

带有非线性感染率的SIRS模型的建立与稳定性分析

曹宇[†], 井元伟

(东北大学信息科学与工程学院, 辽宁沈阳 110819)

摘要: 针对以往SIRS(易感-感染-免疫-易感)模型中没有考虑到感染率取值范围的情况, 提出了一种带有非线性感染率的SIRS改进模型, 从理论上限制了感染率的取值范围; 利用平均场理论分析得到了病毒在均匀网络和无标度网络中的传播阈值及阈值条件; 利用李雅普诺夫稳定性理论分析了系统在平衡点处的稳定性并得到了病毒传播过程不仅受到网络拓扑结构的影响还与感染概率, 免疫概率有密切关系。

关键词: 复杂网络; 非线性感染率; SIRS模型; 阈值条件

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Modeling and stability analysis for SIRS model with nonlinear infection rate

CAO Yu[†], JING Yuan-wei

(College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110819, China)

Abstract: To improve the existing SIRS (susceptible-infected-recovered-susceptible) model in which the infection rate is not considered, we propose an improved model by taking into account additionally the probability of infection range. The threshold and threshold conditions are derived based on the main-field theory on uniform networks and scale-free networks. We analyze the stability of the system near the equilibrium point by using Lyapunov stability theory and obtain the conclusion that the virus transmission process is not only related to the topology of networks but also on the infection probability and the immunity probability.

Key words: complex networks; nonlinear incidence rate; SIRS epidemic model; threshold condition

1 引言(Introduction)

随着科学的发展, 人们对复杂网络的研究也逐渐深入, 与复杂网络相关的研究^[1-2]也越来越受到学者们的青睐. 发生在复杂网络中的动力学传播行为成为了当前复杂网络研究中的一个热点问题. 对传播动力学的研究一般借助于流行病学的方法, 假定网络中的个体处于状态: S(susceptible)易感状态、I(infected)感染状态、R(recovered)免疫状态, 然后根据病毒传播机理建立微分方程, 再通过Lyapunov稳定性分析方法研究病毒传播的阈值与网络拓扑结构对病毒传播的影响^[3-4].

目前得到广泛研究的模型有SIS、SIR、SIRS模型等, 在这些模型中大多忽略了得病概率不能大于1的情况^[5-6], 本文针对此问题提出了一种带有非线性感染率的SIRS模型, 从理论上限制了得病概率的取值范围, 并通过平均场理论, 以及李雅普诺夫稳定性理论进行了分析得到了一些有意义的结论。

2 带有非线性感染率的SIRS模型的建立 (Build of a SIRS model with nonlinear incidence rate)

疾病的传播能力、个人的抵抗力以及周围病人的数量会直接影响健康个体得病的概率. 随着疾病的传播, 健康个体周围的被感染者数量也在不断变化, 在以往的研究中很多学者认为随着时间的推移感染概率是呈线性递增的. 但是实际上健康个体的得病概率并不是简单的线性增长并且具有上界, 所以本文从概率角度提出一种带有非线性感染率的改进SIRS模型. 传播机理如图1所示。

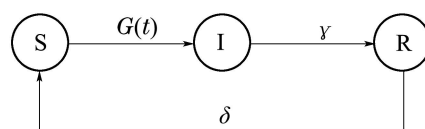


图1 传播机理图

Fig. 1 Figure of transmission mechanism

图1中包含3个离散状态: 易感态(S)、感染态(I)、免疫态(R). 疾病传播的过程是: 易感者与一位感染者接触后以概率 $G(t)$ 转化为感染者, 感染者会以概率 γ 进入免疫状态, 进入免疫状态后会以概率 δ 丧失免疫状态而重新进入易感状态. $s(t), i(t), r(t)$ 分别表示易感者、感染者、免疫者在 t 时刻所占总人口的比例. $G(t)$ 表示 t 时刻易感者得病的概率即感染率. 对于 $G(t)$ 的确定是根据网络的拓扑结构, 如图2所示.

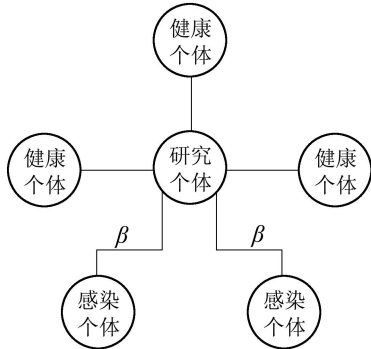


图2 网络拓扑结构示意图

Fig. 2 Schematic diagram of network topology

图2以中心个体为研究对象, 假设在传播过程中健康个体与单一感染者接触后得病的概率 β 是不变的, 此时中心健康个体得病概率应为

$$p(t) = 1 - (1 - \beta)^2,$$

则节点度为 $\langle k \rangle$ 的健康者的感染率为

$$p(t) = 1 - (1 - \beta)^{\langle k \rangle i(t)}. \quad (1)$$

2.1 均匀网络SIRS模型建立(Build of SIRS model on uniform network)

已有的基于均匀网络SIRS模型如下^[3]:

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = -\beta i(t)s(t) + \delta r(t), \\ \dot{i}(t) = \beta i(t)s(t) - \gamma i(t), \\ \dot{r}(t) = \gamma i(t) - \delta r(t). \end{cases}$$

结合式(1)以及原有的SIRS模型可得带有非线性感染率的SIRS模型

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = -[1 - (1 - \beta)^{\langle k \rangle i(t)}]s(t) + \delta r(t), \\ \dot{i}(t) = [1 - (1 - \beta)^{\langle k \rangle i(t)}]s(t) - \gamma i(t), \\ \dot{r}(t) = \gamma i(t) - \delta r(t). \end{cases} \quad (2)$$

对于系统(2)有两个假设:

假设 1 假设网络中每个节点的度相同且为 $\langle k \rangle$.

假设 2 在传播过程中网络规模固定, 即总人数不变.

2.2 无标度网络SIRS模型建立(Build of SIRS model on scale-free network)

对于无标度网络, 平均度 $\langle k \rangle$ 不再是网络的特征表示, 为了刻画网络的拓扑结构对传播的影响, 将节点划分为不同的组, 各组中节点具有相同的度. 已有的SIRS模型如下:

$$\begin{cases} \dot{s}_k(t) = -\beta k s_k(t)\theta(t) + \delta r_k(t), \\ \dot{i}_k(t) = \beta k s_k(t)\theta(t) - \gamma i_k(t), \\ \dot{r}_k(t) = \gamma i_k(t) - \delta r_k(t), \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\theta(t) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k k P(k) i_k$ 表示在 t 时刻随机取一条边与感染者连接的概率, 根据文献[4]可知

$$G_1(t) = \beta k \theta(t) = \frac{\beta k}{\langle k \rangle} \sum_k k P(k) i_k. \quad (4)$$

从式(4)可以看出在理论上是可能大于1的.

从概率角度把原有基于无标度网络的SIRS模型改进成系统(5):

$$\begin{cases} \dot{s}_k(t) = -G(t)s_k(t) + \delta r_k(t), \\ \dot{i}_k(t) = G(t)s_k(t) - \gamma i_k(t), \\ \dot{r}_k(t) = \gamma i_k(t) - \delta r_k(t), \end{cases} \quad (5)$$

其中 $G(t) = 1 - (1 - \beta)^{k\theta(t)}$.

假设 3 $i_k(t), i_{k-1}(t), i_{k-2}(t), \dots, i_1(t)$ 具有相同的单调性

3 改进SIRS模型的稳定性分析(Stability analysis of the modified SIRS model)

3.1 均匀网络的改进SIRS模型稳定性分析(Stability analysis of the modified SIRS model on uniform network)

引理 1 平衡点 $(s, i) = (1, 0)$ 是系统(2)的一组平衡点, 当满足 $\frac{-\langle k \rangle \ln(1 - \beta)}{r} < 1$ 时, 系统(4)收敛于此平衡点, 即疾病最终消失.

为了方便证明, 设 $f(i) = 1 - (1 - \beta)^{\langle k \rangle i(t)}$; 根据假设2可得 $s(t) + i(t) + r(t) = 1$, 若系统(2)达到稳定则可改写成式(6):

$$\begin{cases} -f(i)s + \delta(1 - s - i) = 0, \\ f(i)s - \gamma i = 0. \end{cases} \quad (6)$$

从式(6)不难得出系统(5)的一个平衡点 $(s, i) = (1, 0)$, 系统(5)在此平衡点处的Jacobian矩阵为

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\delta & -f'(0) - \delta \\ 0 & f'(0) - \gamma \end{bmatrix}.$$

如果系统(2)在平衡点处稳定, 则必须满足特征方程的特征值全具有负实部, 所以只需要满足 $f'(0) - \gamma < 0$ 即 $\frac{-\langle k \rangle \ln(1 - \beta)}{r} < 1$.

从阈值条件不难看出: 随着治愈率 γ 的增大, 疾病最后消失的几率会增大. 在完全可治愈疾病传播的情况下, 网络密度和疾病的传播能力最终决定疾病的影响程度.

引理 2 平衡点 $(s, i) = (S^*, I^*)$ 是系统(2)一组局部稳定解, 当满足 $\frac{-\langle k \rangle \ln(1-\beta)}{r} > 1$ 时, 系统(2)收敛到 $(s, i) = (S^*, I^*)$, 疾病比例最终稳定在 $i = I^*$.

根据阈值理论, 系统(2)应存在另一组平衡点, 但是求解过于繁琐, 首先证明系统(2)在满足 $\frac{-\langle k \rangle \ln(1-\beta)}{r} > 1$ 时存在第2组平衡点, 设系统(2)第2组平衡点为 $(s, i) = (S^*, I^*)$ 且满足 $(S^*, I^*) \neq (1, 0)$, 代入式(6)整理得

$$\begin{cases} -f(I^*)S^* + \delta(1 - S^* - I^*) = 0, \\ f(I^*)S^* - \gamma I^* = 0, \end{cases} \quad (7)$$

消元得

$$-\gamma I^* + \delta(1 - \frac{\gamma I^*}{f(I^*)} - I^*) = 0.$$

设

$$H(I) = -\gamma I + \delta(1 - \frac{\gamma I}{f(I)} - I),$$

由 $f(i)$ 表达式可知 $f(0) = 0; f'(i) > 0; f''(i) < 0$ 得

$$H(0) = \delta(1 - \frac{\gamma}{f'(0)}) > 0,$$

$$H'(I) = -\gamma + \delta\gamma(-\frac{f(I) - If'(I)}{f^2(I)} - 1) < 0.$$

由上两式得: 当 $\frac{\gamma}{f'(0)}$ 即 $\frac{-\langle k \rangle \ln(1-\beta)}{\gamma} > 1$ 时, 系统(2)存在另一组平衡点 $(s, i) = (S^*, I^*)$.

系统(2)在 $(s, i) = (S^*, I^*)$ 处的Jacobian矩阵为

$$J_2 = \begin{bmatrix} -f(I) - \delta & -f'(I)S - \delta \\ f(I) & f'(I)S - \gamma \end{bmatrix},$$

其特征方程为

$$\lambda^2 + [f(I^*) + \delta + \gamma - f'(I^*)S^*]\lambda + [f(I^*) + \delta]\gamma + f(I^*)\delta - f'(I^*)S^*\delta = 0,$$

其中 $f(I^*) - f'(I^*)S^* > 0$, 所以特征方程的特征值全部具有负实部即系统(2)在平衡点 $(s, i) = (S^*, I^*)$ 处局部稳定.

由上述结论可知, 在病毒传播过程中, 当系统满足 $\frac{-\langle k \rangle \ln(1-\beta)}{r} > 1$ 时, 疾病不会消失并最终比例会稳定于一常数值, 这与文献[3-7]的结论相同.

3.2 无标度网络的改进SIRS模型稳定性分析 (Stability analysis of the modified SIRS model on scale-free network)

引理 3 平衡点 $(s, i) = (1, 0)$ 是系统(5)的

一组局部稳定解, 当无标度网络的幂律指数大于2且系统(5)参数满足 $\frac{-k_{\min}^2 P(k_{\min}) \ln(1-\beta)}{\langle k \rangle \gamma} < 1$ 时或网络的幂律指数小于2且系统(5)参数满足 $\frac{-k_{\max}^2 P(k_{\max}) \ln(1-\beta)}{\langle k \rangle \gamma} < 1$ 时, 系统收敛于 $(s, i) = (1, 0)$, 即疾病最终消失.

假设网络规模不变, 当系统(5)达到稳态时得

$$\begin{cases} -G(t)s_k + \delta(1 - s_k - i_k) = 0, \\ G(t)s_k - \gamma i_k = 0, \end{cases} \quad (8)$$

其中:

$$G(t) = 1 - (1 - \beta)^{k\theta(t)},$$

$$\theta(t) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k k P(k) i_k.$$

从式(8)很容易得出 $(s_k, i_k) = (1, 0)$ 是系统(5)的一组平衡点, $G(t)$ 又是 i_k 的隐函数, 则系统(5)在此平衡点处的Jacobian矩阵:

$$J_2 = \begin{bmatrix} -\delta & -G'(0) - \delta \\ 0 & G'(0) - \gamma \end{bmatrix}.$$

为了使系统(5)稳定则必须满足特征方程的所有特征根具有负实部, 所以只要满足 $G'(0) - \gamma < 0$ 即

$$\frac{-k^2 P(k) \ln(1-\beta)}{\langle k \rangle \gamma} < 1.$$

无标度网络的节点分布具有幂律特性即: $P(k) \propto k^{-\lambda}$. 由改进的模型所得到的阈值条件及假设条件可以看出当幂律指数 $\lambda < 2$ 时, 随着网络规模的扩大上式越难成立即疾病越难消失, 这与以往的研究结论^[7-8]是相同的. 当 $\lambda > 2$ 时, 随着网络规模的扩大疾病越容易消失, 这是对以往研究结果的补充.

引理 4 平衡点 $(s, i) = (S^*, I^*)$ 是系统(5)的一组局部稳定解, 当无标度网络的幂律指数大于2且系统(5)参数满足 $\frac{-k_{\min}^2 P(k_{\min}) \ln(1-\beta)}{\langle k \rangle \gamma} > 1$ 时或网络的幂律指数小于2且系统(5)参数满足 $\frac{-k_{\max}^2 P(k_{\max}) \ln(1-\beta)}{\langle k \rangle \gamma} > 1$ 时, 系统收敛于 $(s, i) = (S^*, I^*)$, 即疾病最终保持一定比例.

根据阈值理论, 系统(5)应存在另一组平衡点, 但是求解过于繁琐, 首先证明系统(5)存在第2组平衡点. 设系统(5)第2组平衡点为 $(s, i) = (S^*, I^*)$ 且满足 $(S^*, I^*) \neq (1, 0)$, 其中 $S^* \in (0, 1), I^* \in (0, 1)$. 当系统(5)达到稳态时, 对于节点度为 k 的组节点也必然稳定在各自的平衡点 $(s_k, I_k) = (S_k^*, I_k^*)$, 代入系统(8)整理得

$$\begin{cases} -G(I_k^*)S_k^* + \delta(1 - S_k^* - I_k^*) = 0, \\ G(I_k^*)S_k^* - \gamma I_k^* = 0, \end{cases} \quad (9)$$

消元得

$$-\gamma I_k^* + \delta(1 - \frac{\gamma I_k^*}{G(I_k^*)} - I_k^*) = 0.$$

设

$$H(I_k) = -\gamma I_k + \delta(1 - \frac{\gamma I_k}{G(I_k)} - I_k).$$

由 $G(I_k)$ 表达式可以得到 $G(I)$ 的相关性质:

$$G(0) = 0; G'(I) > 0; G''(I) < 0,$$

$H(0) > 0; H'(I_k) < 0; \lim_{I_k \rightarrow 0} H(I_k) < 0$. 因此可以得到 $H(I_k) = 0$ 必然存在一个根 $I_k^* \in (0, 1)$, 即系统(5)中具有节点度为 k 的分系统在满足

$$\frac{-k^2 P(k) \ln(1-\beta)}{\langle k \rangle \gamma} > 1$$

时存在另一组平衡点 $(S_k^*, I_k^*) \neq (0, 1)$, 系统(5)的分系统在其第2组平衡点处的Jacobian矩阵为

$$J_3 = \begin{bmatrix} -G(I_k^*) - \delta & -G'(I_k^*)S_k^* - \delta \\ G(I_k^*) & G'(I_k^*)S_k^* - \gamma \end{bmatrix},$$

其特征方程为

$$\lambda^2 + [G(I_k^*) + \delta + \gamma - G'(I_k^*)S_k^*]\lambda + [G(I_k^*)\gamma + G(I_k^*)\delta - G'(I_k^*)S_k^*\delta] = 0,$$

其中 $G(I_k^*) - G'(I_k^*)S_k^* > 0$ 推导得特征方程的根都具有负实部, 那么具有节点度 k 的分系统渐近稳定在 $(S_k, I_k) = (S_k^*, I_k^*)$, 根据假设3, 各个分系统均稳定, 那么系统(5)必然渐近稳定于其平衡点. 结合无标度网络的度分布特性推导得引理4. 从结论也不难看出均匀网络的阈值条件是无标度网络的特例.

4 结论(Conclusions)

本文从概率角度结合网络的拓扑结构提出了一种带有非线性感染率的SIRS改进模型. 此非线性感染率隐含了此前研究人员所忽略的感染率必然小于1的假设条件. 此次基础之上根据阈值理论、平均场理论, 利用李雅普诺夫稳定性分析方法分别对基于均匀网络和无标度网络的改进SIRS模型进行了理论分析得到网络阈值不仅与网络的拓扑结构有关也与得病概率 β 和免疫转化率 γ 有关, 这与文献[3-7]的结论是不同的. 而与文献[8]的结论具有一致性, 并在文献[8]基础上证明其阈值限制条件恒成立.

由于基于无标度网络的SIRS模型中阈值无法求得解析解, 给分析带来了不便, 在此笔者只能给出平衡点存在的证明以及系统在平衡点处的渐近稳定性证明, 在此基础上给出了关于阈值的讨论, 有待进一步完善.

参考文献(References):

- [1] 贾贞, 汪贺, 王俊, 等. 基于自适应同步的二部图复杂动力网络的权值识别 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(1): 107-110. (JIA Zhen, WANG He, WANG Jun, et al. The weighted identification of a bipartite-graph complex dynamical network based on adaptive synchronization [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(1): 107-110.)
- [2] 郭凌, 年晓红, 潘欢. 一般耦合结构时变时滞复杂网络的同步准则 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(1): 73-78. (GUO Ling, NIAN Xiaohong, PAN Huan. Synchronization criteria for general coupling complex networks with time varying delay [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(1): 73-78.)
- [3] 李光正, 史定华. 复杂网络上SIRS类疾病传播行为分析 [J]. 自然科学进展, 2006, 16(4): 508-512. (LI Guangzheng, SHI Dinghua. Analysis of behavior for SIRS on complex networks [J]. *Progress in Natural Science*, 2006, 16(4): 508-512.)
- [4] 汪小帆, 李翔, 陈关荣. 复杂网络理论及其应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006: 72-85. (WANG Xiaofan, LI Xiang, CHEN Guanrong. *The Theory and Application of Complex Networks* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006: 72-85.)
- [5] 夏承遗, 刘忠信, 陈增强, 等. 复杂网络上带有直接免疫的SIRS类传染模型研究 [J]. 控制与决策, 2008, 23(4): 468-472. (XIA Chengyi, LIU Zhongxin, CHEN Zengqiang, et al. SIRS epidemic model with direct immunization on complex networks [J]. *Control and Decision*, 2008, 23(4): 468-472)
- [6] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic spreading in scale-free networks [J]. *Physical Review Letters*, 2001, 86(14): 3200-3203.
- [7] NEWMAN M EJ. The structure and function of complex networks [J]. *SIAM Review*, 2003, 45(2): 167-256.
- [8] KYRYCHKO Y N, BLYUSS K B. Global properties of a delayed SIR model with temporary immunity and nonlinear incidence rate [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2005, 6(3): 495-507.

作者简介:

曹宇 (1984-), 男, 博士研究生, 研究领域为复杂网络动力学传播行为分析与控制, E-mail: mouse1202000@163.com;

井元伟 (1956-), 男, 教授, 博士生导师, 研究领域为复杂系统与复杂性科学、非线性系统, E-mail: ywjing@mail.neu.edu.cn.