第 29 卷第 12 期
2012 年 12 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 29 No. 12
Dec. 2012

文章编号: 1000−8152(2012)12−1629−04

一类齐次离散双线性系统可控性分析

沈进中[1], 邓留保[1,2]

(1. 南京理工大学 理学院, 江苏 南京 210094; 2. 安徽财经大学 统计与应用数学学院, 安徽 蚌埠 233030)

摘要: 在系统分析中, 可控性是系统的一个重要特性. 在工程实际操作中, 往往需要对一个连续系统进行离散化处理, 人们希望系统在离散化后能保留原系统的重要系统特征, 比如可控性. 对于线性系统, 我们有成熟的判断方法. 然而, 对于非线性系统则无统一的判别方法. Elliott在2005年给出了一个二阶双线性系统经过离散化后, 可控性发生变化的例子. 它表明一个系统在离散化前后, 它的可控性可能会发生改变. 本文旨在给出一类二阶离散化双线性系统可控性充分条件, 并和已有结果作比较, 表明本文结果更具有一般性. 另外, 本文对于3阶及以上的这类系统可控性做出了不可控的判断.

关键词: 可控性; 双线性系统; Euler离散化; 子流形

中图分类号: O231　　　**文献标识码**: A

Controllability of a class of homogeneous discrete-time bilinear systems

SHEN Jin-zhong[1], DENG Liu-bao[1,2]

(1. Department of Applied Mathematics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China;
2. School of Statistics and Applied Mathematics, Anhui University of Financial and Economics, Bengbu Anhui, 233030, China)

Abstract: In the system analysis, controllability is an important feature of the system. In engineering practice, it is often required to discretize a continuous system. It is hoped the system after discretization to preserve important characteristics of the original system, such as controllability. For linear systems, we have a mature judgment method. However, for nonlinear systems there is no general determination method. Elliott, in 2005, gave a second-order bilinear system for which the controllability is changed after discretization. It shows that a system before and after discretization may have different controllability. We give a sufficient condition for the controllability of a class of second-order discrete bilinear system, and prove that it is more general than other existing results. Besides, we affirm that this kind of systems with orders higher than two is not controllable.

Key words: controllability; bilinear systems; Euler discretization; submanifold

1 引言(Introduction)

双线性系统是一种形式上最简单并且最接近于线性系统的一类非线性系统. 由于它的特殊结构, 使其在系统的可控制性、最优化等方面有着明显的优越性. 它可以用来描述工业生产、生态、生物、社会经济等过程[1–6]. 众所周知, 系统可控性研究的问题就是如何使系统在一定的约束条件下从一种状态转移到期望的某种状态, 因此可控性是系统的重要的本质属性之一. 对于离散或连续时不变线性系统, 通过计算矩阵的秩便可判断系统是否可控, 因此连续时不变线性系统在离散化前后的可控性可以很容易判断出来. 但是对于非线性系统而言, 判断系统是否可控却没有一个统一的判据. 因此常常就一类非线性系统进行研究, 对于双线性系统同样如此. 关于双线性系统可控性的研究在20世纪70年代就已经开始[7–14], 主要是对连续双线性系统进行分析, 所采用的工具主要是微分几何和李代数, 获得了许多重要的判别连续双线性系统可控性结果. 但是, 对于离散双线性系统, 所得到的可控性研究结果较少.

Elliott[15]在2005年给出了一个二阶连续双线性系统在经过Euler离散化后得到的离散系统的可控性与原来系统可控性不一致的反例. 为了更进一步研究这类双线性系统的可控性, 现考虑如下形式的齐次双线性系统:

$$\dot{x} = u(t)Bx,\ x(0) = \xi, \tag{1}$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$是状态向量, $u \in \mathbb{R}$是输入, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\xi \in \mathbb{R}^n_*(\mathbb{R}^n_* = \mathbb{R}^n - \{0\})$是初始状态. 系统(1)通过Euler离散化得

$$\begin{aligned} &x(k+1) = (I + v(k)B)x(k),\ x(0) = \xi, \quad (2)\\ &v(k) = \tau u(k),\ k = 0, 1, \cdots, \end{aligned}$$

其中τ是步长. 文献[15]所给出的反例是系统(1)取

收稿日期: 2012−04−18; 收修改稿日期: 2012−06−22.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71171001).

$$B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

时的情形. 此时原来的连续双线性系统不可控, 但经Euler离散化后是可控的. 一般来说, 给出一个二阶或二阶以上的反例并不容易, 主要是没有处理离散双线性系统可控性的通用方法. 在已有文献的结果里[13–14], 对这类双线性系统的可控性无法做出判断. 最近国内学者铁林等[16]对这类系统作了研究, 就一种特殊形式的矩阵B给出了可控性的充分条件. 本文在此基础上, 对已有结果作了进一步的推广, 使得对于更加广泛的一类矩阵B, 系统(1)经Euler离散化后可控, 但原来系统(1)并不可控, 另外本文还证明了当系统(1)阶数大于或等于3时, 可控性反例不存在.

2 基本概念和引理(Basic concepts and lemmas)

定义 1[14] 系统(2)是可控的当且仅当对任意的$\xi,\ \eta\in\mathbb{R}_*^n$存在一个非负整数$l$和一个有限控制序列$v(k)(k=0,1,\cdots,l)$, 使得$\xi$被转移到$\eta$.

引理 1[15] 系统$x(k+1)=f(x(k),u(k))$在一个连通的子流形$S\subset\mathbb{R}^n$上可控当且仅当对任一初始值$\xi\in S$, 存在ξ的一个可达邻域$N(\xi)\subset S$.

引理 2[14] 设P是一个n阶可逆矩阵, a是一个非零实数, 那么系统

$$x(k+1)=(I+av(k)P^{-1}BP)x(k) \tag{3}$$

可控当且仅当系统(2)是可控的.

证 $\forall\xi,\eta\in\mathbb{R}_*^n$, 由于$P$可逆, 那么$P\xi,P\eta\in\mathbb{R}_*^n$. 假设系统(2)是可控, 则$P\xi$通过系统(2)被转移到$P\eta$, 即存在一个有限控制序列$v(0),v(1),\cdots,v(l)$使得

$$P\eta=[\prod_{k=0}^{l}(I+v(k)B)]P\xi,$$

那么

$$\eta=\left[\prod_{k=0}^{l}(I+a\frac{v(k)}{a}P^{-1}BP)\right]\xi,$$

这表明系统(3)是可控的. 反之, 若系统(3)可控, $\forall\xi,\eta\in\mathbb{R}_*^n$, 则$P^{-1}\xi,P^{-1}\eta\in\mathbb{R}_*^n$. 由于假设系统(3)可控, 那么存在一个有限控制序列$v(0),v(1),\cdots,v(l)$使得

$$P^{-1}\eta=[\prod_{k=0}^{l}(I+av(k)P^{-1}BP)]P^{-1}\xi$$

易得

$$\eta=[\prod_{k=0}^{l}(I+av(k)B)]\xi,$$

显然系统(2)可控.

引理 3 设$f(x)$是$\mathbb{R}$上的连续函数, 则集合$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y-f(x)>0\}$是$\mathbb{R}^2$中开集.

证 只需从开集定义出发来证明, 在此不累述. 也可参考文献[17].

3 主要结果(Main results)

定理 1 对于二阶离散双线性系统(2), 如果B有如下形式:

$$B=\begin{bmatrix}-1+\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & -1+\cos\theta\end{bmatrix},$$

其中$\theta\in(0,\pi)\cup(-\pi,0)$, 则系统(2)是可控的.

证 先构造$\xi_1=(1,0)^{\mathrm{T}}$的一个可达邻域. 考虑方程组

$$(I+t_1B)(I+t_2B)\xi_1=(I+B)(\xi_1+x), \tag{4}$$

这里$x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2$. 从式(4)可得

$$\begin{bmatrix}1-t_1+t_1\cos\theta & -t_1\sin\theta\\ t_1\sin\theta & 1-t_1+t_1\cos\theta\end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix}1-t_2+t_2\cos\theta\\ t_2\sin\theta\end{bmatrix}= \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

进一步推得

$$\begin{cases}1+(t_1+t_2)(-1+\cos\theta)+\\ t_1t_2(2\cos^2\theta-2\cos\theta)=\\ (1+x_1)\cos\theta-x_2\sin\theta,\\ (t_1+t_2)\sin\theta+t_1t_2(-2\sin\theta+\\ 2\sin\theta\cos\theta)=\\ (1+x_1)\sin\theta+x_2\cos\theta.\end{cases} \tag{5}$$

从式(5)可得

$$\begin{cases}t_1+t_2=1+\dfrac{x_2}{\sin\theta},\\ t_1t_2=-\dfrac{1}{2}(\dfrac{x_1}{1-\cos\theta}-\dfrac{x_2}{\sin\theta}),\end{cases} \tag{6}$$

因此很容易求得t_1,t_2:

$$t_{1,2}=\frac{x_2+\sin\theta}{2\sin\theta}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_2^2}{\sin^2\theta}+\frac{2x_1}{1-\cos\theta}+1}. \tag{7}$$

由此可知, 使关于t_1,t_2的方程(4)有解的x取值范围为

$$\{x=(x_1,x_2)\mid\frac{x_2^2}{\sin^2\theta}+\frac{2x_1}{1-\cos\theta}+1\geqslant0\}. \tag{8}$$

记

$$D=\{P\xi_1+Px|\frac{x_2^2}{\sin^2\theta}+\frac{2x_1}{1-\cos\theta}+1>0\},$$

根据引理3可知D是开集. 显然, D中任一点是ξ_1的

可达状态, 如图1虚线部分.

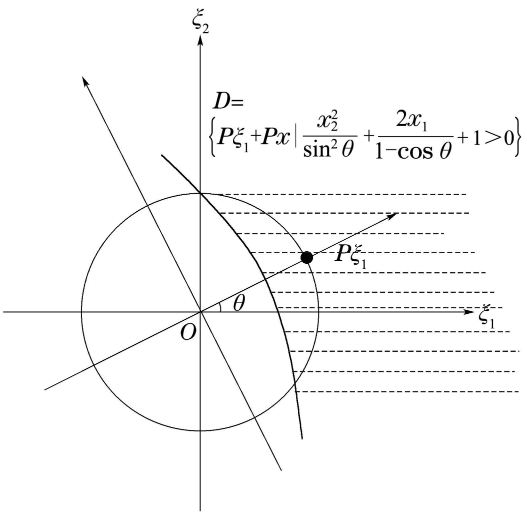

图 1 ξ_1的可达区域

Fig. 1 The attainable region of ξ_1

不难看出 $P\xi_1$ 是D的内点, 因此存在$P\xi_1$的邻域$B(P\xi_1,\varepsilon)\subset D$, 那么$\exists\,\bar\eta=(\cos\beta,\sin\beta)^{\mathrm T}=Q\xi_1\in B(P\xi_1,\varepsilon)$, 其中$\beta=\dfrac{p}{q}\pi\in(0,\pi)\cup(-\pi,0)$, $p,q\in\mathbb N$,

$$Q=\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}.$$

这时: $\exists\bar t_1,\bar t_2\in\mathbb R$, s.t. $(I+\bar t_1B)(I+\bar t_2B)\xi_1=\bar\eta$, $\forall\,y\in\mathbb R^2_*$, 可将其写成极坐标的形式:

$$y=r(\cos\theta_1,\sin\theta_1)=rQ_1\xi_1,$$
$$Q_1=\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{bmatrix},$$

那么

$$\begin{aligned}&(I+\bar t_1B)(I+\bar t_2B)y=\\&(I+\bar t_1B)(I+\bar t_2B)rQ_1\xi_1=\\&rQ_1(I+\bar t_1B)(I+\bar t_2B)\xi_1=\\&rQ_1\bar\eta=rQ_1Q\xi_1=Qy,\end{aligned}$$

于是得到$(I+\bar t_1B)(I+\bar t_2B)=Q$, 显然此时$(\bar t_1,\bar t_2)\neq(0,0)$. 不失一般性, 设$\bar t_1\neq0$. 注意到此时$Q^{2q}=I$成立. 令

$$v(0)=v(2)=\cdots=v(2q-2)=\bar t_1,$$
$$v(1)=v(3)=\cdots=v(2q-1)=\bar t_2,$$

则

$$\forall\,\eta\in\mathbb R^2_*,\ [\prod_{k=0}^{2q-1}(I+v(k)B)]\eta=\eta.$$

构造向量值函数

$$\begin{aligned}&F(t_1,t_2,y)=\\&(I+t_1B)(I+t_2B)\eta-(I+\bar t_1B)(\eta+y),\end{aligned}$$

这里: $\eta=(\eta_1,\eta_2)^{\mathrm T}\in\mathbb R^2_*$, $y=(y_1,y_2)^{\mathrm T}\in\mathbb R^2$,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F(t_1,t_2,y)}{\partial(t_1,t_2)}=\\&|B(I+t_2B)\eta,B(I+t_1B)\eta|=\\&2(1-\cos\theta)(t_1-t_2)|\eta,B\eta|=\\&2(1-\cos\theta)(t_1-t_2)(\eta_1^2+\eta_2^2)\sin\theta.\end{aligned}$$

显然

$$\frac{\partial F(t_1,t_2,y_1,y_2)}{\partial(t_1,t_2)}|_{(\bar t_1,0,0,0)}\neq0,$$

并且$F(\bar t_1,0,0,0)=0$. 根据隐函数定理可知: 存在$\mathbf 0=(0,0)^{\mathrm T}$一个邻域$B(\mathbf 0,\delta)$, $\delta>0$, 使得$t_1=t_1(y)$, $t_2=t_2(y)$, $y\in B(\mathbf 0,\delta)$. 这时

$$\begin{aligned}&(I+t_1(y)B)(I+t_2(y)B)\eta=\\&(I+\bar t_1B)(\eta+y),\ \forall y\in B(\mathbf 0,\delta)\end{aligned}$$

成立, 这表明: 对于任意$\eta\in\mathbb R^2_*$, 总存在一个η的可达邻域$B(\eta,\delta)\subset\mathbb R^2_*$, 根据引理1, 可知系统(2)可控.

定理 2　在系统(2)中, 若B有一对共轭复特征值$\lambda\pm\mathrm i\mu(\lambda\neq0,\mu>0)$, 则系统(2)是可控的.

证　由已知条件可知, B实相似于

$$Q=\begin{bmatrix}\lambda & -\mu\\ \mu & \lambda\end{bmatrix},$$

即存在可逆矩阵$P\in\mathbb R^{2\times2}$, 使得

$$P^{-1}BP=\begin{bmatrix}\lambda & -\mu\\ \mu & \lambda\end{bmatrix}.$$

令$\alpha=\arcsin\dfrac{\mu}{\rho}$, $\rho=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$, 显然$\alpha\in(0,\pi)\backslash\{\dfrac{\pi}{2}\}$, 那么

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\lambda & -\mu\\ \mu & \lambda\end{bmatrix}=\\&\frac{-\rho}{2\cos\alpha}\begin{bmatrix}-1+\cos(2\alpha-\pi) & -\sin(2\alpha-\pi)\\ \sin(2\alpha-\pi) & -1+\cos(2\alpha-\pi)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

记

$$\bar B=\begin{bmatrix}-1+\cos(2\alpha-\pi) & -\sin(2\alpha-\pi)\\ \sin(2\alpha-\pi) & -1+\cos(2\alpha-\pi)\end{bmatrix}.$$

根据定理1, 可知系统

$$x(k+1)=(I+\frac{-\rho}{2\cos\alpha}v(k)\bar B)x(k),\ k=0,1,\cdots$$

是可控的. 再根据引理2, 便得到系统(2)是可控的.

证毕.

注 1　对于定理1和定理2的结论, 在文献[16]中也有类似结果, 但是在文献[16]中要求B的θ取值是$\theta=\dfrac{p}{q}\pi\in(0,\pi)$, $p,q\in\mathbb N$的形式, 即θ是一个有理数与π的形式, 而在本文中并不要求这样, 仅要求$\theta\in(0,\pi)\cup(-\pi,0)$, $p,q\in\mathbb N$

的形式即可.

注 2 在系统(2)中, 若B的特征根是实数或纯虚数时, 则B相似于下列3种形式矩阵之一:

$$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}(\lambda,\mu\in\mathbb{R}),\ \begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}(\lambda\in\mathbb{R}),\ \begin{bmatrix}0 & -\mu\\ \mu & 0\end{bmatrix}(\mu\neq 0).$$

对于前两种情形, 只需取初始状态$\xi=(\xi_1,0)^{\mathrm{T}}$, 则通过系统(2)得到的终端状态一定是$(\eta_1,0)$的形式, 由此可见系统(2)不可控. 对于第3种情形, 实质是定理2中$\lambda=0$, 这时系统(2)是不可控的，因为

$$\|\ (I+v(k)\begin{bmatrix}0 & \mu\\ -\mu & 0\end{bmatrix})x(k)\ \|_2=$$
$$\sqrt{1+v(k)^2\mu^2}\ \|\ x(k)\ \|_2\geqslant\|\ x(k)\ \|_2,$$

可见这时系统不可能把一个初始状态转移到比它的模长(2–范数)更小的状态.

注 3 在文献[15]中, B的特征值为$-\dfrac{1}{2}\pm\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 根据定理2, 系统(2)可控.

定理 3 如果系统(2)阶数$n\geqslant 3$, 那么系统(1)–(2)都是不可控的.

证 根据文献[9]知, 系统(1)对于任何阶数都是不可控的. 由经典矩阵分析可知, B实相似于以下分块上三角矩阵:

$$\bar{B}=\begin{bmatrix}A_1 & & & & & *\\ & \ddots & & & & \\ & & A_s & & & \\ & & & c_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & c_{n-2s}\end{bmatrix},$$

其中: A_j有两个共轭复特征值$a_j\pm\mathrm{i}b_j(\mathrm{i}=\sqrt{-1})$, $j=1,\cdots,s$, $c_1,\cdots,c_{n-2s}\in\mathbb{R}$. 根据引理2, 只需考察系统

$$x(k+1)=(I+av(k)\bar{B})x(k),\ k=0,1,\cdots \quad (9)$$

可控性即可. 任取形如$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-2},0,0)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n_*$的$\xi$作为初始状态, 经简单计算可知, ξ不可能被转移到形如$\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-1},\eta_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n_*$且满足$\eta_n\neq 0$的状态$\eta$, 显然式(9)不可控, 从而系统(2)也是不可控的.

4 结论(Conclusion)

通过对一类二阶齐次离散双线性系统的的可控性问题的研究, 获得了判断这类系统可控性的充分条件, 加深了对Elliott[15]所提出的可控性反例的认识, 弄清了这个反例的本质. 本文所得出的结果与文献[16]作了对比, 显示本文结果更具有一般性, 因而应用起来也更加方便. 在文章最后还给出了关于这类高阶(阶数大于2)连续系统经过Euler离散化之后, 对应的离散系统仍然不可控的结论, 这也表明这类系统的可控性反例并不存在. 但对这类系统仍有一些问题尚需进一步研究.

参考文献(References):

[1] MOHLER R R. *Bilinear Control Processes* [M]. New York: Academic, 1973.

[2] MOHLER R R. *Nonlinear Systems: Application to Bilinear Control* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991.

[3] RUBERTI A, ISIDORI A, D' ALESSANDRO P. *Theory of Bilinear Dynamical Systems* [M]. New York: Springer, 1972.

[4] MOHLER R R, KOLODZIEJ W J. An overview of stochastic bilinear control process [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1980, 10(10): 683 – 688.

[5] GRAY W S, MESKO J. Energy function and algebraic Gramians for bilinear systems [C] //*The 4th IFAC Nonlinear Control Design Symposium*. [S.l.]: [s.n.], 1998: 103 – 108.

[6] AGANOVIC Z. *Optimal Reduced-order Control of Singularly Perturbed and Weakly Coupled Bilinear Systems* [M]. New Brunswick, New Jersey: Rutgers The State University of New Jersey, 1993.

[7] RINK R E, MOHLER R R. Completely controllable bilinear systems [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1968, 6(3): 477 – 486.

[8] KODITSCHEK D E, NARENDRA K S. The controllability of planar bilinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1985, 30(1): 87 – 89.

[9] PIECHOTTKA U, FRANK P M. Controllability of bilinear systems [J]. *Automatica*, 1992, 28(5): 1043 – 1045.

[10] KUCERA J. On accessibility of bilinear systems [J]. *Czechoslovakian Mathematical Journal*, 1970, 17(1): 160 – 168.

[11] MERMANN R, KRENER A. Nonlinear controllability and observability [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, 22(5): 728 – 740.

[12] HAYNES G, HERMES H. Nonlinear controllability via lie theory [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1970, 8(4): 450 – 460.

[13] GOKA T, TARN T J, ZABORSZKY J. On the controllability of a class of discrete bilinear systems [J]. *Automatica*, 1973, 9(5): 615 – 622.

[14] TARN T J, ELLIOTT D L, GOKA T. Controllability of discrete bilinear systems with bounded control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1973, 18(3): 298 – 301.

[15] ELLIOTT D L. A controllability counterexample [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(6): 840 – 841.

[16] 铁林, 蔡开元, 林岩. 一类离散双线性系统可控性研究 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(5): 648 – 652.
(TIE Lin, CAI Kaiyuan, LIN Yan. Study on the controllability of a class of discrete-time bilinear systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(5): 648 – 652.)

[17] CECH E. *Topological Spaces* [M]. New York: John Wiley and Sons, 1966.

作者简介:

沈进中 (1985–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为最优控制理论、双线性系统理论, E-mail: jzshen009@163.com;

邓留保 (1961–), 男, 副教授, 博士研究生, 目前研究方向为最优控制理论与金融数学, E-mail: dengliubao@163.com.