第 30 卷第 5 期
2013 年 5 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 30 No. 5
May 2013

DOI: 10.7641/CTA.2013.20417

Markov跳跃非线性系统逆最优增益设计

王传锐†, 王兴虎, 季海波

(中国科学技术大学 自动化系, 安徽 合肥 230027)

摘要: 证明了一类严格反馈Markov跳跃系统是依概率输入–状态可稳定的. 其次, 证明了逆最优增益设计问题可解的一个充分条件是存在一组满足小控制量的依概率输入–状态稳定控制李雅普诺夫函数. 最后, 利用积分反推方法, 给出了严格反馈Markov跳跃系统逆最优增益设计问题的一个构造性解. 其中, 为了克服由于Markov跳跃引起的耦合项所带来的困难, 所设计的李雅普诺夫函数以及控制器是与模态无关的.

关键词: Markov跳跃非线性系统; 逆最优增益设计; 依概率输入–状态稳定

中图分类号: TP13　　　**文献标识码**: A

Inverse optimal gain assignment control for Markovian jump nonlinear systems

WANG Chuan-rui†, WANG Xing-hu, JI Hai-bo

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei Anhui 230027, China)

Abstract: The concept of input-to-state stability in probability is introduced and an input-to-state stabilization protocol is proposed for a class of strict feedback Markovian jump nonlinear systems. It is shown that the existence of a group of input-to-state stable control Lyapunov function with small control is a sufficient condition for the solvability of the inverse optimal gain assignment problem. Finally, using backstepping method, we construct a smooth feedback control law for a class of strict feedback nonlinear systems. To deal with the coupling item caused by Markovian jump, the Lyapunov function and the controller are designed independently of the operation mode.

Key words: Markovian jump nonlinear systems; inverse optimal; input-to-state stability in probability

1 引言(Introduction)

混合系统是当前研究的一个热门领域, 其一个重要分支就是Markov跳跃系统. 特别地, 当系统的结构或者参数有不可预知的变化时, 其数学模型往往可表示为Markov跳跃系统. Markov跳跃系统的各模态之间的随机切换服从Markov过程. 由于Markov跳跃系统具有广泛应用背景, 在过去的十多年中, 对Markov跳跃系统的研究受到了很大的关注. 但需要指出的是, 目前对该系统的研究大多是稳定性分析而非控制器设计, 特别是对于Markov跳跃非线性系统. 这主要是由于在用李雅普诺夫函数研究Markov跳跃系统时, 其广义无穷小生成子中除了一阶梯度项外, 还有Markov跳跃引起的耦合项, 这常常是研究Markov跳跃系统的一个主要难点. 目前, 在Markov跳跃线性系统的稳定性分析以及控制等方面取得了一系列的结果[1–3].

在Markov跳跃线性系统H_∞控制方面同样取得了一些成果[4–6]. 然而非线性H_∞控制及优化控制一般是比较难解的, 因为此类问题的求解一般归结为求解一类Hamilton–Jacobi–Isaacs(HJI)偏微分方程问题. 而一般情况下, HJI方程是比较难求解的, 有时候甚至是无解的[7]. 因此, 文献[8]利用控制Lyapunov函数研究了逆最优增益设计问题. 此提法的一个优点是除了控制器外, 还有多个参数函数可供设计, 避免了直接求解HJI方程. 文献[7]证明了确定性系统的逆最优增益设计问题是可解的等价于系统是输入–状态可稳定的, 文献[9]将此结果推广到随机系统中. 文献[10–11]将文献[7]和文献[9]的结果推广到含有未知定常参数系统中.

具有严格反馈形式的非线性系统的构造性控制设计一直受到广泛关注[8,12–14]. 对于严格反馈Markov跳跃系统, 文献[15–16]在Markov过程具有平稳分布且初始分布恰为此平稳分布的前提下, 分别研究了系统的镇定和跟踪问题. 其前提条件具有一定的局限性使之难以应用到实际应用中.

根据上述分析, 本文研究Markov跳跃非线性系

收稿日期: 2012−04−26; 收修改稿日期: 2012−12−05.
†通信作者. E-mail: hugh@mail.ustc.edu.cn; Tel.: +86 13696511279.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61273090).

统的逆最优增益设计问题. 为此, 首先介绍了Markov跳跃非线性系统的依概率输入–状态稳定等概念, 并证明了严格反馈Markov跳跃系统是输入–状态可稳定的. 其次, 给出一般Markov跳跃非线性系统逆最优增益设计问题的两个充分条件. 最后, 构造了一个与模态无关的李雅普诺夫函数与控制器, 给出严格反馈Markov跳跃系统逆最优增益设计问题的一个解. 由于所设计的李雅普诺夫函数及控制器与模态和转移概率无关, 因此在模态及转移概率未知的情况下, 本方法仍然是有效的.

本文使用如下记号: $\mathbb{R}$表示实数集, $\mathbb{R}^n$表示n维实向量空间; $|\cdot|$表示向量或矩阵的Euclidean范数(2–范数); $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \wedge y \triangleq \min\{x, y\}$; $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$表示概率空间, 其中: Ω为样本空间, $\mathcal{F}$为σ–代数, P为概率测度; E表示求期望算子; $C^{1,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times S;\ \mathbb{R}_+)$表示所有的定义在$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times S$上的满足对$x, t$是一次连续可微的非负函数$V(x, t, i)$的集合, 其中$S = \{1, 2, \cdots, N\}$, N是正整数; L_∞^m表示所有有界的m维向量函数的集合. 对于$\mathcal{K}_\infty$类函数$\gamma(\cdot)$, 若其导数也是$\mathcal{K}_\infty$类函数, 则记$\ell_\gamma(r) = \int_0^r (\gamma')^{-1}(s)\mathrm{d}s$.

2 问题描述(Problem statement)

首先考虑下面的Markov跳跃非线性系统:

$$\dot{x} = f(x, t, r_t), \tag{1}$$

其中$x \in \mathbb{R}^n$表示系统的状态. 跳跃模态$r_t(t \geqslant 0)$是定义在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$上的右连续的有限离散状态的Markov过程. r_t的状态空间为S, 转移概率为

$$\mathrm{P}(r_{t+h} = j | r_t = i) = \begin{cases} \pi_{ij}h + o(h), & j \neq i, \\ 1 + \pi_{ii}h + o(h), & j = i, \end{cases}$$

其中: $h > 0$, $o(h)$表示比h高阶的无穷小量, $\pi_{ij}(i \neq j)$表示从状态i转移到状态j的速率,

$$\pi_{ii} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{N} \pi_{ij}.$$

对$V(x(t), t, r_t) \in C^{1,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times S; \mathbb{R}_+)$, 定义广义无穷小生成子

$$\mathcal{L}V(x(t), t, p) = \frac{\partial V(x(t), t, p)}{\partial t} + L_{f(x,t,p)}V(x(t), t, p) + \sum_{q=1}^{N} \pi_{pq} V(x(t), t, q).$$

若$0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2$是两个几乎处处有界的停时且$V, \mathcal{L}V$在$t \in [\tau_1, \tau_2]$上依概率1有界, 根据文献[2]中引理1.9可知

$$\mathrm{E}V(x(\tau_2), \tau_2, r_{\tau_2}) = \mathrm{E}V(x(\tau_1), \tau_1, r_{\tau_1}) + \mathrm{E}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}V(x(s), s, r_s)\mathrm{d}s.$$

定义 1 考虑系统(1), 如果对任意的$0 < \varepsilon < 1$存在$\mathcal{KL}$类函数$\beta(\cdot, \cdot)$使得下式成立:

$$\mathrm{P}\{|x(t)| < \beta(|x_0|, t)\} \geqslant 1 - \varepsilon,\ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{2}$$

则称系统是全局依概率渐近稳定的.

注 1 考虑系统(1), 如果存在正定函数$W(x)$和正定且径向无界的函数$V(x, i)$, $i = 1, \cdots, N$使得下式成立:

$$\mathcal{L}V(x, i)|_{(1)} \leqslant -W(x),$$

则称$V(x, i)$是此系统的一组李雅普诺夫函数. 根据文献[2]中定理5.37可得, 对任意的$0 < \varepsilon < 1$,

$$\mathrm{P}\{\lim_{t\to\infty} x(t) = 0\} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

因此, 存在$\mathcal{KL}$类函数$\beta(\cdot, \cdot)$使得式(2)成立.

考虑Markov跳跃非线性系统

$$\dot{x} = f(x, r_t) + g(x, r_t)d(t) + h(x, r_t)u, \tag{3}$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$表示系统的状态, $d(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$表示未知的有界扰动时变函数向量, $u \in \mathbb{R}^m$表示系统的控制输入, 光滑函数f满足$f(0, i) = 0$, $i = 1, \cdots, N$. 在下面的分析中, 为了方便, 本文有时将r_t写在下标的位置, 如将函数$f(x, r_t)$写为$f_{r_t}(x)$等.

定义 2 考虑系统(3), 如果存在$\mathcal{K}_\infty$类函数γ且其导数也是$\mathcal{K}_\infty$类函数, N个矩阵值函数$R_i(x)$, 满足$R_i(x) = R_i^{\mathrm{T}}(x) > 0$, N个正定且径向无界的函数$S(x, i)$, N个正定的函数$l_i(x)$, 使得存在处处连续的控制器$u = \alpha_i(x)$, 满足$\alpha_i(0) = 0 (i = 1, \cdots, N)$且最小化下面的性能指标:

$$J(u) = \sup_{d\in D}\{\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}[S(x, r_t) + \int_0^t (l_{r_\tau}(x(\tau)) + u^{\mathrm{T}}R_{r_\tau}(x(\tau))u - \gamma(|d(\tau)|))\mathrm{d}\tau]\}, \tag{4}$$

其中D表示局部有界函数的集合, 则称此系统的逆最优增益设计问题是可解的.

文献[7]指出, 此问题比H_∞问题更为广泛, 并且与$\mathcal{L}_2$控制、$\mathcal{L}_\infty$控制等问题密切相关.

3 依概率输入–状态稳定性设计(Design of input-to-state stabilizing controller)

由Sontag首先提出的输入–状态稳定性概念, 是非线性系统稳定性分析与控制器设计的一个重要工具[17]. 文献[3]将其推广到Markov跳跃系统中.

定义 3 考虑系统

$$\dot{x} = f_{r_t}(x) + g_{r_t}(x)u, \tag{5}$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$表示状态, $u \in \mathbb{R}^m$表示控制输入. 如果对$\forall\varepsilon > 0$存在$\mathcal{KL}$类函数$\beta(\cdot, \cdot)$和$\mathcal{K}_\infty$类函数$\gamma(\cdot)$使得对于任意的$x(0)$以及任意的$u(t) \in L_\infty^m$, 系统的解在$[0, \infty)$上存在且下式对$\forall t \geqslant 0$成立:

$$\mathrm{P}\{|x(t)| \leqslant \beta(|x_0|, t) + \gamma(\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t} |u(\tau)|)\} \geqslant 1 - \varepsilon,$$

则称此系统是依概率输入–状态稳定的.

引理 1[3] 考虑系统(5), 如果存在连续可微函数$V(x,i)$, $i=1,\cdots,N$, $\mathcal{K}_\infty$类函数$\alpha_1(\cdot),\alpha_2(\cdot),\alpha_3(\cdot)$, $\rho(\cdot)$使得下式成立:

$$\alpha_1(|x|)\leqslant V(x,i)\leqslant \alpha_2(|x|), \tag{6}$$

$$\mathcal{L}V(x,i)|_{(5)}\leqslant -\alpha_3(|x|)+\rho(|u|), \tag{7}$$

则系统是依概率输入–状态稳定的.

定义 4　考虑系统(3)以及N个正定且径向无界的连续可微函数$V(x,i)$, $i=1,\cdots,N$, 如果存在$\mathcal{K}_\infty$类函数$\rho(\cdot)$使得下式对$\forall x\neq 0$, $d\in\mathbb{R}^{n_d}$成立:

$$|x|\geqslant \rho(|d_i|)\Rightarrow \inf_{u\in\mathbb{R}^m}\{\mathcal{L}V(x,i)\}<0, \tag{8}$$

则称$V(x,i)$是此系统的一组依概率输入–状态稳定控制李雅普诺夫函数.

如果还存在N个连续函数$\alpha_{ci}(x)$, $i=1,\cdots,N$, 满足$\alpha_{ci}(0)=0$且使得下式对$\forall x\neq 0$成立:

$$|x|\geqslant \rho(|d_i|)\Rightarrow \mathcal{L}V(x,i)_{u=\alpha_{ci}(x)}<0,$$

则称此函数是满足小控制性质的.

引理 2　如果系统(3)存在一组满足小控制性质的依概率输入–状态稳定控制李雅普诺夫函数, 则此系统是依概率输入–状态可稳定的.

证　受文献[13]中定理2.6启发, 取如下控制器:

$$\alpha_i(x)=\begin{cases}-Q(x,i)(L_{h_i}V(i))^{\mathrm{T}}, & L_{h_i}V(i)=0,\\ 0, & L_{h_i}V(i)\neq 0,\end{cases}$$

其中:

$$Q(x,i)=\frac{\omega_i+\sqrt{\omega_i^2+(L_{h_i}V(i)(L_{h_i}V(i))^{\mathrm{T}})^2}}{L_{h_i}V(i)(L_{h_i}V(i))^{\mathrm{T}}},$$

$$\omega_i(x)=L_{f_i}V(i)+|L_{g_i}V(i)|\rho^{-1}(|x|)+\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}V(j).$$

根据文献[13]中引理1.12可知, $\alpha_i(x)$是在原点取值为0的连续函数. 将$\alpha_i(x)$代入$\mathcal{L}V$, 有下式成立:

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}V(x,i)=\\&-\sqrt{\omega_i^2+(L_{h_i}V(x,i)(L_{h_i}V(x,i))^{\mathrm{T}})^2}-\\&|L_{g_i}V(x,i)|\rho^{-1}(|x|)+L_{g_i(x)}V(x,i)d_i\leqslant\\&-\sqrt{\omega_i^2+(L_{h_i}V(x,i)(L_{h_i}V(x,i))^{\mathrm{T}})^2}-\\&|L_{g_i}V(x,i)|(\rho^{-1}(|x|)-|d_i|).\end{aligned}$$

因此当$|x|\geqslant\rho(|d_i|)$时,

$$\mathcal{L}V(x,i)\leqslant -\sqrt{\omega_i^2+(L_{h_i}V(x,i)(L_{h_i}V(x,i))^{\mathrm{T}})^2}.$$

由文献[3]中定理3.4的证明可知, 系统(3)是依概率输入–状态可稳定的.　　证毕.

下面考虑具有严格反馈形式的Markov跳跃系统

$$\begin{cases}\dot{x}_i=x_{i+1}+\varphi_i(x_1,\cdots,x_i,r_t)d(t),\\ \qquad i=1,\cdots,n-1,\\ \dot{x}_n=u+\varphi_n(x_1,,\cdots,x_n,r_t)d(t),\end{cases} \tag{9}$$

其中: $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}$.

定理 1　系统(9)是依概率输入–状态可稳定的.

证　考虑下面的李雅普诺夫函数:

$$V(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2(x_1,\cdots,x_i),$$

$$z_i(x_1,\cdots,x_i)=x_i-\alpha_{i-1}(x_1,\cdots,x_{i-1}),$$

其中$\alpha_i(\cdot)$是待定的可微函数. 记$z_0=0,\alpha_0=0$. 则

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}V(x)=\\&z_n(u-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}(x_{j+1}+\varphi_j d)+\varphi_n d+z_{n-1})+\\&\sum_{i=1}^{n-1}z_i(z_{i-1}+\alpha_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}(x_{j+1}+\varphi_j d)+\varphi_i d)\leqslant\\&z_n(u-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}x_{j+1}+z_{n-1})+\\&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}((\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j})^2\varphi_j^2z_n^2+d^2)+\frac{1}{2}z_n^2\varphi_n^2+\frac{1}{2}d^2+\\&\sum_{i=1}^{n-1}z_i(z_{i-1}+\alpha_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}(x_{j+1}+\varphi_j d)+\varphi_i d)\leqslant\\&z_n(u-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}x_{j+1}+\frac{1}{2}z_n(\sum_{l=1}^{N}\varphi_n^2(l))+z_{n-1}+\\&\frac{1}{2}z_n\sum_{j=1}^{n-1}((\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j})^2(\sum_{l=1}^{N}\varphi_j^2(l))))+\frac{n}{2}d^2+\\&\sum_{i=1}^{n-1}z_i(z_{i-1}+\alpha_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}(x_{j+1}+\varphi_j d)+\varphi_i d)\leqslant\\&z_n(u-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}x_{j+1}+\frac{1}{2}z_n(\sum_{l=1}^{N}\varphi_n^2(l))+z_{n-1}+\\&\frac{1}{2}z_n\sum_{j=1}^{n-1}(\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j})^2(\sum_{l=1}^{N}\varphi_j^2(l)))+\frac{n(n+1)}{4}d^2+\\&\sum_{i=1}^{n-1}z_i(\alpha_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}x_{j+1}+\frac{1}{2}z_i(\sum_{l=1}^{N}\varphi_i^2(l))+\\&z_{i-1}+\frac{1}{2}z_i\sum_{j=1}^{i-1}((\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j})^2(\sum_{l=1}^{N}\varphi_j^2(l)))).\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}\alpha_i=&-(c_iz_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}x_{j+1}+\frac{1}{2}z_i(\sum_{l=1}^{N}\varphi_i^2(l))+\\&z_{i-1}+\frac{1}{2}z_i\sum_{j=1}^{i-1}((\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j})^2(\sum_{l=1}^{N}\varphi_j^2(l)))),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u=&-(c_nz_n-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}x_{j+1}+\frac{1}{2}z_n(\sum_{l=1}^{N}\varphi_n^2(l))+\\&z_{n-1}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}(\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j})^2(\sum_{l=1}^{N}\varphi_j^2(l))z_n),\end{aligned}$$

其中$c_i(i=1,\cdots,n)$是正数, 则

$$\mathcal{L}V(x)\leqslant -\sum_{j=1}^{n}c_iz_i^2+\frac{n(n+1)}{2}d^2.$$

由引理1可知, 系统是依概率输入–状态可稳定

的. 结合定义4可知, $V(x)$是系统(9)的满足小控制性质的依概率输入–状态稳定控制李雅普诺夫函数.

证毕.

4 逆最优增益设计(Inverse optimal gain assignment)

引理 3 考虑系统(3)的辅助系统

$$\dot{x}= f_{r_t}(x)+ h_{r_t}(x)u + g_{r_t}(x)\ell_\gamma(2|L_{g_{r_t}}V(x,r_t)|)\frac{(L_{g_{r_t}}V(x,r_t))^{\mathrm{T}}}{(|L_{g_{r_t}}V(x,r_t)|)^2}. \tag{10}$$

假设存在N个矩阵值函数$R_i(x)$, 满足$R_i(x) = R_i^{\mathrm{T}}(x) > 0$, 使得在控制器

$$u = \alpha_i(x) = -R_i^{-1}(x)(L_{h_i}V(x,i))^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

下, $V(x,i)(i = 1,\cdots,N)$是闭环系统(10)的一组李雅普诺夫函数, 其中$\gamma(\cdot)$是一个$\mathcal{K}_\infty$类函数且其导数也是$\mathcal{K}_\infty$类函数, 则系统(3)的逆最优增益设计问题是可解的, 且各项参数如下所示:

$$u = \alpha_i^*(x) = -\beta R_i^{-1}(x)(L_{h_i}V(x,i))^{\mathrm{T}}, \tag{12}$$

$$J(u) = \sup_{d\in D}\{\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}[2\beta V(x,r_t) + \int_0^t (l_{r_\tau}(x)+ u^{\mathrm{T}}R_{r_\tau}(x)u - \beta\lambda\gamma(\frac{|d|}{\lambda}))\mathrm{d}\tau]\}, \tag{13}$$

其中: $(\beta,\lambda)\in[2,\infty)\times(0,2]$,

$$l_i(x) = -2\beta\mathcal{L}V|_{(10-11)}+\beta(2-\lambda)\ell_\gamma(2|L_{g_i}V(x,i)|)+ \beta(\beta-2)L_{h_i}V(x,i)R_i^{-1}(L_{h_i}V(x,i))^{\mathrm{T}}. \tag{14}$$

证 由于在控制器(11)下, $V(x,i)(i = 1,\cdots,N)$是闭环系统(10)的一组李雅普诺夫函数, 因此存在一个连续正定的函数$W(x)$使得

$$\mathcal{L}V|_{(10-11)} \leqslant -W(x).$$

所以$l_i(x)$是正定的. 对任意的$h>0$, 定义停时

$$\eta_h = \inf\{t\geqslant 0: |x(t)|\geqslant h\}.$$

将$l_i(x)$代入$J(u)$, 可得

$$\begin{aligned}
&J(u) = \\
&\sup_{d\in D}\{\lim_{t\to\infty}\lim_{h\to\infty}\mathrm{E}[2\beta V(x(0),r_0)- \\
&2\beta\int_0^{t\wedge\eta_h}(L_{f_{r_\tau}}V(x,r_\tau)+L_{g_{r_\tau}(x)}V(x,r_\tau)d+ \\
&L_{h_{r_\tau}}V(x,r_\tau)u+\sum_{j=1}^N\pi_{r_\tau j}V(x,j))\mathrm{d}\tau- \\
&\int_0^{t\wedge\eta_h}(\beta\lambda\gamma(\frac{|d|}{\lambda})-2\beta L_{g_{r_\tau}(x)}V(x,r_\tau)d+ \\
&\beta\lambda\ell_\gamma(2|L_{g_{r_\tau}}V(x,r_\tau)|))\mathrm{d}\tau+ \\
&\int_0^{t\wedge\eta_h}(u^{\mathrm{T}}R_{r_\tau}(x)u+2\beta L_{h_{r_\tau}}V(x,r_\tau)u+ \\
&\beta^2L_{h_{r_\tau}}V(x,r_\tau)R_{r_\tau}^{-1}(L_{h_{r_\tau}}V(x,r_\tau))^{\mathrm{T}})\mathrm{d}\tau]\} = \\
&\mathrm{E}[2\beta V(x(0),r_0)+\beta\lambda\sup_{d\in D}\int_0^\infty \varPi(d,d^*)\mathrm{d}t+ \\
&\int_0^\infty((u-\alpha_{r_t}^*(x))^{\mathrm{T}}R_{r_t}(x)(u-\alpha_{r_t}^*(x)))\mathrm{d}t],
\end{aligned}$$

其中:

$$\varPi = -\gamma(\frac{|d|}{\lambda})+\gamma(\frac{|d^*|}{\lambda})-\gamma'(\frac{|d^*|}{\lambda})\frac{(d^*)^{\mathrm{T}}}{\lambda|d^*|}(d^*-d),$$

$$d_i^*(x) = \lambda(\gamma')^{-1}(2|L_{g_i}V(x,i)|)\frac{(L_{g_i}V(x,i))^{\mathrm{T}}}{|L_{g_i}V(x,i)|}.$$

易得, $\varPi(d,d^*)\leqslant 0$, 并且$\varPi(d,d^*)=0$当且仅当$d = d^*$[7]. 因此, 控制器(12)最小化性能指标(13), 且

$$\min_u J(u) = 2\beta\mathrm{E}V(x(0),r_0).$$

证毕.

定理 2 如果系统(3)有一组满足小控制性质的依概率输入–状态稳定控制李雅普诺夫函数$V(x,i)$, $i = 1,\cdots,N$, 则此系统的逆最优增益设计问题是可解的.

证 由于系统(3)有一组满足小控制性质的依概率输入–状态稳定控制李雅普诺夫函数$V(x,i), i = 1,\cdots,N$, 因此令

$$R_i(x) = \begin{cases} 2Q^{-1}(x,i)I, & L_{h_i}V(x,i)\neq 0,\\ \text{任意正定矩阵}, & L_{h_i}V(x,i)=0,\end{cases}$$

则$u = \alpha_i(x) = -R_i^{-1}(x)(L_{h_i}V(x,i))^{\mathrm{T}}$是在原点处取值为0的处处连续的函数[7]. 根据广义无穷小生成子定义有

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}V(x,i)|_{u=\alpha_i(x)} = \\
&L_{g_i(x)}V(x,i)d-|L_{g_i}V(x,i)|\rho^{-1}(|x|)- \\
&\frac{1}{2}(-\omega_i+\sqrt{\omega_i^2+(L_{h_i}V(x,i)(L_{h_i}V(x,i))^{\mathrm{T}})^2})\leqslant \\
&-W(x,i)-|L_{g_i}V(x,i)|[\rho^{-1}(|x|)-|d|],
\end{aligned}$$

其中正定函数

$$W(i) = \frac{1}{2}(-\omega_i+\sqrt{\omega_i^2+(L_{h_i}V(i)(L_{h_i}V(i))^{\mathrm{T}})^2}).$$

由此可得

$$L_{f_i+h_i\alpha_i}V(i)+\sum_{j=1}^N\pi_{ij}V(j)+ |L_{g_i}V(i)|\rho^{-1}(|x|) = -W(i).$$

由于$|L_{g_i}V(x,i)|$在原点处为0, 所以存在一个$\mathcal{K}_\infty$类函数ζ使得$|L_{g_i}V(x,i)|\leqslant\zeta(x)$, $i=1,\cdots,N$. 由于$\rho^{-1}\circ\zeta$是$\mathcal{K}_\infty$类函数, 所以存在一个$\mathcal{K}_\infty$类函数χ, 其导数也是$\mathcal{K}_\infty$类函数使$\chi(2r)\leqslant r\rho^{-1}(\zeta^{-1}(r))$. 令$\gamma=\ell\chi$, 则

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}V(x,i)|_{(10)}\leqslant \\
&L_{f_i+h_i\alpha_i}V(i)+\sum_{j=1}^N\pi_{ij}V(j)+
\end{aligned}$$

$$|L_{g_i}V(i)|\rho^{-1}(\zeta^{-1}(|L_{g_i}V(i)|)) \leqslant$$
$$L_{f_i+h_i\alpha_i}V(i)+\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}V(j)+|L_{g_i}V(i)|\rho^{-1}(x)=$$
$$-W(x,i).$$

因此系统(10)是全局依概率渐近稳定的. 由引理3可知, 系统(3)的逆最优增益设计问题是可解的.

证毕.

由定理1及定理2可知, 系统(9)的逆最优增益设计问题是可解的, 控制器由Sontag类型公式给出. 但是, 此控制器在零点可能不是光滑的. 下面本文设计光滑控制器来解决系统(9)的逆最优增益设计问题.

首先, 本文给出系统(9)的辅助系统. 令$\gamma(r)=\dfrac{1}{\kappa}r^2$, 其中常数$\kappa>0$. 则辅助系统为

$$\dot{x}=f(x)+\kappa g(L_gV)^{\mathrm{T}}+hu, \tag{15}$$

其中: $f(x)=(x_2,\cdots,x_{n-1},0)^{\mathrm{T}}$, $g=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)^{\mathrm{T}}$, $h=(0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$. 仍然考虑函数

$$V(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2(x_1,\cdots,x_i),$$
$$z_i(x_1,\cdots,x_i)=x_i-\alpha_{i-1}(x_1,\cdots,x_{i-1}).$$

为了解决逆最优增益设计问题, 根据引理3, 本文要设计光滑函数u为如下形式:

$$u=\alpha_n(x)=-R^{-1}(x)(L_hV(x))^{\mathrm{T}}=-R^{-1}(x)z_n,$$

其中$R(x)=R^{\mathrm{T}}(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}^n$, 使得沿着闭环系统(15), $\mathcal{L}V(x)$是负定的.

为了讨论方便, 记$z_0=0$, $\alpha_0=0$, $x_{n+1}=0$, $z_{n+1}=0$, 以及

$$(L_gV(x))^{\mathrm{T}}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V(x)}{\partial x_j}\varphi_j=\sum_{j=1}^{n}\varpi_jz_j,$$
$$\frac{\partial V(x)}{\partial x}f^{\mathrm{T}}(x)=\sum_{j=1}^{n}(x_{j+1}-\sum_{k=1}^{j-1}\frac{\partial\alpha_{j-1}}{\partial x_k}x_{k+1})z_j,$$
$$-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_k}x_{k+1}+z_nz_{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\phi_kz_k,$$

其中$\varpi_j(i)=\varphi_j(i)-\sum\limits_{k=1}^{j-1}\dfrac{\partial\alpha_{j-1}}{\partial x_k}\varphi_k(i)$.

沿着系统(15)有

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}V(x)=\\
&z_nu+\kappa\varpi_n^2z_n^2+2\kappa(\sum_{k=1}^{n-1}\varpi_kz_k)z_n\varpi_n+\\
&z_nz_{n-1}-z_n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_k}x_{k+1}+\sum_{i=1}^{n-1}z_i[z_{i-1}+\alpha_i-\\
&\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{j-1}}{\partial x_k}x_{k+1}+2\kappa(\sum_{k=1}^{i-1}\varpi_kz_k)\varpi_i+\kappa\varpi_i^2z_i]\leqslant\\
&z_nu+\kappa(2n-1)z_n^2\varpi_n^2+2\kappa\sum_{k=1}^{n-1}\varpi_k^2z_k^2-\\
&z_n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_k}x_{k+1}+z_nz_{n-1}+\\
&\sum_{i=1}^{n-1}\{z_i(z_{i-1}+\alpha_i-\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_k}x_{k+1}+\kappa\varpi_i^2z_i)+\\
&2\kappa\sum_{k=1}^{i-1}\varpi_k^2z_k^2+2\kappa(i-1)\varpi_i^2z_i^2\}\leqslant\\
&z_nu+\kappa(2n-1)z_n^2(\sum_{l=1}^{N}\varpi_n^2(l))-\\
&z_n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_k}x_{k+1}+z_nz_{n-1}+\\
&\sum_{i=1}^{n-1}z_i[z_{i-1}+\alpha_i+\kappa(\sum_{l=1}^{N}\varpi_i^2(l))z_i-\\
&\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_k}x_{k+1}+2\kappa(n-1)(\sum_{l=1}^{N}\varpi_i^2(l))z_i].
\end{aligned}$$

令

$$\alpha_i=-(z_{i-1}+c_iz_i+2\kappa(n-1)(\sum_{l=1}^{N}\varpi_i^2(l)z_i)-\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_k}x_{k+1}+\kappa(\sum_{l=1}^{N}\varpi_i^2(l))z_i)$$
$$R(x)=(c_n+\kappa(2n-1)(\sum_{l=1}^{N}\varpi_n^2(l))+\sum_{k=1}^{n}\frac{\phi_k^2}{2c_k})^{-1},$$

其中$c_i(i=1,\cdots,n)$为正常数. 则

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}V(x)\leqslant&-\sum_{k=1}^{n-1}c_kz_k^2-z_n^2R^{-1}(x)+\\
&\kappa(2n-1)z_n^2(\sum_{l=1}^{N}\varpi_n^2(l))+z_n\sum_{k=1}^{n}\phi_kz_k=\\
&-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}c_kz_k^2-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}c_k(z_k-\frac{\phi_k}{c_k}z_n)^2.
\end{aligned}$$

由引理3可知, 逆最优增益设计问题是可解的.

定理 3　对于系统(9), 存在一个光滑的控制器使得系统的逆最优增益设计问题是可解的.

5　仿真算例(Simulation example)

考虑二阶Markov跳跃系统

$$\dot{x}_1=x_2+\varphi_1(x_1,r_t)d(t),$$
$$\dot{x}_2=u+\varphi_2(x_1,x_2,r_t)d(t),$$

其中: Markov过程r_t的状态空间为$S=\{1,2\}$, 其他参数如下所示:

$$\pi_{11}=\pi_{22}=-0.5,\ \pi_{12}=\pi_{21}=0.5,$$
$$\varphi_1(x_1,1)=x_1\sin x_1,\ \varphi_1(x_1,2)=x_1\cos x_1,$$
$$\varphi_2(x_1,x_2,1)=-(2x_1+x_1^3)x_1\sin x_1,$$
$$\varphi_2(x_1,x_2,2)=-(2x_1+x_1^3)x_1\cos x_1.$$

取$\gamma(r)=0.5r^2$, $\beta=2$, $\lambda=1$, 根据定理3介绍的设计方法可得控制器及其他参数如下所示:

$$\alpha_1(x_1)=-(2x_1+x_1^3),\ z_2=x_2-\alpha_1(x_1),$$
$$V(x)=0.5x_1^2+0.5z_2^2,\ u=-2R(x)^{-1}z_2,$$
$$R(x)=(1+0.5x_1^2(2+3x_1^2))^{-1},$$

$$l(x,i) = -4x_1x_2 + 4z_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}x_1\varphi_1(x_1,i) - 8x_1^2\varphi_1^2(x_1,i) + 4R(x)^{-1}z_2^2.$$

设初始条件为$x(0) = (0.5, -0.5)^{\mathrm{T}}$, $r_0 = 2$, 并取$d(x,i) = 2x_1\varphi_1(x_1,i)$. 图1给出闭环系统(实线表示$x_1(t)$, 点线表示$x_2(t)$)、系统控制输入及跳跃模态的实验值曲线. 仿真结果表明控制器可达到预期的设计目标.

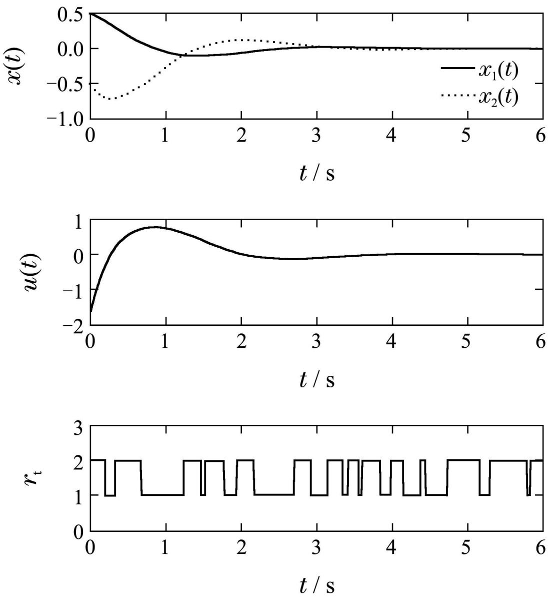

图 1 仿真曲线

Fig. 1 Simulation curves

6 结论(Conclusions)

本文讨论了Markov跳跃非线性系统的逆最优增益设计问题, 给出了其可解的两个充分条件. 同时, 讨论了严格反馈Markov跳跃非线性系统的依概率输入–状态可稳定性的设计方法, 并给出此系统的逆最优增益设计问题的一个解. 需要进一步研究的问题有Markov跳跃非线性随机逆最优增益设计问题, 也即考虑系统$\mathrm{d}x = f(x, r_t)\mathrm{d}t + g_1(x, r_t)\mathrm{d}w + g_2(x, r_t)u\mathrm{d}t$的随机逆最优增益设计问题, 其中$w \in \mathbb{R}^{n_w}$为$n_w$维Wiener噪声.

参考文献(References):

[1] MARITON M. *Jump Linear Systems in Automatic Control* [M]. New York: Marcel Dekker, 1990.

[2] MAO X R, YUAN C G. *Stochastic Differential Equations with Markovian Switching* [M]. London: Imperial College Press, 2006.

[3] ZHAO P, KANG Y, ZHAI D H. On input-to-state stability of stochastic nonlinear systems with Markovian jumping parameters [J]. *International Journal of Control*, 2011, 85(4): 343 – 349.

[4] XU S Y, CHEN T W, LAM J. Robust H_∞ filtering for uncertain Markovian jump systems with mode-dependent time delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(5): 900 – 907.

[5] SHI T, SU H Y, CHU J. Robust H-infinity control for uncertain discrete-time Markovian jump systems with actuator saturation [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2011, 9(4): 465 – 471.

[6] XIA J W. Robust H-infinity filter design for uncertain time-delay singular stochastic systems with Markovian jump [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2007, 5(4): 331 – 335.

[7] KRSTIĆ M, LI Z H. Inverse optimal design of input-to-state stabilizing nonlinear controllers [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(3): 336 – 350.

[8] FREEMAN R, KOKOTOVIĆ P. *Robust Nonlinear Control Design: State-Space and Lyapunov Techniques* [M]. Boston, MA: Birkhäuser, 1996.

[9] DENG H, KRSTIĆ M, WILLIAMS R J. Stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(8): 1237 – 1253.

[10] 王俊, 季海波, 奚宏生, 等. 严格反馈非线性系统的自适应逆最优控制 [J]. 中国科学技术大学学报, 2002, 32(6): 713 – 719.
(WANG Jun, JI Haibo, XI Hongsheng, et al. Adaptive inverse optimal control for strict feedback nonlinear systems [J]. *Journal of Science and Technology of China*, 2002, 32(6): 713 – 719.)

[11] 王俊, 奚宏生, 季海波, 等. 具有不确定Wiener噪声随机非线性系统的自适应逆最优控制 [J]. 自动化学报, 2004, 30(6): 824 – 832.
(WANG Jun, XI Hongsheng, JI Haibo, et al. Adaptive inverse optimal control of stochastic nonlinear systems with uncertain Wiener noises [J]. *Acta Automatic Sinica*, 2004(6), 30(6): 824 – 832.)

[12] KRSTIĆ M, KANELLAKOPOULOS I, KOKOTOVIĆ P. *Nonlinear and Adaptive Control Design* [M]. New York: Wiley, 1995.

[13] KRSTIĆ M, DENG H. *Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems* [M]. London: Springer-Verlag, 1998.

[14] ZHANG Y, LIU Y G, DING Y Q. A new nonlinear output tracking controller via output-feedback [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2006, 4(4): 372 – 378.

[15] WU Z J, XIE X J, SHI P, et al. Backstepping controller design for a class of stochastic nonlinear systems with markovian switching [J]. *Automatica*, 2009, 45(4): 997 – 1004.

[16] WU Z J, YANG J, SHI P. Adaptive tracking for stochastic nonlinear systems with markovian switching [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(9): 2135 – 2141.

[17] SONTAG E D. Smooth stabilization implies coprime factorization [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, 34(4): 435 – 443.

作者简介:

王传锐 (1987–), 男, 博士, 研究方向为非线性系统控制、多智能体系统控制等, E-mail: hugh@mail.ustc.edu.cn;

王兴虎 (1985–), 男, 博士, 研究方向为非线性系统控制、多智能体系统控制等, E-mail: xinghuw@mail.ustc.edu.cn;

季海波 (1964–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为非线性系统计算方法、非线性系统控制、鲁棒自适应控制等, E-mail: jihb@ustc.edu.cn.