

Delta算子时滞系统的可靠D-镇定

肖民卿^{1,2†}, 苏宏业¹, 徐巍华¹

(1. 浙江大学 智能系统与控制研究所, 浙江 杭州 310027; 2. 福建师范大学 数学与计算机科学学院, 福建 福州 350007)

摘要: 研究同时含有执行器故障和传感器故障的Delta算子时滞系统的鲁棒可靠D-镇定问题. 利用矩阵特征值理论和线性矩阵不等式方法, 给出了Delta算子时滞系统D-稳定的充分条件, 进而, 针对同时含有执行器故障和传感器故障的Delta算子范数有界参数不确定时滞系统, 设计鲁棒可靠D-镇定状态反馈控制器, 使得对于所有容许的不确定性、执行器故障和传感器故障, Delta算子闭环时滞系统的极点均落在复平面指定圆盘区域内. 最后, 通过数值算例验证了控制器设计方法的可行性和有效性.

关键词: D-稳定; D-镇定; Delta算子时滞系统; 可靠控制; 执行器故障; 传感器故障
中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Reliable D-stabilization for time-delay systems of Delta operator

XIAO Min-qing^{1,2†}, SU Hong-ye¹, XU Wei-hua¹

(1. Institute of Cyber-Systems and Control, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China;
2. School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian 350007, China)

Abstract: The robust reliable D-stabilization for linear uncertain time-delay systems of delta operator is studied. Based on matrix theory, a sufficient condition of D-stability for the uncertain time-delay system of delta operator is derived based on the linear matrix inequality (LMI) approach. A design method for the state-feedback robust reliable controller is developed for a class of uncertain time-delay systems of delta operator, which are with actuator failure and sensor failure. Using the controller, the poles of the closed-loop time-delay system of delta operator are displaced inside a specified disk on the complex plane for all admissible uncertainties and faults. A numerical example is provided to demonstrate the availability of the design method.

Key words: D-stability; D-stabilization; time-delay system of delta operator; reliable control; actuator failure; sensor failure

1 引言(Introduction)

自20世纪80年代以来, Delta算子方法和Delta算子系统各类控制问题成为了系统与控制领域研究的热点问题之一^[1-8]. Delta算子方法是一种不同于前向移位算子方法的新离散化方法, Delta算子定义为

$$\delta = \frac{q-1}{h},$$

其中: q 为前向移位算子, 即 $qx(k) = x(k+1)$, h 为采样周期. 相比于通常的前向移位算子离散化方法, Delta算子方法在计算机实现时具有更好的数字特性, 尤其在高速采样时, 这一优势更为明显. 此外, 在一些情况下, Delta算子描述的系统模型可以作为连续时间系统和离散时间系统的统一研究框架. 近年来, Delta算子系统控制问题研究已延伸至时滞系统. 文献[3]根据Delta域Lyapunov稳定性理论, 通过构造适当的Lyapunov-Krasovskii泛函, 得到Delta算子时

变时滞系统的时滞相关稳定性判据; 文献[4]研究了Delta算子时滞系统的时滞相关 H_∞ 滤波问题, 给出了滤波器存在的条件和设计方法, 得到的结果可以统一连续时间时滞系统和离散时间时滞系统的相应结论; 文献[5]研究了基于Delta算子的参数不确定切换系统的鲁棒 H_∞ 控制问题.

另一方面, 在Delta算子系统的D-稳定性分析和D-镇定控制方面也出现了较多的研究成果^[6-8], 但是这些工作是针对无时滞的系统进行的, 对于Delta算子时滞系统, 这方面研究尚未得到开展. 众所周知, 线性时不变系统的极点位置不仅决定着系统的稳定性, 同时影响着系统的暂态性能. D-稳定和D-镇定探讨的是系统极点位于复平面指定区域内的判定及控制问题^[9]. 由于时滞系统的特征方程比无时滞系统的特征方程复杂, 极点的求解或判定更加困难, 这给时滞系统的D-稳定和D-镇定问题

研究带来很大难度, 尽管如此, 在过去的20年中, 控制学界对于这一问题还是取得了不少进展^[10-12].

在工程实际系统中, 由于各种因素, 系统部件(如执行器、传感器)可能出现故障, 从而导致系统性能下降甚至系统崩溃. 为了防止这种现象的发生, 在系统设计过程中, 需要针对这些可能出现的故障, 设计可靠控制器, 确保控制系统在一定的故障情况下仍具有期望的性能^[13-14]. 对于Delta算子系统的可靠控制, 已取得一些研究成果, 如文献[2]研究了具有执行器故障和具有传感器故障的可靠 H_∞ 控制问题, 给出了Delta域界实引理, 在此基础上运用Riccati方程方法讨论了基于状态观测器的可靠控制; 文献[7]和文献[8]分别研究了具有执行器故障和传感器故障的Delta算子系统D-稳定鲁棒可靠控制问题.

本文将探讨Delta算子时滞系统的D-稳定和D-镇定问题, 给出Delta算子时滞系统D-稳定的判据, 进而, 针对同时含有执行器故障和传感器故障的Delta算子范数有界参数不确定时滞系统, 提出鲁棒可靠D-镇定控制器的设计方法. 对于系统部件故障来说, 连续故障模型^[14]比离散故障模型更真实地描述实际故障, 因此, 本文将基于连续故障模型讨论可靠控制问题.

这里给出本文中的一些记号: \mathbb{R}, \mathbb{C} 分别表示实数域和复数域; \mathbb{Z}^+ 表示正整数集; 对于Hermite矩阵 X 和 Y , $X \leq Y$ (或 $X < Y$)表示Hermite矩阵 $Y - X$ 是半正定(或正定)的; 上标“T”(或“H”)表示矩阵的转置(或共轭转置); $\|X\|$ 表示复矩阵 X 的2-范数; I 表示单位矩阵; 在对称矩阵中, “*”表示由对称性得到的块矩阵; $D(a, r)$ 表示复平面上以 $a + j0$ 为心, r 为半径的圆盘区域内部.

2 D-稳定性分析(Analysis of D-stability)

考虑Delta算子时滞系统

$$\delta x(k) = Ax(k) + A_1x(k-d), \quad (1)$$

其中: $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态, $d \in \mathbb{Z}^+$ 为时滞时间; $A, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为常数矩阵. 系统的采样周期为 h .

定义1 关于 z 的方程

$$|zI - A - (1 + hz)^{-d}A_1| = 0 \quad (2)$$

称为Delta算子时滞系统(1)的特征方程. 特征方程的根称为Delta算子时滞系统(1)的极点.

定理1 Delta算子时滞系统(1)渐近稳定的充分必要条件是其特征极点, 即特征方程(2)的根全部落在复平面上的圆盘区域 $D(-\frac{1}{h}, \frac{1}{h})$ 内. 因此, 也称 $D(-\frac{1}{h}, \frac{1}{h})$ 为Delta算子时滞系统(1)的稳定域.

证 由于 $\delta = \frac{q-1}{h}$, 系统(1)可写为

$$x(k+1) = (I + hA)x(k) + hA_1x(k-d). \quad (3)$$

因此, Delta算子时滞系统(1)渐近稳定等价于离散时间时滞系统(3)渐近稳定. 而离散时滞系统(3)渐近稳定的充分必要条件是其特征方程

$$|zI - (I + hA) - z^{-d}hA_1| = 0 \quad (4)$$

的根都在单位圆盘 $D(0, 1)$ 内^[12].

作变量替换 $v = \frac{z-1}{h}$, 则方程(4)变为

$$|vI - A - (1 + hv)^{-d}A_1| = 0. \quad (5)$$

易知, 方程(4)的根在圆盘 $D(0, 1)$ 内当且仅当式(5)的根在圆盘 $D(-\frac{1}{h}, \frac{1}{h})$ 内. 证毕.

注1 当 $A_1 = 0$ 时, 系统(1)为无时滞Delta算子线性定常系统

$$\delta x(k) = Ax(k), \quad (6)$$

此时, 方程(2)变为 $|zI - A| = 0$. 根据定理1, 系统(6)渐近稳定的一个充分必要条件是 $|zI - A| = 0$ 的根均落在圆盘区域 $D(-\frac{1}{h}, \frac{1}{h})$ 内, 这正是熟知的无时滞Delta算子线性定常系统稳定性判据^[1].

定义2 若 $D(a, r) \subset D(-\frac{1}{h}, \frac{1}{h})$, 且Delta算子时滞系统(1)的极点均落在圆盘区域 $D(a, r)$ 内, 则称Delta算子时滞系统(1)是 $D(a, r)$ -稳定(简称D-稳定的).

下文中, 均假定 $|a + \frac{1}{h}| < r$.

引理1 设 $D \in \mathbb{C}^{m \times n}$, Q 为 n 级正定Hermite矩阵, 则必有

$$\begin{bmatrix} 0 & D \\ D^H & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} DQ^{-1}D^H & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}.$$

定理2 如果存在正定矩阵 $P > 0$, $Q > 0$, 使

$$\begin{bmatrix} -r^2P & P(A - aI) & PA_1 \\ * & -P + Q & 0 \\ * & 0 & -\beta Q \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

其中 $\beta = (hr - |1 + ha|)^{2d}$, 则Delta算子时滞系统(1)是D-稳定的.

证 由于 $a \in \mathbb{R}$, 且 $|a + \frac{1}{h}| < r$, 可知 $|1 + ha| < hr$, 于是

$$\min_{w \in \mathbb{C}, |w| \geq 1} |1 + ha + hrw| = hr - |1 + ha|,$$

因而, 对任意满足 $|w| \geq 1$ 的复数 w , 都有

$$|1 + ha + hrw|^{2d} \geq \beta,$$

由式(7)知

$$\begin{bmatrix} -r^2P & P(A - aI) & PA_1 \\ * & -P + Q & 0 \\ * & 0 & -|1 + ha + hrw|^{2d}Q \end{bmatrix} < 0$$

对于任意满足 $|w| \geq 1$ 的复数 w 成立. 由Schur补引理, 上式等价于

$$\begin{bmatrix} -r^2P + \Gamma_1 & P(A - aI) \\ * & -P + Q \end{bmatrix} < 0,$$

其中 $\Gamma_1 = |1 + ha + hrw|^{-2d}PA_1Q^{-1}A_1^TP$. 为方便起见, 记 $\mathcal{A} = A - aI + (1 + ha + hrw)^{-d}A_1$, 则根据引理1可得

$$\begin{bmatrix} -r^2P & P\mathcal{A} \\ \mathcal{A}^HP & -P \end{bmatrix} < 0.$$

对于任意满足 $|w| \geq 1$ 的复数 w 成立. 于是, 由Schur补引理知, 对任意满足 $|w| \geq 1$ 的复数 w , 矩阵不等式

$$\mathcal{A}^HP\mathcal{A} - r^2P < 0 \quad (8)$$

成立. 从而

$$[P^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{r}\mathcal{A})P^{-\frac{1}{2}}]^H[P^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{r}\mathcal{A})P^{-\frac{1}{2}}] < I,$$

即 $\|P^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{r}\mathcal{A})P^{-\frac{1}{2}}\| < 1$, 由此可知, $P^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{r}\mathcal{A})P^{-\frac{1}{2}}$ 的谱半径小于1, 即 $P^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{r}\mathcal{A})P^{-\frac{1}{2}}$ 的特征值均落在 $D(0, 1)$ 内. 而 $\frac{1}{r}\mathcal{A}$ 相似于 $P^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{r}\mathcal{A})P^{-\frac{1}{2}}$, 它们具有完全相同的特征值, 因此, $\frac{1}{r}\mathcal{A}$ 的特征值均落在 $D(0, 1)$ 内. 这说明, 对任意满足 $|w| \geq 1$ 的复数 w 都有 $|wI - \frac{1}{r}\mathcal{A}| \neq 0$, 因此, 关于 w 的方程

$$|(a + rw)I - A - (1 + ha + hrw)^{-d}A_1| = 0 \quad (9)$$

的根都在 $D(0, 1)$ 内.

对式(9)作变量替换 $z = a + rw$, 可知关于 z 的方程 $|zI - A - (1 + hz)^{-d}A_1| = 0$ 的根都在 $D(a, r)$ 内. 所以, Delta算子时滞系统(1)是D-稳定的. 证毕.

特别地, 取 $a = -\frac{1}{h}$, $r = \frac{1}{h}$, 由定理2可得Delta算子时滞系统(1)的稳定性判据.

推论 1 如果存在正定矩阵 $P > 0$, $Q > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} -P & P(I + hA) & hPA_1 \\ * & -P + Q & 0 \\ * & 0 & -Q \end{bmatrix} < 0,$$

则Delta算子时滞系统(1)是渐近稳定的.

3 鲁棒可靠D-镇定(Robust reliable D-stabilization)

考虑Delta算子不确定时滞系统:

$$\delta x(k) = \bar{A}x(k) + \bar{A}_1x(k-d) + Bu(k), \quad (10)$$

其中: $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{Z}^+$, $u(k) \in \mathbb{R}^p$ 为控制输入,

$$\bar{A} = A + \Delta A, \quad \bar{A}_1 = A_1 + \Delta A_1, \quad (11)$$

A, A_1 为已知矩阵,

$$[\Delta A \quad \Delta A_1] = EF[G \quad G_1], \quad (12)$$

这里 F 为不确定矩阵, 满足 $F^TF \leq I$.

假定系统状态可量测, 采用状态反馈控制, 考虑系统可能存在的执行器和传感器故障, 基于连续故障模型^[14-15], 系统控制输入可表示为

$$u(k) = MKSx(k), \quad (13)$$

其中: K 为状态反馈控制增益矩阵, M, S 分别表示执行器故障矩阵和传感器故障矩阵:

$$M = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_p\}, \quad (14)$$

$$S = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_n\}, \quad (15)$$

在式(14)中, m_i 满足 $0 \leq m_{vi} \leq m_i \leq m_{ui}$, 其中 m_{vi}, m_{ui} 为已知常数, 且 $m_{ui} \geq 1, i = 1, 2, \dots, p$. 当 $m_i = 0$ 或 1 时, 表示第 i 个执行器完全失效或正常, 当 $m_{vi} < m_i < m_{ui}$, 且 $m_i \neq 1$ 时, 表示第 i 个执行器部分失效, 即第 i 个执行器输出信号偏离准确值. 在式(15)中, s_i 满足 $0 \leq s_{vi} \leq s_i \leq s_{ui}$, 其中 s_{vi}, s_{ui} 为已知常数, 且 $s_{ui} \geq 1, i = 1, 2, \dots, n$. s_i 取值反映传感器状况, 类似于 m_i , 不再赘述. 现给出记号:

$$\tilde{M} = \text{diag}\{m_{v1}, m_{v2}, \dots, m_{vp}\},$$

$$\hat{M} = \text{diag}\{m_{u1}, m_{u2}, \dots, m_{up}\},$$

$$\bar{M} = \frac{1}{2}(\hat{M} + \tilde{M}), \quad \tilde{M} = \frac{1}{2}(\hat{M} - \tilde{M}),$$

$$\check{S} = \text{diag}\{s_{v1}, s_{v2}, \dots, s_{vn}\},$$

$$\hat{S} = \text{diag}\{s_{u1}, s_{u2}, \dots, s_{un}\},$$

$$\bar{S} = \frac{1}{2}(\hat{S} + \check{S}), \quad J = \frac{1}{2}(\hat{S} - \check{S})\bar{S}^{-1},$$

易知, $M = \bar{M} + \tilde{M}H_1$, H_1 为满足 $H_1^TH_1 \leq I$ 的对角矩阵; $S = \bar{S} + \check{S}H_2J$, H_2 为满足 $H_2^TH_2 \leq I$ 的对角矩阵.

将考虑了执行器故障和传感器故障的控制输入式(13)代入式(10)中, 得到Delta算子闭环时滞系统

$$\delta x(k) = \tilde{A}x(k) + \bar{A}_1x(k-d), \quad (16)$$

其中 $\tilde{A} = \bar{A} + BMKS$.

本节要解决的问题是: 对于含有执行器和传感器故障的Delta算子不确定时滞系统(10), 给定圆盘 $D(a, r) \subset D(-\frac{1}{h}, \frac{1}{h})$, 以及执行器故障模型参数 \tilde{M}, \hat{M} , 传感器故障模型参数 \check{S}, \hat{S} , 寻找状态反馈控制律, 即式(13)中的 K , 使得对所有容许的系统参数不确定性以及执行器、传感器的所有可能故障, Delta算子闭环时滞系统(16)是D-稳定的, 称这样的控制律 K 为Delta算子不确定时滞系统(10)的鲁棒可靠D-镇定控制律.

为了进一步讨论的需要, 先介绍两个引理.

引理 2^[16] 给定适维实矩阵 Y, C 和 D , 其中 Y

为对称矩阵, 则矩阵不等式 $Y + CFD^T + DF^T C^T < 0$ 对所有满足 $F^T F \leq I$ 的矩阵 F 均成立的充分必要条件是, 存在实数 $\varepsilon > 0$, 使得 $Y + \varepsilon CC^T + \varepsilon^{-1} DD^T < 0$.

引理 3^[8] 给定适维实矩阵 Y, C 和 D , 其中 Y 是对称的, 如果存在对角矩阵 $U > 0$, 使得 $Y + CUC^T + DU^{-1}D^T < 0$, 则 $Y + CHD^T + DHC^T < 0$ 对所有满足 $H^T H \leq I$ 的对角矩阵 H 均成立.

现给出本节的主要结论.

定理 3 如果存在对称矩阵 $X > 0, Y > 0$, 对角矩阵 $U > 0, V > 0$, 以及矩阵 Z 和实数 $\varepsilon > 0, \gamma > 0$, 使得如下矩阵不等式成立:

$$\gamma V < X, \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ * & \Psi_3 \end{bmatrix} < 0, \quad (18)$$

其中:

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & A_1 Y & 0 & 0 \\ * & -X & 0 & X & XG^T \\ * & * & -\beta Y & 0 & YG_1^T \\ * & * & * & -Y & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix},$$

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} B\tilde{M}U & 0 & 0 & B\tilde{M}Z \\ 0 & Z^T & XJ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Psi_3 = \begin{bmatrix} -U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -U & 0 & Z \\ 0 & 0 & -V & 0 \\ 0 & Z^T & 0 & -\gamma X \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_1 = -r^2 X + \varepsilon EE^T,$$

$$\Gamma_2 = AX - aX + B\tilde{M}Z,$$

$$\beta = (hr - |1 + ha|)^{2d},$$

则含有执行器故障和传感器故障的 Δ 算子不确定时滞系统(10)存在鲁棒可靠 D -镇定控制器, 控制律为 $K = ZX^{-1}\bar{S}^{-1}$.

证 若定理条件成立, 记

$$\Psi_4 = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & A_1 Y & 0 & 0 & B\tilde{M}U & 0 \\ * & -X & 0 & X & XG^T & 0 & Z^T \\ * & * & -\beta Y & 0 & YG_1^T & 0 & 0 \\ * & * & * & -Y & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -U & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & -U \end{bmatrix},$$

$$\Xi_1 = [Z^T \bar{M}B^T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ Z^T],$$

$$\Phi_1 = [0 \ JX \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

则由式(18)和Schur补引理, 可得

$$\Psi_4 + \Xi_1^T \gamma^{-1} X^{-1} \Xi_1 + \Phi_1^T V^{-1} \Phi_1 < 0,$$

而 $\gamma V < X$, 即 $V < \gamma^{-1} X$, 有

$$\Psi_4 + \Xi_1^T X^{-1} V X^{-1} \Xi_1 + \Phi_1^T V^{-1} \Phi_1 < 0,$$

由引理3, 对所有满足 $H_2^T H_2 \leq I$ 的对角矩阵 H_2 ,

$$\Psi_4 + \Xi_1^T X^{-1} H_2 \Phi_1 + \Phi_1^T H_2 X^{-1} \Xi_1 < 0$$

均成立. 将 $Z = K\bar{S}X$ 代入上式, 由于 $S = \bar{S} + \bar{S}H_2J$, 又运用Schur补引理, 得到

$$\Psi_5 + \Xi_2^T U \Xi_2 + \Phi_2^T U^{-1} \Phi_2 < 0,$$

其中:

$$\Psi_5 = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_3 & A_1 Y & 0 & 0 \\ * & -X & 0 & X & XG^T \\ * & * & -\beta Y & 0 & YG_1^T \\ * & * & * & -Y & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_3 = AX - aX + B\tilde{M}K\bar{S}X,$$

$$\Xi_2 = [\tilde{M}B^T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$$\Phi_2 = [0 \ K\bar{S}X \ 0 \ 0 \ 0],$$

于是, 由引理3可知, 对所有满足 $H_1^T H_1 \leq I$ 的对角矩阵 H_1 , $\Psi_5 + \Xi_2^T H_1 \Phi_2 + \Phi_2^T H_1 \Xi_2 < 0$ 均成立. 注意到 $M = \bar{M} + \tilde{M}H_1$, 则

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_4 & A_1 Y & 0 & 0 \\ * & -X & 0 & X & XG^T \\ * & * & -\beta Y & 0 & YG_1^T \\ * & * & * & -Y & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0,$$

其中 $\Gamma_4 = AX - aX + B\tilde{M}K\bar{S}X$. 对上式运用Schur补引理和引理2可得,

$$\begin{bmatrix} -r^2 X & \tilde{A}X - aX & \bar{A}_1 Y \\ * & -X + XY^{-1}X & 0 \\ * & * & -\beta Y \end{bmatrix} < 0,$$

用 $\text{diag}\{X^{-1}, X^{-1}, Y^{-1}\}$ 分别左乘、右乘上式两边, 得到

$$\begin{bmatrix} -r^2 X^{-1} & X^{-1}(\tilde{A} - aI) & X^{-1}\bar{A}_1 \\ * & -X^{-1} + Y^{-1} & 0 \\ * & * & -\beta Y^{-1} \end{bmatrix} < 0,$$

于是, 由定理2可知, 对于所有容许的系统参数不确定性以及执行器、传感器的可能故障, Δ 算子闭环时滞系统(16)是鲁棒可靠 D -稳定的. 因此, $K = ZX^{-1}\bar{S}^{-1}$ 是 Δ 算子不确定时滞系统(10)的状态反馈鲁棒可靠 D -镇定控制律. 证毕.

定理3给出了Delta算子不确定时滞系统(10)鲁棒可靠D-镇定控制器的设计方法. 需要指出的是, 由于 γ 的存在, 式(17)–(18)不是线性矩阵不等式, 为了便于求解, 将 γ 视作自由参数, 对 γ 进行一维搜索, 可先取 $\gamma = 1$ (或某一小于1的正数), 求解线性矩阵不等式组式(17)–(18), 若无解, 则适当减小 γ 的取值再进行求解, 重复上述步骤, 直至求出线性矩阵不等式组(17)–(18)的可行解. 若 γ 已是很小的正数, 线性矩阵不等式组(17)–(18)仍无解, 则说明定理3给出的方法无法求得Delta算子不确定时滞系统(10)鲁棒可靠D-镇定控制器.

在过去的一些研究(如文献 [8, 15])中, γ 往往被取定为1(在文献 [1]中, V 也取定为 J), 这种做法具有更强的保守性, 在某些情况下甚至使得线性矩阵不等式组(17)–(18)无解. 例如, 当对角矩阵 J 有某个对角元 $j_i = 1$ (即 $s_{vi} = 0$)时, 如果取定 $\gamma = 1$, 则线性矩阵不等式组(17)–(18)一定无解. 这是因为, 一方面 $V < X$, 这说明对角矩阵 V 的第 i 个对角元 $v_i < x_{ii}$ (x_{ii} 为正定矩阵 X 的第 i 个对角元); 另一方面, 由式(18)知,

$$\begin{bmatrix} -X & XJ \\ JX & -V \end{bmatrix} < 0,$$

即 $JXJ < V$, 于是 $x_{ii} < v_i$, 产生矛盾. 因此, γ 不宜取定为1, 这正是本文引入自由参数 γ 的原因, 引入自由参数 γ , 减小了控制器设计算法的保守性.

根据定理3, 可以分别得到只含有执行器故障和只含有传感器故障的Delta算子不确定时滞系统(10)的鲁棒可靠D-镇定控制律设计算法.

若只考虑执行器故障 M , 则有如下结论:

推论 2 如果存在对称矩阵 $X > 0, Y > 0$, 对角矩阵 $U > 0$, 以及矩阵 Z 和实数 $\varepsilon > 0$, 使得如下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & A_1Y & 0 & 0 & B\tilde{M}U & 0 \\ * & -X & 0 & X & XG^T & 0 & Z^T \\ * & * & -\beta Y & 0 & YG_1^T & 0 & 0 \\ * & * & * & -Y & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -U & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & -U \end{bmatrix} < 0,$$

其中 $\Gamma_1, \Gamma_2, \beta$ 同定理3, 则含有执行器故障的Delta算子不确定时滞系统(10)存在鲁棒可靠D-镇定状态反馈控制器, 控制律为 $K = ZX^{-1}$.

若只考虑传感器故障 S , 则有如下结论:

推论 3 如果存在对称矩阵 $X > 0, Y > 0$, 对角矩阵 $V > 0$, 以及矩阵 Z 和实数 $\varepsilon > 0, \gamma > 0$, 使得如下矩阵不等式成立:

$$\gamma V < X, \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_5 & A_1Y & 0 & 0 & 0 & BZ \\ * & -X & 0 & X & XG^T & XJ & 0 \\ * & * & -\beta Y & 0 & YG_1^T & 0 & 0 \\ * & * & * & -Y & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -V & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & -\gamma X \end{bmatrix} < 0,$$

其中 Γ_1, β 同定理3, $\Gamma_5 = AX - aX + BZ$, 则含有传感器故障的Delta算子不确定时滞系统(10)存在鲁棒可靠D-镇定状态反馈控制器, 控制律为 $K = ZX^{-1}\bar{S}^{-1}$.

4 数值算例(Numeral example)

设Delta算子不确定时滞系统(10)的参数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -7.14 & -0.64 \\ -2.96 & 0.34 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -0.6 & 0 \\ -2.5 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1.3 \\ 0.8 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$G = [-1.1 \ 0.4], G_1 = [0.2 \ 0.1].$$

采样周期 $h = 0.1$, 时滞 $d = 2$. 利用MATLAB软件算出该系统的极点, 其中之一为0.8888, 这表明系统不是稳定的. 现假定系统执行器故障矩阵 $M = [m]$ 满足 $0.9 \leq m \leq 1.1$, 传感器故障矩阵 $S = \text{diag}\{s_1, s_2\}$ 满足

$$0.7 \leq s_1 \leq 1.3, 0.8 \leq s_2 \leq 1.2.$$

对于系统稳定域 $D(-10, 10)$ 内的圆盘区域 $D(-8, 8)$, 考虑Delta算子不确定时滞系统(10)的鲁棒可靠D-镇定问题.

根据上文提出的设计方法, 应用MATLAB的LMI工具箱进行求解. 当 $\gamma = 1$ (定理3中)时, 线性矩阵不等式组(17)(18)无解, 当 $\gamma = 0.75$ 时, 有可行解如下:

$$X = \begin{bmatrix} 0.3336 & 0.2789 \\ 0.2789 & 2.3831 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1.1397 & 9.2609 \\ 9.2609 & 109.5428 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.2691 & 0 \\ 0 & 2.2437 \end{bmatrix}, U = 157.2824,$$

$$Z = [-0.0450 \ -2.9177], \varepsilon = 36.4741,$$

因此, Delta算子不确定时滞系统(10)的鲁棒可靠D-镇定状态反馈控制律为 $K_r = [0.9852 \ -1.3396]$.

对不确定参数矩阵 F 、执行器故障矩阵 M 和传感器故障矩阵 S 的所有可容许取值, Delta算子闭环时滞系统(16)的极点分布如图1所示. 从图1可看

出, Delta算子闭环时滞系统(16)的极点都在圆盘区域 $D(-8, 8)$ 内, 因此Delta算子闭环时滞系统(16)是鲁棒可靠D-稳定的.

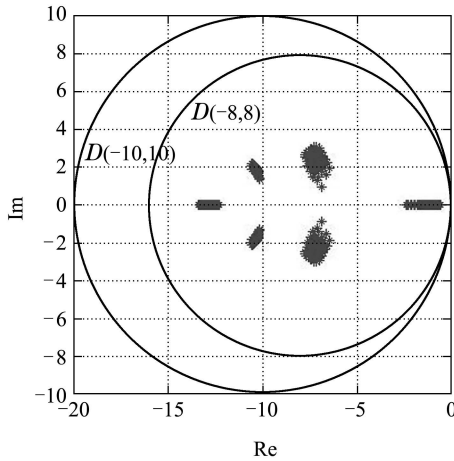


图1 所有容许不确定性和故障下的Delta算子闭环时滞系统极点分布

Fig. 1 Pole distribution of the uncertain Delta operator formulated closed-loop time-delay system

如果不考虑执行器和传感器故障, 采用控制律

$$K_w = [0.4528 \quad -0.7097],$$

Delta算子闭环时滞系统为

$$\delta x(k) = (A_w + \Delta A)x(k) + \bar{A}_1 x(k-2), \quad (19)$$

其中

$$A_w = \begin{bmatrix} -7.7286 & 0.2886 \\ -2.5978 & -0.2278 \end{bmatrix},$$

此系统极点分布如图2所示, 可以看出闭环系统是鲁棒D-稳定的. 但是当执行器和传感器发生故障, 例如

$$M = [0.9], \quad S = \text{diag}\{0.7, 0.8\}$$

时, 闭环系统(19)的状态矩阵 A_w 变为

$$\begin{bmatrix} -7.5108 & 0.0243 \\ -2.7318 & -0.0688 \end{bmatrix},$$

此时, 闭环系统的极点分布如图3所示, 有极点位于右半平面, 不在 $D(-8, 8)$ 中, 说明闭环系统不是稳定的. 设系统初态为

$$\begin{aligned} x(-2) &= (1, 1)^T, \\ x(-1) &= (0.8, 0.9)^T, \\ x(0) &= (0.6, 0.8)^T, \end{aligned}$$

图4给出当 $F = 0$ 时系统无故障和故障发生情况下的状态轨线, 分别为图4(a)和图4(b). 从图4中可以看出, 故障发生时, 状态 $x_2(t)$ 不会随时间增大趋近于零, 系统是不稳定的.

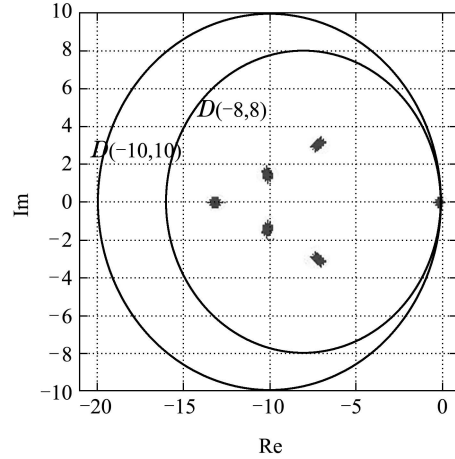


图2 Delta算子闭环时滞系统极点分布(无故障)

Fig. 2 Pole distribution of the closed-loop Delta operator time-delay system (without faults)

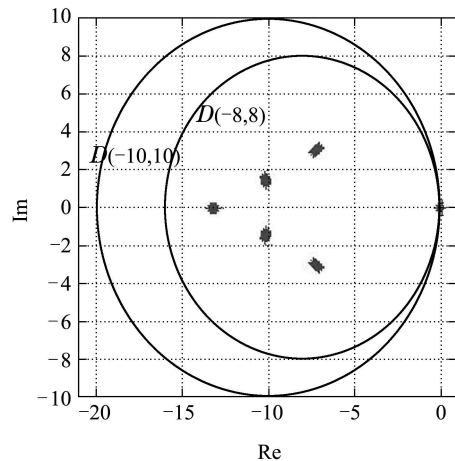


图3 Delta算子闭环时滞系统极点分布(有故障)

Fig. 3 Pole distribution of the closed-loop Delta operator time-delay system (with faults)

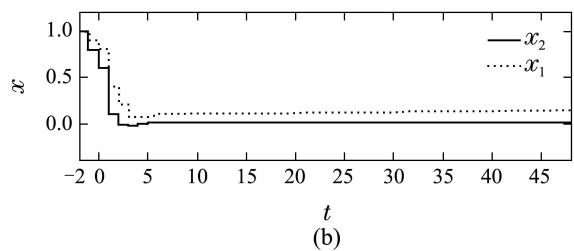
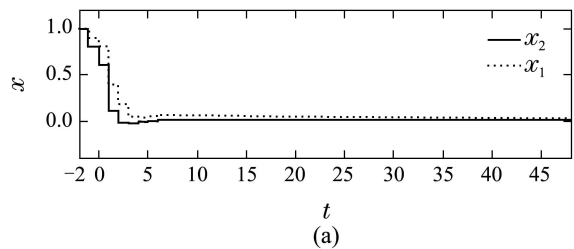


图4 控制律 K_w 下Delta算子闭环时滞系统状态轨线
Fig. 4 State trajectories of the closed-loop Delta operator time-delay system with control law K_w

而采用可靠D-稳定控制律

$$K_r = [0.9852 \quad -1.3396]$$

时, 在执行器故障 $M = [0.9]$, 且传感器故障 $S = \text{diag}\{0.7, 0.8\}$ 情况下, 闭环系统的状态轨线($F = 0$)如图5所示. 这表明采用可靠D-稳定控制器, 在容许的故障情形下, 闭环系统仍是D-稳定的.

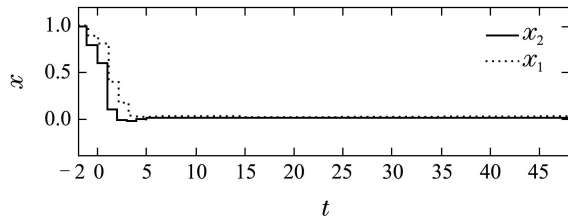


图 5 可靠控制律 K_r 下Delta算子闭环时滞系统状态轨线

Fig. 5 State trajectories of the closed-loop Delta operator time-delay system with reliable control law K_r

5 结论(Conclusions)

本文研究了Delta算子时滞系统的D-稳定性和鲁棒可靠D-镇定问题. 以线性矩阵不等式形式表达了Delta算子时滞系统D-稳定的一个充分条件. 在此基础上, 针对系统同时含有执行器故障和传感器故障情况, 基于连续故障模型, 给出了Delta算子范数有界参数不确定时滞系统鲁棒可靠D-镇定状态反馈控制器存在的条件, 以及控制器设计方法. 通过引入自由参数降低了求解的保守性. 所得结论可直接用于只含执行器故障和只含传感器故障的情形. 数值算例验证了设计方法的可行性和有效性.

参考文献(References):

- [1] MIDDETON R H, GOODWIN G C. Improved finite word length characteristics in digital control using delta operator [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, 31(11): 1015 – 1021.
- [2] SHOR M H, PERKINS W R. Reliable control in the presence of sensor/actuator failures: a unified discrete/continuous approach [C] // *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision & Control*. Brighton, England: IEEE, 1991: 1601 – 1606.
- [3] QIU J Q, XIA Y Q, YANG H J, et al. Robust stabilisation for a class of discrete-time systems with time-varying delays via delta operators [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2008, 2(1): 87 – 93.
- [4] YANG H J, XIA Y Q, QIU J Q, et al. Filtering for a class of discrete-time systems with time-delays via delta operator approach [J]. *International Journal of Systems Science*, 2010, 41(4): 423 – 433.
- [5] XIANG Z R, WANG R H. Robust H-infinity control for a class of uncertain switched systems using delta operator [J]. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2010, 32(3): 331 – 344.

- [6] 张端金, 吴捷, 杨成梧. Delta算子系统圆形区域极点配置的鲁棒性 [J]. *控制与决策*, 2001, 16(3): 337 – 340. (ZHANG Duanjin, WU Jie, YANG Chengwu. Robustness of pole assignment in a circular region for delta operator systems [J]. *Control and Decision*, 2001, 16(3): 337 – 340.)
- [7] 刘满, 井元伟, 张嗣瀛. Delta算子系统D稳定鲁棒容错控制 [J]. *东北大学学报(自然科学版)*, 2004, 25(8): 715 – 718. (LIU Man, JING Yuanwei, ZHANG Siying. D-stable robust fault-tolerant control for delta operator systems [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2004, 25(8): 715 – 718.)
- [8] 肖民卿. 传感器有故障的Delta算子线性不确定系统的鲁棒D-稳定 [J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(2): 183 – 185. (XIAO Mingqing. Reliable robust D-stabilization for delta operator systems with sensor failure [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(2): 183 – 185.)
- [9] FURUTA K, KIM S B. Pole assignment in a specified disk [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987, 32(5): 423 – 427.
- [10] LEE C H, LI T H, KUNG F C. D-stability analysis for discrete systems with a time delay [J]. *Systems & Control Letters*, 1992, 19(3): 213 – 219.
- [11] XU S Y, LAM J, ZHENG J. Robust D-stability analysis for uncertain discrete singular systems with state delay [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 2002, 49(4): 551 – 555.
- [12] MAO W J, CHU J. \mathcal{D} -stability and \mathcal{D} -stabilization of linear discrete time-delay systems with polytopic uncertainties [J]. *Automatica*, 2009, 45(3): 842 – 846.
- [13] VEILLETTE R J, MEDANIC J V, PERKINS W R. Design of reliable control systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 7(3): 290 – 304.
- [14] YANG G H, WANG J L, SOH Y C. Reliable controller design for linear systems [J]. *Automatica*, 2001, 37(5): 717 – 725.
- [15] 姚波, 张庆灵, 王福忠, 等. 具有传感器故障的可靠圆盘极点配置 [J]. *控制与决策*, 2004, 19(3): 346 – 348. (YAO Bo, ZHANG Qingling, WANG Fuzhong, et al. Reliable circular disk pole placement with sensor failures [J]. *Control and Decision*, 2004, 19(3): 346 – 348.)
- [16] XIE L H. Output feedback control of systems with parameter uncertainty [J]. *International Journal of Control*, 1996, 63(4): 741 – 750.

作者简介:

肖民卿 (1970–), 男, 副教授, 博士, 目前研究方向为鲁棒控制、Delta算子系统控制、网络控制系统等, E-mail: xxmmq@fjnu.edu.cn;

苏宏业 (1969–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为现代控制理论与应用、复杂工业过程先进控制和优化技术等, E-mail: hysu@csc.zju.edu.cn;

徐巍华 (1976–), 女, 副教授, 博士, 目前研究方向为网络控制系统、非脆弱鲁棒控制、数据挖掘等, E-mail: whxu@csc.zju.edu.cn.