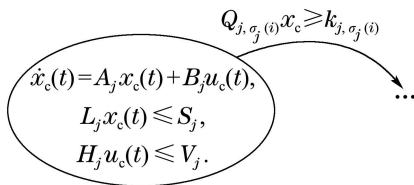


图2 转换示意图

Fig. 2 Transformation picture

图2中:

$$\{x_c(t) | L_j x_c(t) \leq S_j\} \cap \{x_c(t) | Q_{j, \sigma_j(i)} x_c(t) \geq k_{j, \sigma_j(i)}\} \neq \emptyset,$$

即两个约束条件有交集, 则当 $x_c(t)$ 为交集的任一取值时, LHA可以进行模式跳转, 具有不确定性. 因此, 引入外部信号 w 来描述其不确定性, 即

$$\begin{cases} Q_{j, \sigma_j(i)} x_c < k_{j, \sigma_j(i)} + w_{j, \sigma_j(i)}, & i \in \mathbb{Z}_{[1, l_j]}, \\ L_j x_c \leq S_j, \\ H_j u_c \leq V_j, \\ \mathbf{0} \leq w_{j, \sigma_j(i)} \leq w_{j, \sigma_j(i)}^* & i \in \mathbb{Z}_{[1, l_j]} \end{cases}$$

满足上式时, 系统在第 j 种控制模式时不发生控制模式跳转. 其中 $w_{j, \sigma_j(i)}^*$ 是下列线性规划问题的最优解:

$$\begin{aligned} w_{j, \sigma_j(i)}^* &= \sup_{x_c} (Q_{j, \sigma_j(i)} x_c - k_{j, \sigma_j(i)}), & i \in \mathbb{Z}_{[1, l_j]}, \\ \text{s.t. } & L_j x_c \leq S_j. \end{aligned}$$

假设 $w_{j, \sigma_j(i)} \in \mathbb{R}^{n_{j, \sigma_j(i)}}$, 则

$$w_j = \begin{bmatrix} w_{j, \sigma_j(1)} \\ w_{j, \sigma_j(2)} \\ \vdots \\ w_{j, \sigma_j(l_j)} \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_l \end{bmatrix},$$

$w_j \in \mathbb{R}^{n_j}$, $n_j = \sum_{i=1}^{l_j} n_{j, \sigma_j(i)}$; $w \in \mathbb{R}^\varphi$, $\varphi = \sum_{j=1}^l n_j$, l 为离散控制模式的总数.

令 $T_{j, \sigma_j(i)}$ 表示从第 j 种控制模式向第 $\sigma_j(i)$ 种控制模式跳转所满足的约束条件的集合, $T_{j, 0}$ 表示系统并未进行控制模式跳转时满足的约束条件的集合, 约束条件集合的描述应注意以下两点:

1) 跳转过程主要是由连续状态变量 $x_c(t)$ 的约束条件进行控制, 为了使外部输入能够跟随控制模式的跳转, 跳转时的外部输入应该满足约束条件 $H_{\sigma_j(i)} u_c \leq V_{\sigma_j(i)}$, 而不是 $H_j u_c \leq V_j$.

2) w_1, w_2, \dots, w_l 之间是相互独立的, 为了简化它们的约束条件的描述, 可以将 $w_{j, \sigma_j(i)}$ ($i \in \mathbb{Z}_{[1, l_j]}$)的约束扩展成对 w 的约束.

由上所述可以得到每种运行模式下约束条件的集合为

$$\begin{aligned} T_{j, 0} &= \begin{cases} Q_{j, \sigma_j(i)} x_c < k_{j, \sigma_j(i)} + w_{j, \sigma_j(i)}, & i \in \mathbb{Z}_{[1, l_j]}, \\ L_j x_c \leq S_j, \\ H_j u_c \leq V_j, \\ \mathbf{0} \leq w_{j, \sigma_j(i)} \leq w_{j, \sigma_j(i)}^*, & i \in \mathbb{Z}_{[1, l_j]} \end{cases} = \\ & \begin{cases} Q_{j, \sigma_j(i)} x_c < k_{j, \sigma_j(i)} + w_{j, \sigma_j(i)}, \\ L_j x_c \leq S_j, \\ H_j u_c \leq V_j, \\ \mathbf{0} \leq w \leq w^* \end{cases} = \\ & \begin{cases} Q_{j, \sigma_j(i)} x_c < k_{j, \sigma_j(i)} + w_{j, \sigma_j(i)}, \\ L_j x_c \leq S_j, \\ \begin{bmatrix} H_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I^{n_\varphi \times n_\varphi} \\ \mathbf{0} & I^{n_\varphi \times n_\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} V_j \\ \mathbf{0} \\ w^* \end{bmatrix} \end{cases} = \\ & \begin{cases} Q_{j, \sigma_j(i)} x_c < k_{j, \sigma_j(i)} + w_{j, \sigma_j(i)}, \\ L_j x_c \leq S_j, \\ G^j \begin{bmatrix} u_c(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \leq W^j, \end{cases} \end{aligned}$$

其中:

$$G^j = \begin{bmatrix} H_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I^{n_\varphi \times n_\varphi} \\ \mathbf{0} & I^{n_\varphi \times n_\varphi} \end{bmatrix}, \quad W^j = \begin{bmatrix} V_j \\ \mathbf{0} \\ w^* \end{bmatrix},$$

$$w^* = \begin{bmatrix} w_1^* \\ w_2^* \\ \vdots \\ w_l^* \end{bmatrix}, \quad w_j^* = \begin{bmatrix} w_{j, \sigma_j(1)}^* \\ w_{j, \sigma_j(2)}^* \\ \vdots \\ w_{j, \sigma_j(l_j)}^* \end{bmatrix}.$$

同理可得

$$T_{j,\sigma_j(i)} = \begin{cases} Q_{j,\sigma_j(i)}x_c \geq k_{j,\sigma_j(i)} + w_{j,\sigma_j(i)}, \\ i \in \{1, 2, \dots, l_j\}; \\ Q_{j,\sigma_j(f)}x_c < k_{j,\sigma_j(f)} + w_{j,\sigma_j(f)}, \\ f \in \mathbb{Z}_{[1,l_j]} \text{ 且 } f \neq i; \\ L_{\sigma_j(i)}x_c \leq S_{\sigma_j(i)}, \\ H_{\sigma_j(i)}u_c \leq V_{\sigma_j(i)}, \\ \mathbf{0} \leq w_{j,\sigma_j(i)} \leq w_{j,\sigma_j(i)}^*, \\ i \in \mathbb{Z}_{[1,l_j]} \end{cases} = \begin{cases} Q_{j,\sigma_j(i)}x_c \geq k_{j,\sigma_j(i)} + w_{j,\sigma_j(i)}, \\ Q_{j,\sigma_j(f)}x_c < k_{j,\sigma_j(f)} + w_{j,\sigma_j(f)}, \\ L_{\sigma_j(i)}x_c \leq S_{\sigma_j(i)}, \\ G_{j,\sigma_j(i)}^{\sigma_j(i)} \begin{bmatrix} u_c(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \leq W_{j,\sigma_j(i)}^{\sigma_j(i)}, \\ i \in \{1, 2, \dots, l_j\}, \end{cases}$$

其中:

$$G_{j,\sigma_j(i)}^{\sigma_j(i)} = \begin{bmatrix} H_{\sigma_j(i)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I^{n_\varphi \times n_\varphi} \\ \mathbf{0} & I^{n_\varphi \times n_\varphi} \end{bmatrix}, W_{j,\sigma_j(i)}^{\sigma_j(i)} = \begin{bmatrix} V_{\sigma_j(i)} \\ \mathbf{0} \\ w^* \end{bmatrix}.$$

特殊地,当 $l_j = 1$ 时, $i \in \mathbb{Z}_{[1,l_j]} = 1$, 此时的跳转条件集合为

$$T_{j,\sigma_j(1)} = \begin{cases} Q_{j,\sigma_j(1)}x_c \geq k_{j,\sigma_j(1)} + w_{j,\sigma_j(1)}, \\ L_{\sigma_j(1)}x_c \leq S_{\sigma_j(1)}, \\ G_{j,\sigma_j(1)}^{\sigma_j(1)} \begin{bmatrix} u_c(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \leq W_{j,\sigma_j(1)}^{\sigma_j(1)}. \end{cases}$$

令 $x(t) = x_c(t)$, $u(t) = \begin{bmatrix} u_c(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$, 则约束条件的逻辑形式可写作

$$T_{j,0} = \left\{ \bigwedge_{i=1}^{l_j} LT(Q_{j,\sigma_j(i)}x, k_{j,\sigma_j(i)} + w_{j,\sigma_j(i)}) \wedge LE(L_jx, S_j) \wedge LE(G^j u, W^j) \right\},$$

$$T_{j,\sigma_j(i)} = \left\{ LE(-Q_{j,\sigma_j(i)}x, -k_{j,\sigma_j(i)} - w_{j,\sigma_j(i)}) \wedge \bigwedge_{f=1 \text{ 且 } f \neq i}^{l_j} LT(Q_{j,\sigma_j(f)}x, k_{j,\sigma_j(f)} + w_{j,\sigma_j(f)}) \wedge LE(L_{\sigma_j(i)}x, S_{\sigma_j(i)}) \wedge LE(G_{j,\sigma_j(i)}^{\sigma_j(i)}u, W_{j,\sigma_j(i)}^{\sigma_j(i)}) \right\}.$$

下节中使用的都是约束条件逻辑形式的表达式.

4.2 等价的状态依赖空间模型(Equivalent state-dependent models)

与LHA等价的状态依赖空间模型不仅描述了LHA连续状态变量的动态演化过程和离散控制模式的跳转过程,还体现了其控制模式跳转过程中存在的不确定性,并且对于LHA的任意一个由 $\{x_c(t), u_c(t), M(t)\}$ 描述的轨迹,在与之等价的状态依赖空间模型中都存在一个由 $\{x(t), u(t), M(t)\}$ 描述的轨迹与之相对应,其中 $x(t) = x_c(t)$, $u(t) = [u_c(t)^T w(t)^T]^T$.

定理 1 与定义1所描述的混杂自动机等价的状态依赖空间模型的表达式为

$$\dot{x}(t) = A(x(t), u(t))x(t) + B(x(t), u(t))u(t) = \sum_{j=1}^l Eq(M(t), M_j) \cdot (T_{j,0}A_{j,0} + \sum_{i=1}^{l_j} T_{j,\sigma_j(i)} \cdot A_{j,\sigma_j(i)})x(t) + \sum_{j=1}^l Eq(M(t), M_j) \cdot (T_{j,0} \cdot B_{j,0} + \sum_{i=1}^{l_j} T_{j,\sigma_j(i)} B_{j,\sigma_j(i)})u(t).$$

由于系统在不同离散控制模式中的 $A(x(t), u(t))$ 和 $B(x(t), u(t))$ 是不完全相同的,因此由 $t-1$ 时刻的 $A(x(t-1), u(t-1))$ 和 $B(x(t-1), u(t-1))$ 可以确定 t 时刻 $M(t)$ 的取值.其中: $A_{j,0} = A_j$, $A_{j,\sigma_j(i)} = A_{\sigma_j(i)}$, $B_{j,0} = [B_j \ \mathbf{0}^{n_c \times \varphi}]$, $B_{j,\sigma_j(i)} = [B_{\sigma_j(i)} \ \mathbf{0}^{n_c \times \varphi}]$.

证 混杂自动机的状态可分为:

1) 离散状态不变.即系统停留在第 j 种控制模式里没有控制模式跳转,此时 $M(t) = M_j$.定理1与LHA等价的状态依赖空间描述中,只有约束条件 $T_{j,0} = 1$,其他约束条件的逻辑值都是0,连续状态动态演化过程为

$$\dot{x}(t) = A_{j,0}x(t) + B_{j,0}u(t) = A_jx_c(t) + B_ju_c(t).$$

这和LHA第 j 种控制模式连续状态的演化过程相同.

2) 离散状态发生改变.即系统发生控制模式跳转,从第 j 种控制模式跳转到第 $\sigma_j(i)$ 种控制模式.定理1与LHA等价的状态依赖空间描述中,此跳转发生时,连续状态演化到一定程度必须满足跳转条件 $T_{j,\sigma_j(i)}$, $w_{j,\sigma_j(i)}$ 在其约束范围内的变换描述了原LHA跳转过程中的不确定性, $M(t) = M_j$ 用来确保系统只能向第 $\sigma_j(i)$ 种控制模式跳转,进而保证跳转方向的唯一性,此时只有 $T_{j,\sigma_j(i)} = 1$ 即 u_c 满足第 $\sigma_j(i)$ 种控制模式对外部输入的约束,连续状态动态演化为

$$\dot{x}(t) = A_{j,\sigma_j(i)}x(t) + B_{j,\sigma_j(i)}u(t) = A_{\sigma_j(i)}x_c(t) + B_{\sigma_j(i)}u_c(t)$$

这与原LHA的跳转条件相同,跳转前后的控制模式也和LHA相同.至此可得,转换之后的状态依赖空间模型可以完全描述LHA的运行过程,是与LHA等价的模型. 证毕.

由定理证明过程得知,对于LHA中的任意一条轨迹,在状态依赖空间模型中都存在一条与之相对应的等价的轨迹.

5 转换实例(Example)

CPU控制过程中的模型可以由线性混杂自动机描述^[14],选择缓冲区CPU任务量的偏差 π , CPU温度的偏差 ρ 和冷却风扇角速度的偏差 ω 作为系统的连

续状态变量, 令 $x_c(t) = [\pi \ \rho \ \omega]^T$. 选取时钟频率的偏差 c 和冷却风扇输入电压的偏差 v 作为系统的外部输入变量, 令 $u_c(t) = [c \ v]^T$, 可以得到表1所示的系统模型.

表1 每个离散控制模式的连续动态演化、外部输入和连续状态约束条件

Table 1 Continuous dynamics, input and invariant associated with each discrete control mode

控制模式	连续状态动态演化($\dot{x}_c = A_j x_c + B_j u_c$)	外部输入	连续状态约束条件
M_1	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.05 & -0.5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} u_c$	$c = 0$ $v \in [-10, 10]$	$-10 \leq \pi \leq 3$ $-10 \leq \rho \leq 10$ $-10 \leq \omega \leq 10$
M_2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.05 & -0.5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} u_c$	$c \in [-5, 5]$ $v \in [-10, 10]$	$\pi \leq 10$ $\rho \leq 10$ $\pi + \rho \geq 10$ $-10 \leq \omega \leq 10$
M_3	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.05 & -0.5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u_c$	$c \in [-5, 5]$ $v = 0$	$0 \leq \pi \leq 10$ $-10 \leq \rho \leq 7$ $-10 \leq \omega \leq 10$

5.1 系统描述(System descriptions)

经过多次实验, 系统在平衡点附近的动态行为可以抽象为图3所示形式.

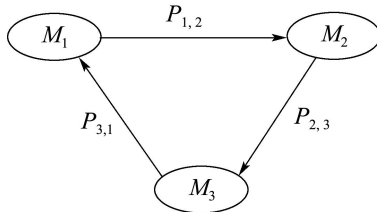


图3 系统描述

Fig. 3 System description

由图3可以看出系统共有3种控制模式, 即 $l=3$. 并且每种控制模式只有一个跳转方向, 即 $l_j = 1$ ($j = 1, 2, 3$). 由图中跳转关系可得 $\sigma_1(1) = 2$, $\sigma_2(1) = 3$, $\sigma_3(1) = 1$.

下文跳转过程中标注的是控制模式的编号, 即 $\sigma_j(i)$ 所对应的函数值.

连续状态变量的动态演化、外部输入的约束条件和连续状态变量的不变集如表1所示.

M_1 控制模式:

连续状态变量约束条件:

$$\left\{ x_c \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x_c \leq \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$\{x_c \in \mathbb{R}^3 \mid L_1 x_c \leq S_1\}.$$

外部输入约束条件:

$$\left\{ u_c \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x_c \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$\{u_c \in \mathbb{R}^2 \mid H_1 u_c \leq V_1\}.$$

M_2 控制模式:

连续状态变量约束条件:

$$\left\{ x_c \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x_c \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ -10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$\{x_c \in \mathbb{R}^3 \mid L_2 x_c \leq S_2\}.$$

外部输入约束条件:

$$\left\{ u_c \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x_c \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$\{u_c \in \mathbb{R}^2 \mid H_2 u_c \leq V_2\}.$$

M_3 控制模式:

连续状态变量约束条件:

$$\left\{ x_c \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x_c \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 7 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$\{x_c \in \mathbb{R}^3 \mid L_3 x_c \leq S_3\}.$$

外部输入约束条件:

$$\{u_c \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x_c \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\} = \\ \{u_c \in \mathbb{R}^2 \mid H_3 u_c \leq V_3\}.$$

控制模式的转换条件:

$$P_{1,2} = \{x_c \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x_c \geq \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ -10 \end{bmatrix}\} =$$

$$\{x_c \in \mathbb{R}^3 \mid Q_{1,2} x_c \geq k_{1,2}\},$$

$$P_{2,3} = \{x_c \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x_c \geq \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \\ -7 \end{bmatrix}\} =$$

$$\{x_c \in \mathbb{R}^3 \mid Q_{2,3} x_c \geq k_{2,3}\},$$

$$P_{3,1} = \{x_c \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_c \geq \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -7 \\ -10 \end{bmatrix}\} =$$

$$\{x_c \in \mathbb{R}^3 \mid Q_{3,1} x_c \geq k_{3,1}\}.$$

5.2 控制模式转换过程的不确定性的描述(Description of the uncertainty in the process of control mode transition)

由第4.1节中的描述可得

$$T_{1,0} = \begin{cases} Q_{1,2} x_c < k_{1,2} + w_{1,2}, \\ L_1 x_c \leq S_1, \\ H_1 u_c \leq V_1, \\ \mathbf{0} \leq w_{1,2} \leq w_{1,2}^* \end{cases}$$

其中由

$$w_{1,2}^* = \sup_{x_c} (Q_{1,2} x_c - k_{1,2}), \\ \text{s.t. } L_1 x_c \leq S_1$$

可得 $w_{1,2}^* = [3 \ 13 \ 20]^T$. 则

$$T_{1,0} = \begin{cases} Q_{1,2} x_c < k_{1,2} + w_{1,2}, \\ L_1 x_c \leq S_1, \\ H_1 u_c \leq V_1, \\ \mathbf{0} \leq w_{1,2} \leq w_{1,2}^* = [3 \ 13 \ 20]^T. \end{cases}$$

同理可得

$$T_{2,0} = \begin{cases} Q_{2,3} x_c < k_{2,3} + w_{2,3}, \\ L_2 x_c \leq S_2, \\ H_2 u_c \leq V_2, \\ \mathbf{0} \leq w_{2,3} \leq w_{2,3}^* = [10 \ 10 \ 10]^T, \end{cases}$$

$$T_{3,0} = \begin{cases} Q_{3,1} x_c < k_{3,1} + w_{3,1}, \\ L_3 x_c \leq S_3, \\ H_3 u_c \leq V_3, \\ \mathbf{0} \leq w_{3,1} \leq w_{3,1}^* = [10 \ 3 \ 17 \ 17]^T. \end{cases}$$

令 $w = \begin{bmatrix} w_{1,2} \\ w_{2,3} \\ w_{3,1} \end{bmatrix}$, $w^* = \begin{bmatrix} w_{1,2}^* \\ w_{2,3}^* \\ w_{3,1}^* \end{bmatrix}$, 易得 $w \in \mathbb{R}^{10}$,

则跳转过程的约束集合为

$$T_{1,2} = \begin{cases} Q_{1,2} x_c \geq k_{1,2} + w_{1,2}, \\ L_2 x_c \leq S_2, \\ H_2 u_c \leq V_2, \\ \mathbf{0} \leq w_{1,2} \leq w_{1,2}^*, \end{cases} =$$

$$\begin{cases} Q_{1,2} x_c \geq k_{1,2} + w_{1,2}, \\ L_2 x_c \leq S_2, \\ \begin{bmatrix} H_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I^{10 \times 10} \\ \mathbf{0} & I^{10 \times 10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ w \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} V_2 \\ \mathbf{0} \\ w^* \end{bmatrix} \end{cases} =$$

$$\begin{cases} Q_{1,2} x_c \geq k_{1,2} + w_{1,2}, \\ L_2 x_c \leq S_2, \\ G_{1,2}^2 \begin{bmatrix} u_c \\ w \end{bmatrix} \leq W_{1,2}^2. \end{cases}$$

同理可得

$$T_{2,3} = \begin{cases} Q_{2,3} x_c \geq k_{2,3} + w_{2,3}, \\ L_3 x_c \leq S_3, \\ G_{2,3}^3 \begin{bmatrix} u_c \\ w \end{bmatrix} \leq W_{2,3}^3, \end{cases}$$

$$T_{3,1} = \begin{cases} Q_{3,1} x_c \geq k_{3,1} + w_{3,1}, \\ L_1 x_c \leq S_1, \\ G_{3,1}^1 \begin{bmatrix} u_c \\ w \end{bmatrix} \leq W_{3,1}^1, \end{cases}$$

其中:

$$G_{2,3}^3 = \begin{bmatrix} H_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I^{10 \times 10} \\ \mathbf{0} & I^{10 \times 10} \end{bmatrix}, W_{2,3}^3 = \begin{bmatrix} V_3 \\ \mathbf{0} \\ w^* \end{bmatrix},$$

$$G_{3,1}^1 = \begin{bmatrix} H_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I^{10 \times 10} \\ \mathbf{0} & I^{10 \times 10} \end{bmatrix}, W_{3,1}^1 = \begin{bmatrix} V_1 \\ \mathbf{0} \\ w^* \end{bmatrix}.$$

则 $T_{j,\sigma_j(1)} (j = 1, 2, 3)$ 可写作

$$T_{j,\sigma_j(1)} = \begin{cases} Q_{j,\sigma_j(1)} x_c \geq k_{j,\sigma_j(1)} + w_{j,\sigma_j(1)}, \\ L_{\sigma_j(1)} x_c \leq S_{\sigma_j(1)}, \\ G_{j,\sigma_j(1)}^{\sigma_j(1)} \begin{bmatrix} u_c \\ w \end{bmatrix} \leq W_{j,\sigma_j(1)}^{\sigma_j(1)}, \end{cases}$$

其中:

$$G_{j,\sigma_j(1)}^{\sigma_j(1)} = \begin{bmatrix} H_{\sigma_j(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I^{10 \times 10} \\ \mathbf{0} & I^{10 \times 10} \end{bmatrix},$$

$$W_{j,\sigma_j(1)}^j = \begin{bmatrix} V_{\sigma_j(1)} \\ \mathbf{0} \\ w^* \end{bmatrix}.$$

将 $T_{j,0}$ 写成与 $T_{j,\sigma_j(1)}$ 类似的形式可得

$$T_{j,0} = \begin{cases} Q_{j,\sigma_j(1)}x_c < k_{j,\sigma_j(1)} + w_{j,\sigma_j(1)}, \\ L_jx_c \leq S_j, \\ G^j \begin{bmatrix} u_c \\ w \end{bmatrix} \leq W^j, \end{cases}$$

其中:

$$G^j = \begin{bmatrix} H_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I^{10 \times 10} \\ \mathbf{0} & I^{10 \times 10} \end{bmatrix}, W^j = \begin{bmatrix} V_j \\ \mathbf{0} \\ w^* \end{bmatrix}.$$

令 $x(t) = x_c(t)$, $u(t) = \begin{bmatrix} u_c(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$, 则逻辑形式的

约束条件集合可以写成如下形式:

$$T_{j,0} = \{LT(Q_{j,\sigma_j(1)}x, k_{j,\sigma_j(1)} + w_{j,\sigma_j(1)}) \wedge LE(L_jx, S_j) \wedge LE(G^ju, W^j)\},$$

$$T_{j,\sigma_j(1)} = \{LE(-Q_{j,\sigma_j(1)}x, -k_{j,\sigma_j(1)} - w_{j,\sigma_j(1)}) \wedge LE(L_{\sigma_j(1)}x, S_{\sigma_j(1)}) \wedge LE(G_{j,\sigma_j(1)}^{\sigma_j(1)}u, W_{j,\sigma_j(1)}^{\sigma_j(1)})\}.$$

5.3 状态依赖方程(State-dependent equations)

与本例线性混杂自动机等价的状态依赖空间模型为

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^3 Eq(M(t), M_j) \cdot (T_{j,0}A_{j,0} + T_{j,\sigma_j(1)} \cdot A_{j,\sigma_j(1)})x(t) + \sum_{j=1}^3 Eq(M(t), M_j) \cdot (T_{j,0} \cdot B_{j,0} + T_{j,\sigma_j(1)}B_{j,\sigma_j(1)})u(t),$$

其中: $A_{j,0} = A_j$, $A_{j,\sigma_j(1)} = A_{\sigma_j(1)}$, $B_{j,0} = [B_j \mathbf{0}^{3 \times 10}]$, $B_{j,\sigma_j(1)} = [B_{\sigma_j(1)} \mathbf{0}^{3 \times 10}]$. 至此得到与LHA等价的状态依赖空间模型.

6 结语(Conclusions)

随着科技的迅速发展,人们研究的系统的规模越来越大,系统结构越来越复杂,研究的内容也越来越丰富. 由于混杂系统可以用来描述更为复杂的系统,并且是介于控制论和计算科学之间的研究对象,所以得到了更为广泛的关注. 本文所提出的将线性混杂自动机转换成与之等价的状态依赖空间描述系统的方法,推导过程便于理解,所得到的结果简单明晰,并且可以用非线性控制方法对其进行控制,具有研究意义.

参考文献(References):

- [1] LENNARTSON B, TITTUS M, EGARDT B, et al. Hybrid systems in process control [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 1996, 16(5): 45 – 56.
- [2] MORSE A S, PANTELIDES C C, SASTRY S S, et al. Introduction to the special issue on hybrid systems [J]. *Automatica*, 1999, 35(3): 347 – 348.
- [3] 杨欣, 陈谋, 费树岷. 资源配置混杂Petri网的混杂系统生产过程动态调度 [J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(2): 173 – 178. (YANG Xin, CHEN Mou, FEI Shumin. Dynamic scheduling of production process of hybrid systems based on resource distribution in hybrid Petri nets [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(2): 173 – 178.)
- [4] 尹增山, 高春华, 李平. 混杂系统优化控制的动态规划方法研究 [J]. *控制理论与应用*, 2002, 19(1): 29 – 33. (YIN Zengshan, GAO Chunhua, LI Ping. Optimal control for hybrid systems based on dynamical programming [J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(1): 29 – 33.)
- [5] HENZINGER T A. The theory of hybrid automata [C] // *Proceedings of the 11th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*. New Brunswick: IEEE, 1996: 278 – 292.
- [6] SONTAG E. Nonlinear regulation: the piecewise linear approach [J]. *IEEE transactions on Automatic Control*, 1981, 26(2): 346 – 358.
- [7] BEMPORAD A, MIGNONE D, MORARI M. Control of systems integrating logical, dynamics and constraints [J]. *Automatica*, 1999, 35(3): 407 – 427.
- [8] HEEMELS W, SCHUMACHER J M, WEILAND S. Linear complementarity systems [J]. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 2000, 60(4): 1234 – 1269.
- [9] DE SCHUTTER B, DE MOOR B. *Hybrid Systems V: The Extended Linear Complementarity Problem and the Modeling and Analysis of Hybrid Systems* [M]. Heidelberg, Berlin: Springer, 2002.
- [10] DE SCHUTTER B, VAN DEN BOOM T, DE SCHUTTER BART. On model predictive control for max-min-plus-scaling discrete event systems [J]. *Automatica*, 2001, 37(7): 1049 – 1056.
- [11] DI CAIRANO S, BEMPORAD A. Equivalent piecewise affine models of linear hybrid automata [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(2): 498 – 502.
- [12] PANG Y, GRIMBLE M J. NGMV control of delayed piecewise affine systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(12): 2817 – 2821.
- [13] GRIMBLE M J, PANG Y. NGMV control of state dependent multi-variable systems [C] // *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans: IEEE, 2007: 1628 – 1633.
- [14] PANG Y, SPATHOPOULOS M P, XIA H. Suboptimal target control for hybrid automata using model predictive control [J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2006, 65(6): 1211 – 1230.

作者简介:

庞岩 (1977-), 女, 副教授, 硕士生导师, 目前研究方向为多变量非线性控制理论、混杂系统建模与优化控制, E-mail: ypang@dlut.edu.cn;

李维亮 (1987-), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为非线性最小方差控制律、混杂系统分析, E-mail: wei.liang123456@163.com;

夏浩 (1971-), 男, 教授, 目前研究方向为混杂系统的控制分析与优化、控制器性能评价与优化, E-mail: hao.x.xia@dlut.edu.cn.