

自回归滑动平均建模中观测噪声方差估计的新方法

熊少锋¹, 王可东^{1†}, 姜锐¹, 高悦²

(1. 北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100191; 2. 工业和信息化部电信规划研究院, 北京 100191)

摘要: 目前的自回归滑动平均(ARMA)建模方法由于只利用了观测数据的高阶自协方差构建Yule-Walker方程, 而没有利用观测数据的低阶自协方差信息, 导致观测噪声方差的估计精度不高, 并且在自回归(AR)阶次 p 小于或等于滑动平均(MA)阶次 q 时无法估计出观测噪声方差. 为此, 本文提出了一种单独估计观测噪声方差的新方法, 即先将ARMA模型近似为一高阶AR模型, 再构建从观测数据1阶自协方差开始的Yule-Walker方程. 由于充分利用了观测数据的统计信息, 有利于提高观测噪声方差的估计精度, 为后续的AR和MA参数估计精度的提高奠定了基础, 也解决了 p 小于或等于 q 时观测噪声方差无法估计的问题, 仿真和实验结果验证了该方法的有效性.

关键词: 自回归滑动平均; 自回归; 有色噪声; 白噪声; 时间序列

中图分类号: V241.62+2 **文献标识码:** A

A new measurement noise estimation method for autoregressive and moving average modeling

XIONG Shao-feng¹, WANG Ke-dong^{1†}, JIANG Rui¹, GAO Yue²

(1. School of Astronautics, Beihang University, Beijing 100191, China;

2. Telecommunication Planning Research Institute of MIIT, Beijing 100191, China)

Abstract: In the existing autoregressive and moving average (ARMA) modeling methods, only the higher-order measurement autocovariances are used to form the Yule-Walker equations, so that the estimation accuracy of measurement noise variance deteriorates due to the unemployment of low-order measurement autocovariances. Moreover, if the AR order p is not greater than the MA order q , the measurement noise variance cannot be estimated in the existing methods. To deal with this problem, we propose a method for estimating the measurement noise variance independently. In this method, the ARMA model is first approximated by a higher-order AR model; then, the Yule-Walker equations of measurement autocovariances are formed with orders starting from one. Because of the full use of statistical information, the estimation accuracy of the measurement noise variance is improved. This not only lays the foundation for improving the accuracy in estimating AR and MA parameters, but also solves the problem occurred when the AR order p is not greater than the MA order q . Simulation and experiment results validated the effectiveness of the method.

Key words: autoregressive and moving average; autoregressive; colored noise; white noise; time series

1 引言(Introduction)

在自回归滑动平均(autoregressive and moving average, ARMA)建模时, 一种常用的方法是将观测数据当作ARMA模型的状态序列^[1-3], 基于观测数据的自协方差构建Yule-Walker方程, 观测数据自协方差的延迟间隔从滑动平均(moving average, MA)部分的阶次加1开始. 但ARMA模型的状态序列总是和观测数据之间存在一定的偏差, 通常称为观测噪声, 即观测噪声总是客观存在的, 观测噪声会对Yule-Walker方程造成扰动, 使得模型参数估计精度不高, 特别是当模型阶次较高时更为突出. 因此, 在ARMA建模时考虑观测噪声的影响是提高建模精度的关键.

当自回归(autoregressive, AR)部分定阶正确时, 观测噪声为白噪声. 文献[4]用一个低通滤波器对观测数据进行预处理, 以消除噪声的影响, 但是这种方法对宽频白噪声的抑制效果不明显. 文献[5-6]提出重复计算观测数据自协方差(repeated ACF)的方法抑制观测噪声的影响, 由于自协方差的求解是有偏的, 若对自协方差反复迭代计算, 可能导致自协方差计算误差增大. 文献[7-8]通过求解Yule-Walker方程广义特征值的方法同时得到观测噪声方差和AR部分参数的估计值. 文献[5-8]存在两个共同问题: 1) 在估计观测噪声方差时, Yule-Walker方程的构建中观测数据自协方差的延迟间隔都是从AR部分阶次或者MA部分阶次加1开始, 更低阶次的并没有用到, 对

观测数据信息的利用不充分, 可能导致观测噪声方差的估计精度不高; 2) 当AR部分的阶次等于或者小于MA部分的阶次时, 基于MA部分阶次加1开始的自协方差构建Yule-Walker方程, 其中不含有观测噪声方差, 无法对观测噪声方差进行估计.

针对上述问题, 本文提出一种观测噪声方差估计的新方法, 先将ARMA模型等效为一个高阶的AR模型, 这样做有两个目的: 1) 由于AR模型不含有MA部分, 所以在构建关于观测数据自协方差的Yule-Walker方程时延迟间隔就可以从1开始, 由于最大限度地利用了观测数据的统计信息, 有利于提高观测噪声方差的估计精度; 2) 由于等效的AR模型中无MA部分, 因此, 即使原始ARMA模型的AR部分阶次小于或等于MA部分阶次, 在基于等效的AR模型构建观测数据自协方差的Yule-Walker方程中, 也一定存在待估计的观测噪声方差, 即仍然可以估计出观测噪声方差.

仿真和实验结果表明, 对于不同阶次的ARMA模型, 本算法能对观测噪声方差进行估计, 并且观测噪声方差的估计精度较现有算法得到了较大幅度提高, 也使得后续的AR和MA参数估计精度也得到了提高.

2 观测噪声方差估计方法(The method to estimate the observation noise variance)

ARMA建模要求观测数据符合平稳性和正态分布条件, 其中平稳性检验可采用轮次法, 正态性检验可采用峰度和偏度系数法, 若不满足要求可以做差分处理, 具体方法可参考文献[9].

假设观测数据已经符合平稳性和正态分布的要求, 本文采用文献[10-11]提出的定阶方法先确定ARMA(p, q)模型的阶次 p 和 q , 其优点是不需要预先计算模型参数.

然后, 再估计观测噪声方差. 设系统状态为 x , 系统观测输出为 y , 并设观测输出 y 是在系统状态 x 上叠加一个白噪声 v , x 符合ARMA(p, q)模型, 离散表达式如下:

$$x(k) + a_1x(k-1) + \dots + a_px(k-p) = e(k) + b_1e(k-1) + \dots + b_qe(k-q), \quad (1)$$

$$y(k) = x(k) + v(k), \quad (2)$$

其中: $e(k)$ 为零均值和方差为 σ_e^2 的系统状态白噪声, $v(k)$ 为零均值和方差为 σ_v^2 的系统观测白噪声, $e(k)$ 与 $v(k)$ 不相关.

$$\mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} \gamma_y(q+1) & \gamma_y(q) & \dots & \gamma_y(0) & \gamma_y(-1) & \dots & \gamma_y(q+1-p) \\ \gamma_y(q+2) & \gamma_y(q+1) & \dots & \gamma_y(1) & \gamma_y(0) & \dots & \gamma_y(q+2-p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_y(p+s) & \gamma_y(p+s-1) & \dots & \gamma_y(p+s-q-1) & \gamma_y(p+s-q-2) & \dots & \gamma_y(s) \end{pmatrix},$$

由随机过程理论可知一个平稳可逆的ARMA模型可等价为一个阶次无穷高的AR模型, 即ARMA(p, q) = AR(∞). 在实际中, 可以用阶次足够高的AR模型近似, 即

$$\text{ARMA}(p, q) \simeq \text{AR}(P), \quad (3)$$

其中 P 为等效的AR模型阶次. 设高阶的AR(P)模型离散表达式如下:

$$x(k) + \alpha_1x(k-1) + \dots + \alpha_Px(k-P) = e(k). \quad (4)$$

在式(4)两边同时乘以 $x(k-\tau)$ ($\tau = 1, 2, \dots, 2P$), 并求期望可得如下Yule-Walker方程:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

其中:

$$\boldsymbol{\eta} = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_P]^T, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \gamma_x(1) & \gamma_x(0) & \dots & \gamma_x(P-1) \\ \gamma_x(2) & \gamma_x(1) & \dots & \gamma_x(P-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_x(P) & \gamma_x(P-1) & \dots & \gamma_x(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_x(2P) & \gamma_x(2P-1) & \dots & \gamma_x(P) \end{pmatrix}.$$

因为 $e(k)$ 与 $v(k)$ 不相关, 所以 $x(k)$ 和 $v(k)$ 也不相关, 在式(2)两边乘以 $y(k-\tau)$ 并求期望得

$$\gamma_y(\tau) = \begin{cases} \gamma_x(\tau) + \sigma_v^2, & \tau = 0, \\ \gamma_x(\tau), & \tau \neq 0. \end{cases} \quad (6)$$

将式(6)代入式(5), 可得基于观测数据自协方差 $\gamma_y(\tau)$ 构建的Yule-Walker方程

$$(\mathbf{B} - \sigma_v^2\mathbf{E})\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

其中: $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{P \times P} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\mathbf{I}_{P \times P}$ 是 $P \times P$ 的单位矩阵,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \gamma_y(1) & \gamma_y(0) & \dots & \gamma_y(P-1) \\ \gamma_y(2) & \gamma_y(1) & \dots & \gamma_y(P-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_y(P) & \gamma_y(P-1) & \dots & \gamma_y(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_y(2P) & \gamma_y(2P-1) & \dots & \gamma_y(P) \end{pmatrix}.$$

文献[8]基于状态 x 的ARMA(p, q)模型构建Yule-Walker方程, 得下列方程:

$$(\mathbf{R}_y - \sigma_v^2\mathbf{G})\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (8)$$

其中

其中 s 为Yule-Walker方程组中控制方程式个数的变量. 对比 \mathbf{B} 和 \mathbf{R}_y 可知, \mathbf{B} 中包含了 $\gamma_y(1)$ 和 $\gamma_y(2)$ 等低阶观测数据自协方差, 因为低阶自协方差函数包含观测数据更丰富的信息, 所以式(7)比式(8)更有效地利用观测数据信息.

另外, 式(8)是以 $p > q$ 为前提条件构建的. 当 $p \leq q$ 时, 依照文献[7]的算法构建关于状态 x 自协方差的Yule-Walker方程如下:

$$\mathbf{R}_x \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

其中:

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} \gamma_x(q+1) & \gamma_x(q) & \cdots & \gamma_x(q+1-p) \\ \gamma_x(q+2) & \gamma_x(q+1) & \cdots & \gamma_x(q+2-p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_x(q+s) & \gamma_x(p+s-1) & \cdots & \gamma_x(q+s-p) \end{pmatrix}.$$

因为 $q \geq p$, 所以 $(q+1-p) \geq 1$, 这样在 \mathbf{R}_x 中不存在 $\gamma_x(0)$, 也即不能引入 $\gamma_x(0) = \gamma_y(0) - \sigma_v^2$. 因此无法构建类似于式(7)关于观测噪声方差 σ_v^2 的方程, 导致无法对 σ_v^2 进行估计. 而式(7)中, 由于等效的AR模型没有MA部分影响, 不存在式(8)中可能出现无法对观测噪声方差进行估计的情况, 适用性更好.

基于等价AR模型构建的Yule-Walker方程(7), 参考文献[8]对式(7)做线性化处理, 并通过QZ特征值分解求得特征值和对应的特征向量, 其中特征值矩阵对角线元素绝对值最小的即可近似为观测噪声方差 σ_v^2 的估计值 $\hat{\sigma}_v^2$.

在得到观测噪声方差的估计值 $\hat{\sigma}_v^2$ 之后, 可以参考文献[12]中提到的ARMA建模方法辨识出模型的AR参数和MA参数, 此处就不赘述.

3 仿真实验(Simulations)

仿真试验要达到如下几个目的:

1) 验证本文所提的观测噪声方差估计方法对不同阶次系统在不同观测噪声强度下估计观测噪声方差的适用性;

2) 验证本文所提观测噪声方差估计方法对后续AR参数和MA参数估计精度的提升效果;

3) 对比本文方法与文献[8]方法的性能;

4) 测试本方法在不同样本容量时的性能.

因此, 本文对5个模型进行仿真试验: 其中ARMA(3, 3)和ARMA(2, 3)模型验证本文所提求解观测噪声方差算法在估计AR阶次等于或者小于MA阶次情形下观测噪声方差的估计效果; ARMA(3, 2)和ARMA(4, 3)与文献[8]的一样, 另构

造ARMA(6, 4)模型, 以分析高阶模型的建模性能. ARMA(3, 3), ARMA(2, 3)模型的表达式分别如下:

$$x(k) = 0.559x(k-1) + 0.453x(k-2) - 0.759x(k-3) + e(k) + 0.8e(k-1) - 0.767e(k-2) - 0.686e(k-3), \quad (10)$$

$$x(k) = 1.46x(k-1) - 0.835x(k-2) + e(k) - 0.5e(k-1) + 0.4025e(k-2) - 0.686e(k-3). \quad (11)$$

在仿真中, 建模样本长度 N 取为4000, σ_e 均取为1, $P = 5p$. 验证对观测噪声方差估计效果时, σ_v 分别取值0.5, 1, 2和3; 在验证模型参数求解整体性能时, σ_v 则分别按-5 dB, 0 dB, 5 dB, 10 dB和15 dB等信噪比取值. 测试本方法在不同样本容量时的性能, σ_e 和 σ_v 均设为1, 选用ARMA(3, 2)模型产生10000个样本数据, 分别选取样本容量为100, 500, 1000, 3000, 5000, 8000和10000, 采用本文方法计算观测噪声方差. 在仿真中对每种条件均进行100次试验, 对试验结果取平均.

3.1 观测噪声方差的估计(Estimation of the observation noise variance)

对上述5个ARMA模型, 当 σ_v 取不同值时, 分别用本文和文献[8]的方法对 σ_v 进行估计, 估计结果如表1所示, 其中(2, 3)表示ARMA(2, 3)模型, 其他的依此类推, 后续表格中也采用这种表示方法.

如图1所示为本文和文献[8]的方法对 σ_v 估计值的标准差的对比图. 另外为了直观地对比本文算法和文献[8]的方法对观测噪声方差估计的结果, 给出ARMA(3, 2)模型在 σ_v 均取1时的100次试验值, 如图2所示. 由表1和图1-2可知:

1) 本文算法对ARMA(3, 3)和ARMA(2, 3)模型的观测噪声方差也能精确估计, 验证了 $p \leq q$ 时, 本文所述方法依然可以对观测噪声方差进行精确估计, 而文献[8]则不能解算;

2) 当AR阶次高于MA阶次时, 本文和文献[8]的方法得到的 σ_v 估计值均值都非常接近于其真实值, 两种方法估计均值与真实值的最大偏差分别为0.0400和0.0681, 说明这两种方法对 σ_v 的估计是近似无偏的;

3) 本文方法对 σ_v 估计的标准差在0.0220~0.0743之间, 而文献[8]方法对 σ_v 估计的标准差在0.0560~0.7131之间, 波动范围是本文方法的2~10倍, 说明本文算法对 σ_v 的估计精度更高;

表 1 σ_v 的估计结果
Table 1 The estimated values of σ_v

σ_v			0.5	1	2	3
(2, 3)	本文方法	均值	0.4976	1.0068	1.9926	2.9589
		标准差	0.0213	0.0299	0.052	0.063
(3, 3)	本文方法	均值	0.4977	1.0013	1.9799	2.9949
		标准差	0.022	0.0283	0.0513	0.0656
(3, 2)	本文方法	均值	0.4962	0.9904	2.0047	2.97
		标准差	0.0313	0.0309	0.0381	0.0703
	文献[8]	均值	0.4884	0.9934	1.9846	2.983
		标准差	0.061	0.056	0.0839	0.1391
(4, 3)	本文方法	均值	0.5021	0.9987	2.0058	2.96
		标准差	0.0421	0.0517	0.0491	0.0743
	文献[8]	均值	0.4805	0.9919	1.9853	2.9319
		标准差	0.0884	0.0981	0.1336	0.7131
(6, 4)	本文方法	均值	0.4835	0.9985	1.978	2.979
		标准差	0.0297	0.0388	0.0553	0.0656
	文献[8]	均值	0.5676	1.064	2.0532	3.0179
		标准差	0.1246	0.1307	0.174	0.2

(3, 2)不同样本容量时本方法的估计结果							
样本数	100	500	1000	3000	5000	8000	10000
均值	0.6996	0.8551	0.9185	0.9866	0.9793	1.0024	0.9991
标准差	0.1187	0.069	0.0638	0.0411	0.0336	0.0296	0.0254

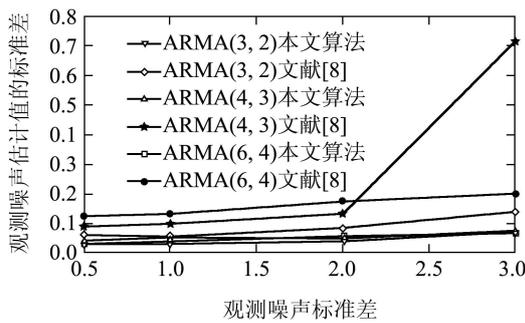


图 1 σ_v 估计值的标准差对比

Fig. 1 The standard deviations of the estimated σ_v

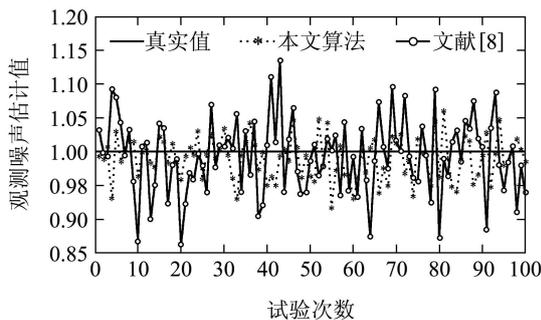


图 2 ARMA(3, 2) σ_v 估计值

Fig. 2 The estimated values of σ_v for ARMA(3, 2)

4) 在相同观测噪声强度时, 本文方法对不同模型 σ_v 估计的均值和标准差波动很小, 最大值分别

为 0.0349 和 0.0234; 对同一模型, 当观测噪声强度从 0.5 增大到 3 时, σ_v 估计的均值和标准差的波动最大值分别为 0.04 和 0.0743. 而观测噪声强度和模型阶次均对文献[8]所述方法的估计结果有一定程度的影响, 例如, 对 ARMA(4, 3) 模型, 当观测噪声方差为 3 时, 文献[8]方法的估计标准差达到了 0.7131, 约为真实值的 24%. 因此, 与文献[8]方法相比, 本文方法受观测噪声强度和模型阶次的影响更小, 适应性更好.

5) 不同样本容量时, 100, 500 和 1000 时的方差估计精度较低, 当样本数大于 3000 时, 估计精度较高, 且趋于稳定, 说明当样本容量大到一定程度, 估计方法精度已经足够高. 在应用中, 如果样本数过多, 将增加建模运算量; 如果过少, 不具有统计性, 则建模精度不高. 因此, 需要折中设计, 即当样本长度保证建模精度足够高时即可. 建模精度与样本长度之间的关系研究在文献[12]中已有研究, 主要是从统计参数的计算精度进行的.

3.2 信噪比为 0 dB 时的模型参数估计 (Estimation with 0 dB SNR)

与文献[8]一样, 本文也采用标准差 (standard deviation from mean, SDM)、标准偏差 (standard de-

viation from true value, SDT)和误差均方和(average sum-squared error, ASSE)作为算法性能的评价指标,具体定义请参考文献[8].

如表2-4所示为应用本文方法对ARMA(3, 2), ARMA(4, 3)和ARMA(6, 4)等3个模型的建模结果,

并将ARMA(3, 2)和ARMA(4, 3)的建模结果与文献[8]的进行了对比. 由于本文只是实现了文献[8]中对 σ_v 的估计方法,而未实现建模方法的整体,因此,对比时直接使用文献[8]中的结果,也未对ARMA(6, 4)模型的结果进行对比.

表 2 ARMA(3, 2)模型参数估计结果

Table 2 The estimated results for ARMA(3, 2)

(3, 2)	本文方法				文献[8]方法		
	参数	真值	估值	SDM	SDT	估值	SDM
a_1	-0.579	-0.568	± 0.023	± 0.023	-0.575	± 0.023	± 0.024
a_2	-0.442	-0.438	± 0.023	± 0.025	-0.443	± 0.025	± 0.025
a_3	0.769	0.757	± 0.020	± 0.024	0.777	± 0.027	± 0.028
b_1	-0.494	-0.481	± 0.079	± 0.060	-0.479	± 0.059	± 0.061
b_2	0.297	0.304	± 0.124	± 0.067	0.315	± 0.071	± 0.082
ASSE/dB			-27.03			-21.18	

表 3 ARMA(4, 3)模型参数估计结果

Table 3 The estimated results for ARMA(4, 3)

(4,3)	本文方法				文献[8]方法		
	参数	真值	估值	SDM	SDT	估值	SDM
a_1	-0.660	-0.645	± 0.033	± 0.039	-0.660	± 0.027	± 0.027
a_2	0.385	0.377	± 0.023	± 0.027	0.385	± 0.036	± 0.036
a_3	-0.646	-0.630	± 0.032	± 0.033	-0.650	± 0.040	± 0.040
a_4	0.739	0.715	± 0.020	± 0.035	0.750	± 0.034	± 0.036
b_1	-0.531	-0.521	± 0.082	± 0.082	-0.508	± 0.061	± 0.079
b_2	0.219	0.247	± 0.046	± 0.048	0.208	± 0.079	± 0.088
b_3	-0.416	-0.408	± 0.101	± 0.106	-0.394	± 0.070	± 0.080
ASSE/dB			-24.52			-22.55	

表 4 ARMA(6, 4)模型参数估计结果

Table 4 The estimated results for ARMA(6, 4)

参数	真值	估值	SDM	SDT
a_1	-0.8	-0.691	± 0.098	± 0.120
a_2	0.442	0.352	± 0.088	± 0.115
a_3	0.165	0.202	± 0.063	± 0.069
a_4	0.368	0.328	± 0.065	± 0.075
a_5	-0.477	-0.437	± 0.085	± 0.088
a_6	0.303	0.25	± 0.056	± 0.068
b_1	-0.299	-0.192	± 0.106	± 0.123
b_2	0.414	0.396	± 0.108	± 0.109
b_3	-0.279	-0.274	± 0.104	± 0.104
b_4	0.497	0.412	± 0.100	± 0.129
ASSE/dB		-19.8		

由表2-4可知:

1) 本文方法对低阶模型参数估计精度优于对高阶模型的. ARMA(3, 2), ARMA(4, 3)和ARMA(6, 4)模型的ASSE值分别为-27.03 dB, -24.52 dB和-19.80 dB, ARMA(6, 4)的ASSE值较ARMA(3, 2)的增大了7.23 dB;

2) 与文献[8]方法相比,本文方法的建模精度更高. 本文方法对ARMA(3, 2)和ARMA(4, 3)模型的建模ASSE值分别由文献[8]中的-21.18 dB和-22.55 dB降为-27.03 dB和-24.52 dB, 误差分别下降了5.85 dB和1.97 dB.

本文对ARMA(3, 2)和ARMA(4, 3)模型的建模精度要比文献[8]高的主要原因有两点:

① 本文方法由于将ARMA模型转化成高阶的AR模型,避免了MA部分的影响,故可以从1阶开始构建Yule-Walker方程,低阶的自协方差被加入

到Yule-Walker方程中, 所以本文方法对观测信息的利用度要高于文献[8], 有利于提高观测噪声方差的估计精度;

② 虽然本文和文献[8]在求解AR参数时都是从MA部分阶次加1开始构建Yule-Walker方程的, 但后者是同时得到 σ_v 和AR参数的估计值, 只利用了从MA部分阶次加1开始的自协方差信息; 而本文是先对 σ_v 进行精确估计, 然后用于AR参数估计, 最后确定的MA参数则利用了已经得到的 σ_v 和AR参数的估计值, 因而在保证了 σ_v 估计精度时将有利于提高AR和MA参数的估计精度.

3.3 不同信噪比时模型参数的估计(Estimation with the different values of SNR)

为了进一步验证本文方法对各种观测噪声强度的适用性, 另外仿真了信噪比为-5 dB, 5 dB, 10 dB和15 dB时对上述3个模型的建模结果, 并将3.2节的0 dB结果一并对比分析. 为节省篇幅, 只给出ASSE值, 结果如表5和图3所示.

表 5 不同信噪比时3种模型参数估计的ASSE值
Table 5 The ASSE values of three ARMA models with different SNR values

SNR/dB	-5	0	5	10	15
(3, 2)	-21.31	-27.03	-30.29	-32.61	-35.25
(4, 3)	-19.85	-24.52	-27.21	-28.89	-33.04
(6, 4)	-12.93	-19.8	-23.55	-24.04	-26.71

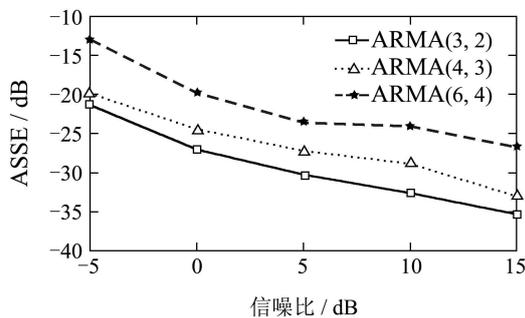


图 3 3个模型的ASSE随信噪比的变化曲线
Fig. 3 The ASSE values of three ARMA models vs SNR values

由表5和图3可知, 当信噪比相同时, 高阶模型的ASSE值较低阶模型的ASSE值大, 例如, ARMA(6, 4)模型的ASSE值比ARMA(3, 2)和ARMA(4, 3)的大7 dB以上, 这说明本文方法对低阶模型的建模精度要高于对高阶模型的. 另外, 随着信噪比的增加, 3个模型的ASSE值呈现递减的趋势, 即 σ_v 的减小有利于建模精度的提升. 除了当信噪比低至-5 dB时ARMA(6, 4)模型的ASSE值

达到-12.93 dB之外, 在其他情况下本文方法的建模ASSE值都在-20 dB左右或低于-20 dB, 说明本文方法的抗噪性能比较好.

4 实际应用(Applications)

为了验证本文提出的估计观测噪声方差方法的有效性, 基于实验室现有的三轴转台对惯性测量单元(inertial measurement unit, IMU)进行标定实验, IMU和三轴转台实物分别如图4和图5所示, 其中组成IMU的陀螺仪为美国BEI公司的QRS14型石英振动速率陀螺, 加速度计为美国IC Sensors公司的3140型压阻式加速度计. 实验中发现, 一个轴的加速度计无法正常工作, 因此, 这里只给出陀螺仪组的标定结果.

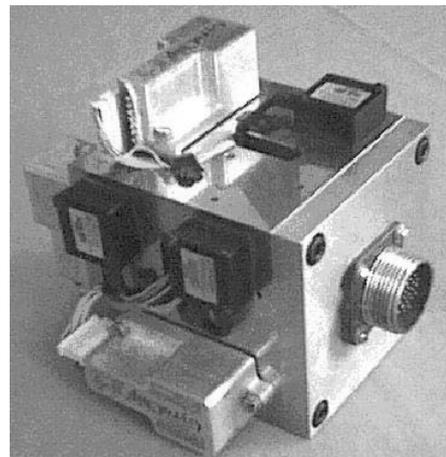


图 4 IMU实物照片

Fig. 4 The picture of the tested IMU

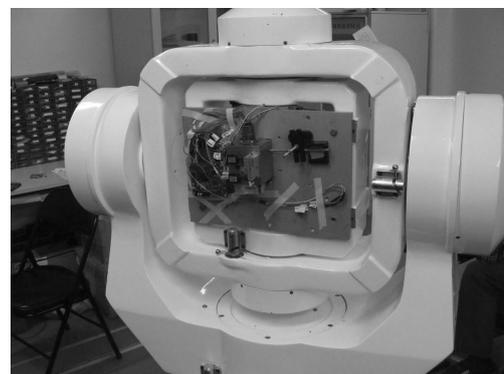


图 5 三轴转台实物照片

Fig. 5 The picture of the three-axis rotary table

通过静态标定, 对安装误差和零偏进行补偿, 对补偿后的随机误差进行ARMA建模, 如表6所示, 其中, Z轴陀螺仪的定阶结果为ARMA(3, 3)模型. 由于文献[8]的方法此时无法估计观测噪声方差, 因此选用ARMA(3, 2)模型, 而本文的方法仍然是对ARMA(3, 3)模型进行计算.

表6 陀螺仪模型参数估计结果
Table 6 The estimated results for the tested gyroscopes

模型参数	本文方法			文献[8]方法		
	X	Y	Z	X	Y	Z
a_1	1.0291	4.1105	-4.3887	1.3031	3.9281	-5.4241
a_2	-0.9565	-3.24	-4.785	-1.0442	-3.3702	-7.8712
a_3	0.1638	1.296	2.794	0.3988	1.455	4.1637
a_4	—	-0.1872	—	—	-0.3121	—
b_1	-0.9563	-1.0613	0.38	-1.135	-1.197	0.5455
b_2	0.7593	0.2402	-0.0835	0.5546	0.2937	0.1123
b_3	—	—	-0.0483	—	—	—
σ_e	0.1326	0.728	0.9916	0.0924	0.6065	0.5245
σ_v	0.0412	0.195	0.1471	0.1026	0.2115	0.199

利用得到的ARMA模型和经静态补偿之后的随机数据进行Kalman滤波,并将滤波估计得到的随机信号从经静态补偿得到的随机数据中相应减去,即得到经随机补偿的结果,如图6所示分别为3个陀螺仪的原始输出误差、静态补偿后的误差和经随机补偿后的误差曲线图,如表7所示为3个陀螺仪补偿前后误差对比,并与文献[8]方法的结果进行了对比.由表7和图6可得如下结论:

1) 静态误差补偿有利于修正陀螺仪的零偏,但对随机误差无修正作用.由于标定的陀螺仪已经有10多年的时间了,3个轴的差异非常大,例如X和Y轴的零漂比Z轴大很多,但是经过静态补偿后,X和Y轴陀螺仪的零偏得到了有效补偿,Z轴的也得到一定补偿.不过,静态补偿前后的误差标准差没有变化,即随机误差并没有得到补偿;

2) 随机误差建模可以有效地降低随机噪声标准差.利用本文和文献[8]的方法对随机误差建模,并通过Kalman滤波估计和补偿,都大幅度降低了随机误差标准差,其中利用本文方法将3个陀螺仪的随机误差标准差由静态标定后的0.1459,0.3090和0.2085减小为补偿后的0.0158,0.0272和0.0118,利用文献[8]的方法则分别减小为0.0418,0.0318和0.0174;

3) 本文方法对随机误差补偿精度更高.本文方法和文献[8]方法补偿后的3个陀螺仪随机误差标准差分别为0.0158,0.0272,0.0118和0.0418,0.0318,0.0174,说明本文方法的建模精度更高,对随机误差的补偿效果更好;

4) 本文观测噪声估计方法适用性更好.对Z轴陀螺仪的定阶结果为ARMA(3,3),文献[8]的方法此时无法建模,本文方法仍然能正常建模,而无须选用次优模型.

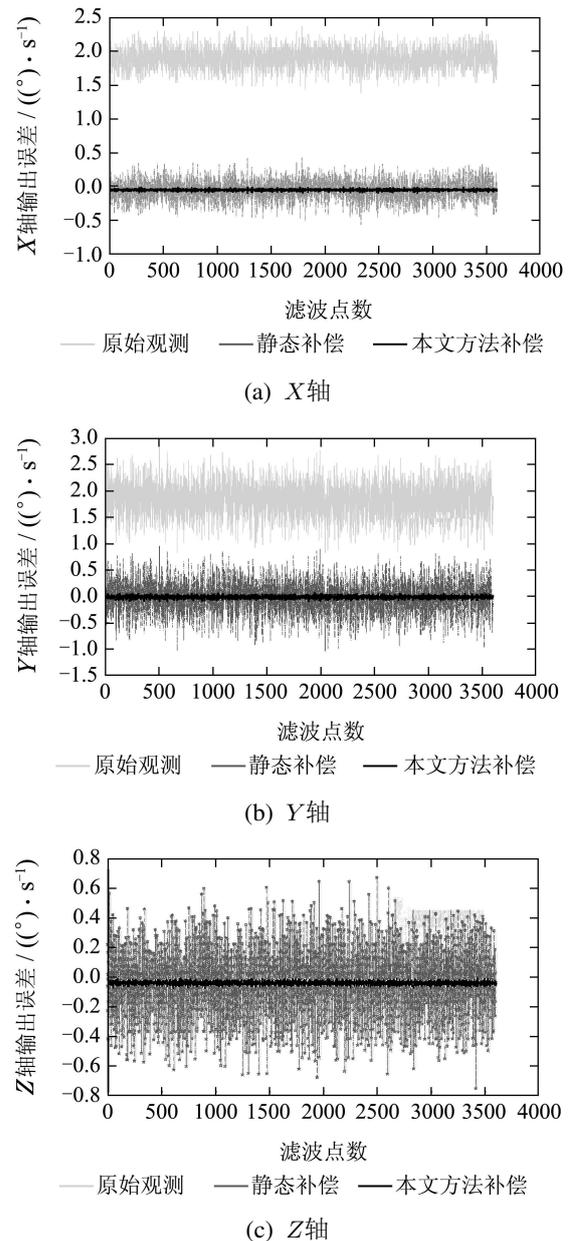


图6 陀螺随机误差处理结果

Fig. 6 The compensated results of the gyroscopes

表7 传感器随机误差处理前后的统计特征

Table 7 The compensated results by ARMA modeling

陀螺仪	指标	均值/ ((°)·s ⁻¹)	标准差/ ((°)·s ⁻¹)
X	原始观测	1.8968	0.1464
	静态补偿	-0.0524	0.1459
	文献[8]方法	-0.0524	0.0418
	本文方法	-0.0524	0.0158
Y	原始观测	1.8383	0.3092
	静态补偿	-0.0167	0.309
	文献[8]方法	-0.0167	0.0318
	本文方法	-0.0167	0.0272
Z	原始观测	-0.0451	0.2083
	静态补偿	-0.0395	0.2085
	文献[8]方法	-0.0395	0.0174
	本文方法	-0.0395	0.0118

5 结论(Conclusions)

由于ARMA建模时观测噪声总是客观存在的, 而现有ARMA建模方法要么忽略观测噪声对建模精度的影响, 要么就是在估计观测噪声方差的时候只利用观测数据的高阶自协方差构建Yule-Walker方程, 对观测信息的利用不够充分, 导致观测噪声方差的估计精度不高, 影响了整体建模精度的提高. 针对这些问题, 本文以存在观测白噪声时的ARMA建模中估计观测噪声方差为研究对象, 先将ARMA模型近似为高阶的AR模型, 从观测数据的1阶自协方差开始构建Yule-Walker方程, 一方面保证一定可以求解出观测噪声的方差, 另一方面充分地利用了观测信息, 保证了观测噪声方差的估计精度, 也为后续的AR和MA参数的估计精度提高奠定了基础. 最后将该算法应用陀螺仪组实测的随机误差处理中, 通过对已知参数模型的仿真和实际应用, 可以得出以下结论:

1) 本文方法适用于AR阶次小于或者等于MA阶次情形的建模, 对观测噪声方差的估计精度高, 受模型阶次和观测噪声强度的影响较小;

2) 观测噪声方差估计精度的提高为后续AR和MA参数估计精度的提高奠定了基础, 所以和文献[8]的建模结果相比, 在相同条件下, 本文的方法在估计AR和MA参数时效果更好;

3) 本文方法应用于陀螺仪随机误差的处理, 补偿后的陀螺仪随机误差标准差分别降为静态补偿后的随机误差标准差的1/9.2, 1/11.4和1/17.7, 降低了一个数量级, 初步验证了本文方法的有效性.

参考文献(References):

[1] 柳贵福, 张树侠. 光纤陀螺零漂数据滤波方法的研究[J]. 中国惯

性技术学报, 2001, 9(4): 66-69.

(LIU Guifu, ZHANG Shuxia. Investigation on filter methods of fiber optic gyro drift data [J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2001, 9(4): 66-69.)

- [2] 付志超, 程伟, 徐成. 基于LS-SVM的模态参数识别方法[J]. 航空学报, 2009, 30(11): 2087-2092.
(FU Zhichao, CHENG Wei, XU Cheng. LS-SVM-based method for modal parameter identification [J]. *Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica*, 2009, 30(11): 2087-2092.)
- [3] 李家全, 许化龙, 何婧. 光纤陀螺随机漂移的实时滤波方法研究[J]. 宇航学报, 2010, 31(12): 2717-2721.
(LI Jialei, XU Hualong, HE Jing. Real-time filtering methods of random drift of fiber optic gyroscope [J]. *Journal of Astronautics*, 2010, 31(12): 2717-2721.)
- [4] 张颖, 冯纯伯. 带白色观测噪声的ARMA模型参数的无偏估计[J]. 控制理论与应用, 1996, 13(3): 376-379.
(ZHANG Ying, FENG Chunbo. Consistent parameter estimation of ARMA with measurement noises [J]. *Control Theory & Applications*, 1996, 13(3): 376-379.)
- [5] FATTAH S A, ZHU W P, AHMAD M O. An algorithm for ARMA model parameter estimation from noisy observations[C] // *IEEE Circuits and Systems Symposium*. Seattle: IEEE, 2008: 3202-3205.
- [6] FATTAH S A, ZHU W P, AHMAD M O. An identification technique for noisy ARMA systems in correlation domain [C] // *IEEE Circuits and Systems Symposium*. New Orleans: IEEE, 2007: 349-352.
- [7] FATTAH S A, ZHU W P, AHMAD M O. Identification of autoregressive moving average systems from noise-corrupted observations [C] // *IEEE Northeast Workshop on Circuits Systems*. Montreal: IEEE, 2008: 69-72.
- [8] FATTAH S A, ZHU W P, AHMAD M O. Identification of autoregressive moving average systems based on noise compensation in the correlation domain [J]. *IET Signal Process*, 2011, 5(3): 292-305.
- [9] 杨叔子, 吴雅, 轩建平. 时间序列分析的工程应用[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 2007.
- [10] LIANG G, WILKES D M, CADZOW J A. ARMA model order estimation based on the eigenvalues of the covariance matrix [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41(10): 3003-3009.
- [11] 肖创柏, 罗晖, 李衍达. 基于OIVPM的特征值确定ARMA模型的结构[J]. 自动化学报, 1996, 22(1): 68-73.
(XIAO Chuangbai, LUO Hui, LI Yanda. ARMA model order determination based on the eigenvalues of the overdetermined instrumental variable produce moment [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1996, 22(1): 68-73.)
- [12] 王可东, 熊少锋. ARMA建模及其在Kalman滤波中的应用[J]. 宇航学报, 2012, 33(8): 1048-1055.
(WANG Kedong, XIONG Shaofeng. An ARMA modeling method and its application to Kalman filtering [J]. *Journal of Astronautics*, 2012, 33(8): 1048-1055.)

作者简介:

熊少锋 (1985-), 男, 主要从事惯性导航技术研究, E-mail: shepxiong@163.com;

王可东 (1975-), 男, 博士, 副教授, 主要从事卫星/惯性组合、天文/惯性组合、地形辅助导航和最优估计算法等方面的理论和应用研究, E-mail: wangkd@buaa.edu.cn;

姜锐 (1987-), 男, 博士研究生, 主要从事卫星/惯性组合导航和最优滤波算法研究, E-mail: jr9910@163.com;

高悦 (1980-), 男, 工程师, 主要从事卫星通信和应急通信方面的研究, E-mail: gaoyue@catr.cn.