

切换服务系统的稳定性及交叉口信号配时

何忠贺^{1†}, 陈阳舟¹, 石建军²

(1. 北京工业大学 电子信息与控制工程学院, 北京 100124; 2. 北京工业大学 建筑工程学院, 北京 100124)

摘要: 当缓冲器内工作量较大时, 服务器的“固定顺序清空切换”服务策略使得清空缓冲器内工作量需要较长时间, 从而其他缓冲器未能及时得到服务. 为此本文提出服务器“带服务时间上限的固定顺序切换”服务策略, 服务器在该服务策略下分配给每个缓冲器服务时间上限, 以保证各缓冲器公平地得到服务. 在满足缓冲器总负荷小于各缓冲器服务时间调整因子的最小值与最大值之比的条件下, 证明了所提出服务器服务策略下的切换服务系统是周期稳定的. 进一步将交叉口信号配时建模为切换服务系统, 并应用所提出的服务器服务策略研究了交叉口信号配时策略. 通过对交叉口实际数据的仿真验证了本文方法的有效性.

关键词: 混杂系统; 切换服务系统; 周期解; 稳定性; 交叉口; 交通控制

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Stability of switched server system and signal timing of intersection

HE Zhong-he^{1†}, CHEN Yang-zhou¹, SHI Jian-jun²

(1. College of Electronic Information and Control Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China;

2. College of Architecture and Civil Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: For a buffer with a large amount of work, under the service strategy ‘empty buffers in a fixed sequence’, the server has to take a longer time to empty this buffer, making other buffers unable to be served timely. Motivated by this problem, we propose the service strategy called ‘empty buffers in a fixed sequence with upper limits of service-time’. The server assigns each buffer an upper limit of service-time such that each buffer can be served fairly. It is proved that switched server system under the proposed service strategy is periodically stable when the total buffer load is less than the ratio of the minimum to the maximum of the buffer service-time adjustment factors. Furthermore, the signal timing of an intersection is modeled as a switched server system, and the proposed service strategy is directly applied to the signal timing of the intersection. The effectiveness of the proposed methods is verified by the simulation for an intersection based on practical data.

Key words: hybrid systems; switched server system; periodic solution; stability; intersections; traffic control

1 引言(Introduction)

切换服务系统是一类混杂系统^[1], 由若干个缓冲器和一个服务器组成, 服务器轮流为缓冲器服务. 切换服务系统能够建模许多实际系统, 例如制造业系统^[2-3]、交通系统^[4]等. 文献[2]较早地讨论了切换服务系统的稳定性问题. 文献[5]提出了服务器“固定顺序清空切换”服务策略, 并且证明了该服务策略的周期稳定性. 文献[6]提出了服务器“优先服务未被服务时间最长的缓冲器”服务策略, 并且证明在该服务策略下, 系统存在 $(n-1)!$ 个稳定的周期解(假定有 n 个缓冲器). 文献[7]考虑了一类切换服务系统, 服务器可以同时服务多个缓冲器, 此种情况类似于信号灯可以同时服务多股非冲突车流. 在缓冲器没有外部工件到达的假定下, 文献[7]给出了清空所有

缓冲器内工作量的最优切换律. 文献[5-6]中报告的方法, 首先设计服务器服务策略, 然后分析在所设计的服务策略下系统的周期稳定性. 文献[8]中所采用的方法与文献[5-6]中的方法不同, 首先求解一个最小化缓冲器内平均总工作量的周期解, 然后设计反馈控制策略使得系统的解收敛到周期解. 文献[9]中讨论了有服务时间上限的切换服务系统的稳定性问题, 通过仿真的方式给出了系统周期稳定性的猜测, 而未给出周期稳定性的理论证明. 文献[10-11]采用分布式反馈控制策略, 研究服务器网络的稳定性问题, 服务器分配给所服务的每个缓冲器一个服务时间上限, 并且将服务器的切换延误时间作为一个控制量.

城市信号交叉口可以看成城市路网的节点, 信

收稿日期: 2012-04-17; 收修改稿日期: 2012-09-12.

[†]通信作者. Tel.: +86 15910742443.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61079001, 61273006); 国家“863计划”资助项目(2011AA110301, 2011AA110306); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20111103110017).

号灯色的切换可由有限自动机建模, 结合入口路段上车辆排队长度的连续变化, 信号交叉口可以由混杂自动机模型建模^[12]. 信号交叉口的各种定时控制方法已得到广泛研究. 例如, 广泛使用的Webster方法^[13]、等饱和度方法^[14]等. 某种意义上, 信号交叉口入口路段上车道类似于缓冲器, 用于存储准备通过交叉口的车辆, 而信号灯类似于服务器, 轮流提供给各相位内车道上车辆通行权. 由于此种类似, 交叉口信号配时可由切换服务系统建模. 从而, 切换服务系统理论结果可用于交叉口信号配时的分析与设计. 文献[4]将切换服务系统理论用于T形交叉口信号配时.

本文考虑切换服务系统的稳定性问题及其在交叉口信号配时中的应用. 首先, 本文提出服务器“带服务时间上限的固定顺序切换”服务策略, 在满足缓冲器总负荷小于各缓冲器服务时间调整因子的最小值与最大值之比的条件下, 证明了该服务策略的周期稳定性. 该服务策略是服务器“固定顺序清空切换”服务策略的进一步改进. 其次, 建立一般交叉口信号配时的切换服务系统模型, 将所提出的服务器服务策略应用于交叉口信号配时, 从而, 推广了文献[4]中的工作.

2 切换服务系统的稳定性分析(Stability analysis of switched server system)

一个有 n 个缓冲器 (n 为大于 1 的整数) 的切换服务系统如图 1 所示. 假定缓冲器 i 内待加工“工件”以常速率 $d_i > 0$ 到达, “工件”的具体含义依赖于实际问题, 并且当服务器为该缓冲器服务时工件以常速率 $s_i > 0$ 离开, $i = 1, \dots, n$. d_i 和 s_i 分别称为缓冲器 i 的工件到达率和离开率. 采用 $x_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) 表示缓冲器 i 内在 t 时刻待加工工件的数量, 称为工作量. 当服务器从服务缓冲器 i 切换到服务缓冲器 j 时, 服务器存在延误时间 $l_{ij} > 0$, $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$, 在这个时间段内服务器不为任何缓冲器服务. 设 $\mathbf{x} = [x_1 \ \dots \ x_n]^T$, $\mathbf{d} = [d_1 \ \dots \ d_n]^T$, \mathbf{e}_i 为 n 维标准单位向量, 则缓冲器内工作量变化为:

当缓冲器 i 正在被服务时有

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{d} - s_i \mathbf{e}_i. \quad (1)$$

当服务器处于切换过程中时有

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{d}. \quad (2)$$

称 $d_i s_i^{-1}$ 为缓冲器 i 的负荷, $i = 1, \dots, n$, 于是 $\sum_{j=1}^n (d_j s_j^{-1})$ 为缓冲器总负荷. 以下假定缓冲器总负荷小于 1, 即如下不等式成立:

$$\sum_{j=1}^n (d_j s_j^{-1}) < 1. \quad (3)$$

不等式(3)是保证在任意服务策略下缓冲器内工作

量保持有界的必要条件^[2].

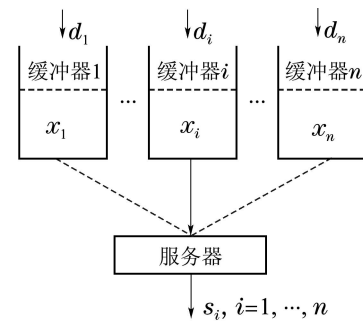


图 1 有 n 个缓冲器的切换服务系统
Fig. 1 Switched server system with n buffers

下面首先考虑服务器“固定顺序清空切换”服务策略:

- 1) 缓冲器 1 首先被服务;
- 2) 当缓冲器 i 被服务且其内工作量被清空(即 $x_i(t) = 0$)时, 服务器切换到服务缓冲器 $i + 1$, $i = 1, \dots, n - 1$; 当缓冲器 n 被服务且其内工作量被清空(即 $x_n(t) = 0$)时, 服务器重新切换到服务缓冲器 1;
- 3) 当服务器从服务缓冲器 i 切换到服务缓冲器 $i + 1$ 时, 存在服务延误时间 $l_{i(i+1)}$, $i = 1, \dots, n - 1$; 当服务器从服务缓冲器 n 切换到服务缓冲器 1 时, 服务延误时间为 l_{n1} .

定理 1 给出了服务器“固定顺序清空切换”服务策略的稳定性结果.

定理 1 考虑方程(1)和(2)在服务器“固定顺序清空切换”服务策略下的切换服务系统. 假定缓冲器的工件到达率 d_i 和离开率 s_i ($i = 1, \dots, n$) 满足不等式(3), 则如下结论成立:

- 1) 切换服务系统存在唯一的周期解, 且该周期解全局渐进稳定.
- 2) 该周期解的周期 C 由如下公式计算:

$$C = \frac{L}{1 - \sum_{j=1}^n (d_j s_j^{-1})}, \quad (4)$$

式中 $L = l_{12} + \dots + l_{(n-1)n} + l_{n1}$ 为服务器切换周期内总延误时间.

- 3) 在稳态周期 C 内, 服务器提供给缓冲器 i 的服务时间 g_i 由式(5)计算:

$$g_i = d_i s_i^{-1} C = \frac{d_i s_i^{-1}}{\sum_{j=1}^n (d_j s_j^{-1})} (C - L), \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

证 考虑线性变换 $\mathbf{y} = S\mathbf{x}$, 其中 S 为对角矩阵 $\text{diag}\{s_1^{-1}, \dots, s_n^{-1}\}$. 于是, 应用该线性变换可将由式(1)和式(2)描述的系统变为以 \mathbf{y} 作为状态变量的系统. 此时, 缓冲器 i 的工件到达率和离开率分别为

$d_i s_i^{-1}$ 和 $1, i = 1, \dots, n$. 应用文献[5]中定理7即可得到定理1中的结论1)和2). 对于结论3), 设 $\mathbf{x}(t)$ 为式(1)和式(2)在服务器“固定顺序清空切换”服务策略下的切换服务系统的带有初始条件 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 的周期解. 设 $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}, t_0 = 0$ 为在该服务策略下周期解 $\mathbf{x}(t)$ 的切换时间序列, 其中, t_{2k-2} 和 $t_{2k-1} (k = 1, 2, \dots)$ 分别表示服务器对缓冲器开始服务时刻和服务完成时刻, 则 t_{2n} 为服务器首次完成周期切换 ($1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1$) 的时刻, 即 $C = t_{2n}, t_{2i-2}$ 为周期 C 内缓冲器 i 开始被服务的时刻, $i = 1, \dots, n$. 由于缓冲器 i 被服务之前其内工作量一直保持增加, $g_i (i = 1, \dots, n)$ 为下列方程组的解:

$$\begin{cases} x_i(0) + d_i t_{2i-2} + (d_i - s_i) g_i = 0, \\ x_i(0) - d_i (C - t_{2i-2} - g_i) = 0. \end{cases}$$

求解上面方程组可得: $g_i = d_i s_i^{-1} C, i = 1, \dots, n$, 且

$$g_i = d_i s_i^{-1} C = \frac{d_i s_i^{-1} L - L(1 - \sum_{j=1}^n (d_j s_j^{-1}))}{\sum_{j=1}^n (d_j s_j^{-1}) - 1 - \sum_{j=1}^n (d_j s_j^{-1})} = \frac{d_i s_i^{-1}}{\sum_{j=1}^n (d_j s_j^{-1})} (C - L), i = 1, \dots, n.$$

因此3)中结论成立. 证毕.

通过下例来说明定理1中结果, 从中可以看出推广服务器“固定顺序清空切换”服务策略的必要性.

例1 考虑采用服务器“固定顺序清空切换”服务策略的有3个缓冲器的切换服务系统. 本例中缓冲器工件到达率及离开率的单位为(件/s), 时间单位为(s). 假定缓冲器按照 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ 的固定顺序周期性地被服务. 缓冲器工件的到达率和离开率分别为 $d_1 = 0.8, d_2 = 0.5, d_3 = 0.7, s_1 = 2, s_2 = 2.5, s_3 = 3.5$. 容易验证其满足不等式(3). 服务器切换延误时间分别为 $l_{12} = 3, l_{23} = 4, l_{31} = 3$. 选取初始条件为 $[x_1(0) \ x_2(0) \ x_3(0)]^T = [240 \ 90 \ 150]^T$, 仿真结果如图2所示. 由式(4)和式(5)可计算周期解的周期及各缓冲器被服务时间分别为 $C = 50 \text{ s}, g_1 = 20 \text{ s}, g_2 = 10 \text{ s}, g_3 = 10 \text{ s}$.

对于例1中所选的初始条件, 容易计算在第1个服务器切换周期内, 各缓冲器所获得的服务时间分别为 $g'_1 = 200, g'_2 \approx 96, g'_3 \approx 129$, 其值远大于稳态周期内各缓冲器所获得的服务时间. 因此, 当缓冲器内初始工作量较大或不均衡时, 应用服务器“固定顺序清空切换”服务策略, 使得在未收敛到稳态周期解之前, 某些缓冲器的服务时间较长, 从而使其他缓冲器需要等待较长时间才能得到服务. 对于某些实际系统, 为了使各个缓冲器公平地得到服务, 需要对缓冲器服务时间有上限约束. 例如, 信号交叉口各相位

有效绿时需要满足最长绿时约束. 其次, 若直接采用定理1计算的周期和服务时间对缓冲器进行服务, 则会导致大量工件在一个周期内不能被服务. 为此, 下面推广服务器“固定顺序清空切换”服务策略, 即对定理1的周期和服务时间进行修正, 提出服务器“带服务时间上限的固定顺序切换”服务策略.

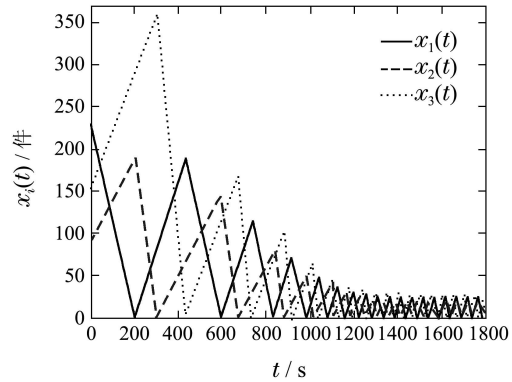


图2 例1中缓冲器内工作量随时间变化图
Fig. 2 The variation of amount of work in buffers of example 1 vs time

服务器“带服务时间上限的固定顺序切换”服务策略描述如下:

- 1) 缓冲器1首先被服务, 且各缓冲器按照 $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n$ 的固定顺序周期性地被服务;
- 2) 当缓冲器 i 被服务时, 其服务时间由下式确定:

$$\tilde{g}_i = \begin{cases} g_i + \frac{d_i}{s_i} \Gamma_i, & \text{如果 } \frac{x_i(t_k^i)}{s_i - d_i} > g_i + \frac{d_i}{s_i} \Gamma_i, \\ \frac{x_i(t_k^i)}{s_i - d_i}, & \text{如果 } \frac{x_i(t_k^i)}{s_i - d_i} \leq g_i + \frac{d_i}{s_i} \Gamma_i, \end{cases} \quad (6)$$

式中: g_i 由式(5)确定, t_k^i 表示服务器开始为缓冲器 i 服务的时刻, $x_i(t_k^i)$ 表示在 t_k^i 时刻缓冲器 i 内的工作量, $\Gamma_i > 0$ 是可调参数, $i = 1, \dots, n$;

- 3) 当服务器从服务缓冲器 i 切换到服务缓冲器 $i + 1$ 时, 存在服务延误时间 $l_{i(i+1)}, i = 1, \dots, n - 1$; 当服务器从服务缓冲器 n 切换到服务缓冲器 1 时, 服务延误时间为 l_{n1} .

在上述服务器服务策略中, 式(6)中的 $x_i(t_k^i)(s_i - d_i)^{-1}$ 表示清空缓冲器 i 内工作量 $x_i(t_k^i)$ 所需时间. 如果该时间大于分配给缓冲器 i 的最长服务时间 $g_i + d_i s_i^{-1} \Gamma_i$, 则服务器以该最长服务时间服务缓冲器 i , 否则清空缓冲器 i 内工作量. 该服务策略的意义在于当缓冲器内工作量较大或不均衡时, 适当限制缓冲器被服务时间使其他缓冲器公平地得到服务.

称式(6)中 Γ_i 为缓冲器 i 的服务时间调整因子, $i = 1, \dots, n$. 考虑如下不等式:

$$\sum_{j=1}^n (d_j s_j^{-1}) < \frac{\min_{j \in \{1, \dots, n\}} \{\Gamma_j\}}{\max_{j \in \{1, \dots, n\}} \{\Gamma_j\}}. \quad (7)$$

容易看到, 当所有 Γ_i 均相同时, 不等式(7)即为不等式(3).

定理 2 考虑方程(1)和(2)在服务器“带服务时间上限的固定顺序切换”服务策略下的切换服务系统. 假定缓冲器的工件到达率 d_i 、离开率 s_i 及服务时间调整因子 Γ_i 满足不等式(7), 则切换服务系统存在唯一的周期解, 且该周期解是全局渐进稳定的.

证 首先证明: 任意选取一个缓冲器 $i \in \{1, \dots, n\}$, 在服务器“带服务时间上限的固定顺序切换”服务策略下, 对于任何初始条件 $x_i(0)$, 一定存在一个时刻使得缓冲器内的工作量被清空. 采用反证法, 假定这样的时刻不存在, 即缓冲器 i 在经历的任何服务器切换周期内(完成一个切换过程 $j \rightarrow j+1 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow j$ 即为一个周期), 其内工作量都没有被清空, 则缓冲器 i 在经历的每个服务器切换周期内所获得的服务时间均为 $g_i + d_i s_i^{-1} \Gamma_i$. 缓冲器 i 在任何一个服务器切换周期内最多到达的工作量为

$$d_i \left[\sum_{j=1}^n (g_j + d_j s_j^{-1} \Gamma_j) + L \right], \quad (8)$$

而缓冲器 i 被服务的工作量为

$$s_i [g_i + d_i s_i^{-1} \Gamma_i]. \quad (9)$$

式(8)与式(9)的差即为缓冲器 i 在一个服务器切换周期内工作量的最大增量:

$$\begin{aligned} & d_i \left[\sum_{j=1}^n (g_j + d_j s_j^{-1} \Gamma_j) + L \right] - s_i [g_i + d_i s_i^{-1} \Gamma_i] = \\ & [d_i (\sum_{j=1}^n g_j + L) - s_i g_i] + \\ & d_i [(\sum_{j=1}^n d_j s_j^{-1} \Gamma_j) - \Gamma_i] = \\ & d_i [(\sum_{j=1}^n d_j s_j^{-1} \Gamma_j) - \Gamma_i] \leq \\ & d_i \Gamma_i \left[\left(\frac{\max_{j \in \{1, \dots, n\}} \{\Gamma_j\}}{\Gamma_i} \sum_{j=1}^n d_j s_j^{-1} \right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

上面方程中的第4行可由式(4)和式(5)得出. 由不等式(7)可得式(10)小于0. 因此, 对于任何初始条件 $x_i(0)$, 经过若干服务器切换周期后可导致缓冲器 i 内工作量为负值, 这与缓冲器 i 内工作量为非负值矛盾. 从而, 对于任何初始条件 $x_i(0)$, 一定存在一个时刻使得缓冲器 i 内的工作量被清空.

现在证明: 一旦缓冲器 i 内工作量被清空, 则服务器“带服务时间上限的固定顺序切换”服务策略可以保证缓冲器 i 在随后的服务器切换周期内均能被清空. 假设对于给定的初始条件 $x_i(0)$, 缓冲器 i 内的工作量首次被清空的时刻为 t_*^i , 即 $x_i(t_*^i) = 0$. 从 t_*^i 时刻开始直至缓冲器 i 再次被服务时间段内, 缓冲器内到达的最大工作量为

$$d_i \left[\sum_{j \neq i} (g_j + d_j s_j^{-1} \Gamma_j) + L \right], \quad (11)$$

而清空式(11)中的工作量所需时间为

$$\frac{d_i \left[\sum_{j \neq i} (g_j + d_j s_j^{-1} \Gamma_j) + L \right]}{s_i - d_i}. \quad (12)$$

比较式(12)与分配给缓冲器 i 的最长服务时间可得

$$\begin{aligned} & \frac{d_i \left[\sum_{j \neq i} (g_j + d_j s_j^{-1} \Gamma_j) + L \right]}{s_i - d_i} - [g_i + d_i s_i^{-1} \Gamma_i] = \\ & \left[\frac{d_i}{s_i - d_i} (\sum_{j \neq i} g_j + L) - g_i \right] + \\ & \left[\frac{d_i}{s_i - d_i} (\sum_{j \neq i} d_j s_j^{-1} \Gamma_j) - d_i s_i^{-1} \Gamma_i \right] \leq \\ & \left[\frac{d_i s_i^{-1}}{1 - d_i s_i^{-1}} (C - g_i) - g_i \right] + \\ & \left[\frac{d_i s_i^{-1}}{1 - d_i s_i^{-1}} \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \{\Gamma_j\} (\sum_{j \neq i} d_j s_j^{-1}) - d_i s_i^{-1} \Gamma_i \right] = \\ & d_i s_i^{-1} \Gamma_i \left[\frac{1}{1 - d_i s_i^{-1}} \frac{\max_{j \in \{1, \dots, n\}} \{\Gamma_j\}}{\Gamma_i} (\sum_{j \neq i} d_j s_j^{-1}) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

上面方程中的最后一行可由式(4)和式(5)得出. 由不等式(7)可得到

$$\begin{aligned} & \sum_{j \neq i} d_j s_j^{-1} + \frac{\Gamma_i}{\max_{j \in \{1, \dots, n\}} \{\Gamma_j\}} d_i s_i^{-1} \leq \\ & \sum_{j=1}^n d_j s_j^{-1} < \frac{\Gamma_i}{\max_{j \in \{1, \dots, n\}} \{\Gamma_j\}}. \end{aligned} \quad (14)$$

由式(14)可以得到

$$\frac{1}{1 - d_i s_i^{-1}} \frac{\max_{j \in \{1, \dots, n\}} \{\Gamma_j\}}{\Gamma_i} \sum_{j \neq i} d_j s_j^{-1} < 1. \quad (15)$$

不等式(15)意味着式(13)小于0. 从而, 缓冲器 i 在 t_*^i 时刻之后的服务器切换周期内所获得的服务时间小于最长服务时间, 因此其内工作量必被清空. 类似上面证明过程最终可得, 缓冲器 i 内工作量在首次被清空之后的所有服务器切换周期内均能被清空.

由于缓冲器 i 选取的任意性, 上述证明过程对任意一个缓冲器均成立. 由此可得服务器“带服务时间上限的固定顺序切换”服务策略最终收敛到服务器“固定顺序清空切换”服务策略. 因此, 由定理1可得定理2的结论成立. 证毕.

缓冲器被服务时间式(6)中包含参数 Γ_i , Γ_i 的选取决定着系统的性能. 参数的调整原则: 若缓冲器 i 内初始工作量较大, Γ_i 选取得越大, 系统收敛到稳定周期解的速度越快; 参数的调整方法: 如果每个缓冲器最长允许的服务时间为 $\tilde{g}_{i, \max}$, 则当 $\Gamma_i = (\tilde{g}_{i, \max} - g_i) s_i d_i^{-1}$ 时, 系统的性能最好, 也就是相对于最长允

许的服务时间 $\tilde{g}_{i,\max}$, 系统收敛到稳定周期解的速度最快. 下面通过例2说明两种服务器服务策略的关系及不同参数值的选取对系统解的收敛速度的影响.

例2 考虑3个缓冲器在服务器“带服务时间上限的固定顺序切换”服务策略下的切换服务系统. 假定缓冲器按照1 → 2 → 3的固定顺序周期性地被服务. 各缓冲器的工件到达率、离开率与服务器切换延误时间的取值与例1中相同. 各变量单位如例1中所述. 选取初始条件为 $[x_1(0) \ x_2(0) \ x_3(0)]^T = [240 \ 90 \ 150]^T$. 图3给出服务器“带服务时间上限的固定顺序切换”服务策略的仿真结果, 可调参数为 $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 50$. 图4给出该服务策略在不同参数值情况下的仿真结果, 参数值分别选为 $\Gamma = 20, \Gamma = 40, \Gamma = 60$. 通过比较图2和图3中的仿真结果可以看出: 系统的解在两种服务器服务策略下最终收敛到相同的周期解, 服务器“带服务时间上限的固定顺序切换”服务策略下解的收敛速度要比服务器“固定顺序清空切换”服务策略下解的收敛速度慢, 但是可以保证缓冲器公平地得到服务. 从图4的仿真结果可以看出: 参数 Γ 的选取越大, 系统解的收敛速度越快.

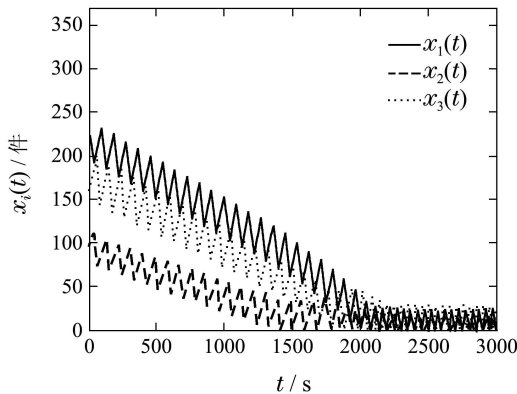


图3 例2中缓冲器内工作量随时间变化图

Fig. 3 The variation of amount of work in buffers of example 2 vs time

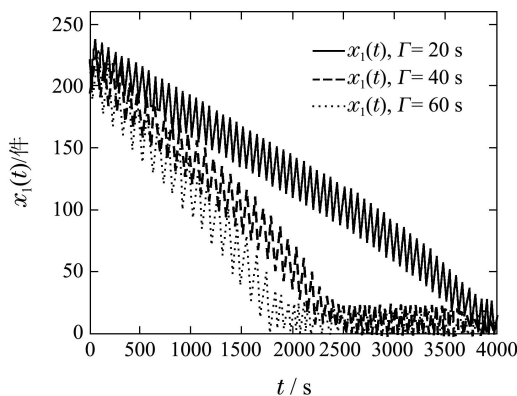


图4 不同参数下例2中缓冲器1内工作量随时间变化图

Fig. 4 The variation of amount of work in buffer 1 of example 2 vs time under different parameters

3 信号交叉口的信号配时(Signal timing of signalized intersection)

下面将定理1和定理2的结果应用于交叉口信号配时. 考虑一个信号交叉口, 假定该信号交叉口的 n 个($n \geq 2$)相位已确定, 相序给定为 $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1$. 车道组是信号交叉口分析中的基本单元, 一个车道组可以包含一或多条车道. 在信号交叉口入口路段上的车道组类似于一个缓冲器, 而信号灯类似于服务器, 轮流提供给车道组上车辆通行权. 由于这种类似, 可以应用第2节给出的切换服务系统的理论结果来设计交叉口的信号配时并分析其稳定性.

本节中车辆到达率及饱和流率的单位为(辆/s), 时间单位为(s). 假定相位 i 内包含 m_i 个车道组, 相位 i 内第 p 个车道组上车辆到达率和饱和流率分别为 $d_{(i,p)}$ 和 $s_{(i,p)}$, $i = 1, \dots, n, p = 1, \dots, m_i, m_i \geq 1$. 假定交叉口不存在搭接相位, 即不存在跨越多个相位通行的车流. 通过下面过程建立交叉口信号配时的切换服务系统模型:

1) 首先在每个相位 i 内选取一个关键车道组, 即该相位内具有最大流率比(到达率/饱和流率)的车流所在的车道组, 该车道组标号记为 $(i, i_k), i = 1, \dots, n, i_k \in \{1, \dots, m_i\}$, 其上车流称为关键车流, 相位 i 内其他车道组上车流与关键车流具有相同绿时分配.

2) 信号交叉口各相位内关键车道组上车辆排队长度的变化可由方程(1)和(2)所给出的切换服务系统模型描述. 本文中车辆排队长度定义为: 位于车道停车线后的车辆的数量. 相位的损失时间由服务器从服务一个缓冲器切换到服务另一个缓冲器的延误时间来建模. 此时, 在方程(1)和(2)中的 x_i 表示相位 i 内关键车道组上车辆排队长度, $i = 1, \dots, n$.

注1 按上面步骤1)和2)建立的一般交叉口信号配时切换服务系统模型, 本文假定车辆到达率为常值, 其值可通过交叉口各进口道上车辆到达率的24小时历史数据的统计得到. 一天可分为若干时段, 例如, 高峰时段、低峰时段、平峰时段和夜间, 在每个时段内车辆到达率的均值一般不同.

假定信号交叉口各相位内关键车道组上车辆到达率 $d_{(i,i_k)}$ 及饱和流率 $s_{(i,i_k)}$ 满足不等式(3). 若应用服务器“固定顺序清空切换”服务策略, 可得到定时配时公式

$$\begin{cases} C = \frac{L}{1 - \sum_{j=1}^n d_{(j,j_k)} s_{(j,j_k)}^{-1}}, \\ g_i = d_{(i,i_k)} s_{(i,i_k)}^{-1} C = \frac{d_{(i,i_k)} s_{(i,i_k)}^{-1}}{\sum_{j=1}^n d_{(j,j_k)} s_{(j,j_k)}^{-1}} (C - L), \quad i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (16)$$

式中: C 为定时信号周期, g_i 为相位 i 的有效绿灯时间, L 为信号周期内相位总损失时间.

由定理 1 中结果, 配时公式 (16) 中信号周期及相位的有效绿灯时间分别是交叉口信号配时切换服务系统全局渐进稳定的周期解的周期及稳态周期内各个相位的服务时间, 其表达式恰好与交通工程中的基本配时公式^[13]相一致.

下面通过一个实际信号交叉口来说明服务器“带服务时间上限的固定顺序切换”服务策略的性能.

例 3 考虑一个三相位设置的 T 形信号交叉口 (如图 5 所示). 假设从北向南方向直行及所有右转车流均不受控. 当受控车流与非受控车流发生冲突时遵循让行交通规则. 受控车流所在车道均为单车道. x_1, x_2, x_3 分别表示由南向北方向直行、由北向南方向左转及由东向西方向左转车道上车辆排队长度, 相应车道编号为 1, 2, 3, $d_i, s_i (i = 1, 2, 3)$ 分别表示车道 i 上车辆到达率和饱和流率. 采用文献 [4] 中一组交通数据: $d_1 = 0.1, d_2 = 0.08, d_3 = 0.1, s_1 = s_2 = s_3 = 0.32, l_{12} = 3, l_{23} = 4, l_{31} = 3$. 假定相序为 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, 参数选为 $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 64$, 容易验证 $d_i, s_i, \Gamma_i (i = 1, 2, 3)$ 满足不等式 (7). 选择初始条件为 $[x_1(0) \ x_2(0) \ x_3(0)]^T = [20 \ 25 \ 32]^T$, 仿真结果如图 6 所示. 从图 6 可以看出: 各受控车流车辆排队长度最终收敛到稳定的周期车辆排队长度.

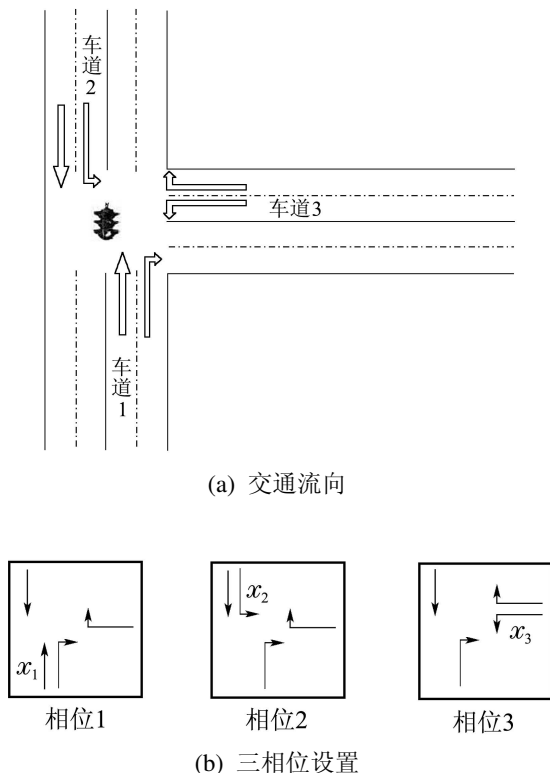


图 5 T 形信号交叉口

Fig. 5 T-type signalized intersection

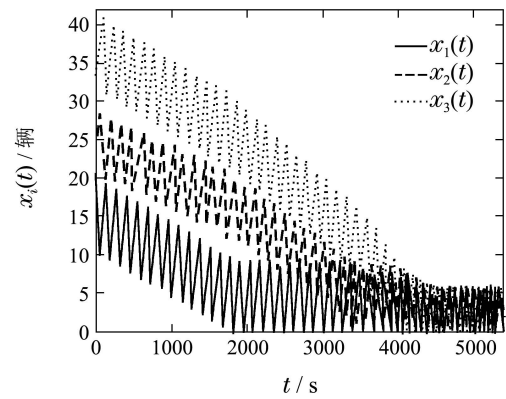


图 6 车辆排队长度随时间变化图

Fig. 6 The variation of vehicles queue length vs time

文献 [15–16] 考虑了有两条相互冲突的单向车流的交叉口的最优信号控制问题, 本文中方法的思想与其方法的思想相似. 在文献 [15–16] 中: 首先, 确定某一性能指标, 并求解最小化性能指标的周期解; 然后, 求解给定初始条件下达到周期解的最优切换时刻. 在 $n = 2$ 的情况下, 本文考虑的周期解在文献 [15–16] 中考虑的性能指标下不一定是最佳的, 依赖于性能指标的选取及系统参数的确定, 更加详细的讨论可参考文献 [8]. 然而, 当 $n > 2$ 时, 最小化某一性能指标的最优周期解的求解及解析构造将会很复杂. 在车辆到达率及饱和流率已知的情况下, 本文中周期解的全部信息都可获得, 且该周期解在交通中具有明显的物理意义, 即周期内到达的车辆数与周期内驶离的车辆数恰好相等. 因此, 本文将该周期解作为控制目标, 通过设计信号灯状态反馈控制 (服务器“带服务时间上限的固定顺序切换”服务策略), 使得任意初始条件下的系统的解收敛到最终的周期解. 由文中交叉口信号配时的建模方法及信号控制策略的设计, 本文中方法可应用于具有多相位 ($n > 2$) 设置的信号交叉口.

4 结论 (Conclusions)

本文首先推广了切换服务系统服务器“固定顺序清空切换”服务策略, 提出了服务器“带服务时间上限的固定顺序切换”服务策略, 并给出了切换服务系统周期稳定性的判定条件. 其次, 将该服务策略应用于交叉口信号配时. 本文中方法可应用于具有多相位 ($n \geq 2$) 设置的交叉口. 交叉口信号配时通常要考虑最短绿时约束, 服务器“带服务时间上限的固定顺序切换”服务策略只考虑了服务时间上限约束, 进一步的研究工作将针对同时考虑最短和最长服务时间约束下, 切换服务系统的稳定性问题.

由于车辆到达率为常值的假定, 本文中方法是针对离线情况下交叉口信号控制策略的设计与分析. 本文期望得到离线情况下系统的最优动态性能, 例如, 定理 1 和定理 2 中全局渐进稳定的周期解. 如果考

虑在线情况, 车辆到达具有随机性且受外界一些不确定性因素的干扰, 车辆到达率通常不是常值. 因此, 达不到离线情况下系统的最优动态性能. 此时, 可进一步应用控制理论中反馈的思想在线调节实时交通, 使得与系统的最优性能偏差逐渐减小. 例如, 在文献[17–18]中所报告的交通控制系统(traffic-responsive urban control, TUC), 其预先假定交通系统存在一个最优状态, 该最优状态可通过离线方式确定, 应用线性二次最优控制理论设计状态反馈, 实时调节交通. 借助于文献[17–18]中的思想, 进一步的研究工作将针对在线情况下实时交通的调节.

参考文献(References):

- [1] MATVEEV A S, SAVKIN A V. *Qualitative Theory of Hybrid Dynamical Systems* [M]. Boston: Birkhäuser, 2000: 13 – 38.
- [2] PERKINS J R, KUMAR P R. Stable, distributed, real-time scheduling of flexible manufacturing/assembly/disassembly systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, 34(2): 139 – 148.
- [3] PERKINS J R, HUMES C J, KUMAR P R. Distributed scheduling of flexible manufacturing systems: stability and performance [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1994, 10(2): 133 – 141.
- [4] 陈阳舟, 李宏峰, 倪金. T形交叉口信号配时的周期线性微分自动机建模与分析 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(12): 1773 – 1778. (CHEN Yangzhou, LI Hongfeng, NI Jin. Modeling and analysis of cyclic linear differential automata for T-intersection signal timing [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(12): 1773 – 1778.)
- [5] SAVKIN A V, MATVEEV A S. Cyclic linear differential automata: a simple class of hybrid dynamical systems [J]. *Automatica*, 2000, 36(5): 727 – 734.
- [6] SAVKIN A V, MATVEEV A S. A switched server system of order n with all its trajectories converging to $(n - 1)!$ limit cycles [J]. *Automatica*, 2001, 37(2): 303 – 306.
- [7] LEFEBER E, LAMMER S, ROODA J E. Optimal control of a deterministic multiclass queuing system for which several queues can be served simultaneously [J]. *Systems & Control Letters*, 2011, 60(7): 524 – 529.
- [8] LEFEBER E, ROODA J E. Controller design for switched linear systems with setups [J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2006, 363(1): 48 – 61.
- [9] LI Z G, SOH Y, WEN C Y. *Switched and Impulsive Systems: Analysis, Design, and Applications* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2005: 155 – 160.
- [10] SAVKIN A V. Regularizability of complex switched server queuing networks modelled as hybrid dynamical systems [J]. *Systems & Control Letters*, 1998, 35(5): 291 – 299.
- [11] SAVKIN A V, SOMLO J. Optimal distributed real-time scheduling of flexible manufacturing networks modeled as hybrid dynamical systems [J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2009, 25(3): 597 – 609.
- [12] ZHAO X H, CHEN Y Z. Traffic light control method for a single intersection based on hybrid systems [C] // *Proceedings of the 2003 IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems*. New York: IEEE, 2003: 1105 – 1109.
- [13] 全永燊. 城市交通控制 [M]. 北京: 人民交通出版社, 1989: 95 – 102. (QUAN Yongshen. *Urban Traffic Control* [M]. Beijing: China Communications Press, 1989: 95 – 102.)
- [14] GARBER N J, HOEL L A. *Traffic and Highway Engineering* [M]. 4th edition. Toronto: Cengage Learning, 2009: 355 – 357.
- [15] HADDAD J, DE SCHUTTER B, MAHALEL D, et al. Steady-state and N -stages control for isolated controlled intersections [C] // *Proceedings of the 2009 American Control Conference*. New York: IEEE, 2009: 2843 – 2848.
- [16] HADDAD J, DE SCHUTTER B, MAHALEL D, et al. Optimal steady-state control for isolated traffic intersections [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(11): 2612 – 2617.
- [17] DIAKAKI C, PAPAGEORGIU M, ABOUDOLAS K. A multi-variable regulator approach to traffic-responsive network-wide signal control [J]. *Control Engineering Practice*, 2002, 10(2): 183 – 195.
- [18] ABOUDOLAS K, PAPAGEORGIU M, KOSMATOPOULOS E. Store-and-forward based methods for the signal control problem in large-scale congested urban road networks [J]. *Transportation Research, Part C: Emerging Technologies*, 2009, 17(2): 163 – 174.

作者简介:

何忠贺 (1982–), 男, 博士研究生, 研究方向为混杂动态系统稳定性及控制、智能交通系统控制, E-mail: hezhonghe@emails.bjut.edu.cn;

陈阳舟 (1963–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为混杂动态系统与离散事件动态系统、智能交通系统、多车系统协作控制等, E-mail: yzchen@bjut.edu.cn;

石建军 (1962–), 男, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为交通运输规划与管理、交通信息工程与控制, E-mail: jjshi@bjut.edu.cn.