

不确定离散时间系统的滑模可靠控制

孙娜娜, 牛玉刚[†], 陈 蓓, 刘永慧

(华东理工大学 化工过程先进控制和优化技术教育部重点实验室, 上海 200237)

摘要: 存在状态时滞的不确定离散时间系统的滑模可靠控制问题, 其中, 被控系统执行器可能发生部分故障. 通过构造一种拟积分型切换面, 可以保证系统状态轨迹从开始时刻就位于切换面上. 利用Lyapunov稳定性理论和线性矩阵不等式技术给出了滑模动态系统渐近稳定的充分条件. 而且, 所设计的滑模控制律可以保证在执行器故障影响下的滑动模态仍然是可达的. 数值仿真验证了本文设计方法的有效性.

关键词: 离散时间系统; 执行器故障; 滑模控制; 拟积分型切换面

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Sliding mode reliable control for uncertain discrete-time systems

SUN Na-na, NIU Yu-gang[†], CHEN Bei, LIU Yong-hui

(Key Lab Advanced Control and Optimization for Chemical Process of Ministry of Education,
East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China)

Abstract: We investigate the sliding mode reliable control for a class of uncertain discrete-time systems with delayed state, in which the controlled system may be subject to partial actuator degradation. An integral-like sliding surface is chosen such that the trajectories of states will lie in the sliding surface from the initial time. By means of Lyapunov stability theory and linear matrix inequality technique, a sufficient condition is derived to ensure the asymptotic stability of the sliding mode dynamics. A new sliding mode controller is designed to ensure the reachability of the sliding mode dynamics despite the effects of actuator degradation. Finally, the numerical simulation results further show the effectiveness of the proposed method.

Key words: discrete-time system; actuator degradation; sliding mode control; integral-like sliding surface

1 引言(Introduction)

在实际的工程应用中, 可靠性是控制系统正常工作的关键因素之一. 若控制系统中的元件(如执行器或传感器)由于自然磨损或老化发生故障, 将直接影响系统的控制性能, 甚至导致系统失稳. 因此, 可靠控制问题一直是控制领域的研究热点, 并取得了丰硕的研究成果^[1-3]. 特别是, 由于滑模控制在处理参数不确定性和外部干扰时所显示出的很强的鲁棒性^[4-5], 滑模可靠控制问题近年也开始受到研究人员的关注. 文献[6]针对含有故障的非线性系统提出模糊自适应滑模控制的方法, 引入滑模控制来抵消模糊逼近误差. 文献[7]则对于含有故障的非线性系统采用滑模控制的方法, 通过设计滑模面和控制律使闭环系统达到稳定. 然而, 值得注意的是上述工作大多是针对连续系统进行可靠性能的分析与设计的.

由于计算机控制的广泛应用, 近年来离散时间滑模控制的设计问题受到关注. 在离散时间控制系

统中, 控制信号只在每次状态采样时刻发生变化, 在整个采样周期将保持常值. 这意味着, 离散滑模控制系统的结构仅在离散的采样时刻才会发生切换, 这与连续滑模控制系统完全不同, 因为对于连续滑模控制系统, 一旦状态轨迹“越过”切换面, 控制信号就会发生切换. 由于有限的采样速率使得采样时刻不一定“恰好”发生在状态轨迹到达切换面的时刻, 从而导致在离散滑模控制系统中, 状态轨迹可以“接近”切换面, 但通常不会“停留”在切换面上, 而是在切换面的邻域内运动, 形成一种“准”滑动模态^[8-10]. 由于离散滑模控制的这种特殊性, 使得已有的连续系统滑模控制的研究成果并不能简单地被推广到离散系统中. 值得指出的是, 到目前为止, 针对存在执行器故障情况下离散系统滑模控制问题的研究还不多见, 因此, 开展执行器故障情况下的离散滑模控制问题的研究是十分必要和有意义的.

本文研究执行器可能发生故障情况下的一类不确

定离散时滞系统的滑模可靠控制问题. 设计了一种拟积分型切换面, 利用Lyapunov稳定性理论和线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)技术给出了滑模动态系统渐近稳定的充分条件, 并证明了所设计的离散滑模控制律可以保证滑动模态的可达性. 通过数值仿真验证了本文所设计方法的有效性.

2 系统描述(Systems description)

考虑不确定离散时滞系统

$$x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + (A_d + \Delta A_d)x(k-d) + Bu^F(k), \quad (1)$$

$$x(k) = \phi(k), \quad k \in \{-d, 0\}, \quad (2)$$

其中: $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u^F(k) \in \mathbb{R}^m$, A , A_d 和 B 为已知常数矩阵, d 为已知状态时滞. 不失一般性, 假设 (A, B) 完全可控, 矩阵 B 列满秩, ΔA 和 ΔA_d 为系统参数不确定性且满足

$$[\Delta A(k) \quad \Delta A_d(k)] = EF(k)[H \quad H_d], \quad (3)$$

其中: E , H 和 H_d 均为已知常数矩阵, $F(k)$ 满足

$$F^T(k)F(k) \leq I.$$

假设系统(1)–(2)可能发生执行器故障, 其故障模型为^[1]

$$u^F(k) = \alpha(k)u(k), \quad (4)$$

其中 $\alpha(k) = \text{diag}\{\alpha_1(k), \alpha_2(k), \dots, \alpha_m(k)\}$. 假设 $\alpha_i(k)$ 有界且满足 $0 < \underline{\alpha}_i \leq \alpha_i(k) \leq \bar{\alpha}_i$, 其中 $\underline{\alpha}_i \leq 1$, $\bar{\alpha}_i \geq 1$. 可知, 当 $\underline{\alpha}_i = \bar{\alpha}_i$, 即 $\alpha_i = 1$ 时, 表示执行器正常工作; $\underline{\alpha}_i \neq \bar{\alpha}_i$ 时, 表示执行器存在故障. 若令

$$\alpha_{0i} = \frac{\underline{\alpha}_i + \bar{\alpha}_i}{2}, \quad \beta_i = \frac{\bar{\alpha}_i - \underline{\alpha}_i}{\underline{\alpha}_i + \bar{\alpha}_i}, \quad \delta_i(k) = \frac{\alpha_i(k) - \alpha_{0i}}{\alpha_{0i}},$$

并记

$$\alpha_0 = \text{diag}\{\alpha_{01}, \alpha_{02}, \dots, \alpha_{0m}\},$$

$$\beta = \text{diag}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\},$$

$$\delta(k) = \text{diag}\{\delta_1(k), \delta_2(k), \dots, \delta_m(k)\},$$

那么, 可以得到

$$\alpha(k) = \alpha_0(I + \delta(k)), \quad \|\delta(k)\| \leq \|\beta\| < 1. \quad (5)$$

易知, 当执行器不存在故障时, $\alpha_{0i} = 1$, $\beta_i = 0$, $\delta_i = 0$.

注1 需要指出的是, 执行器故障模型(4)不包括 $\alpha_i = 0$ 的情况. 这是因为, $\alpha_i = 0$ 可能导致控制增益矩阵 $B\alpha(k)$ 非列满秩, 从而不满足上面的一般性假设条件. 因此, 本文考虑的是存在部分执行器故障的离散系统滑模控制问题.

3 滑模面设计与稳定性分析(Sliding mode control and stability analysis)

本节构造下面的拟积分型切换函数, 并进一步利

用等效控制律方法得到理想滑模动态方程:

$$S(k) = Gx(k) + \sigma(k), \quad (6)$$

$$\Delta\sigma(k) = G(I - A)x(k) - GA_d x(k-d), \quad (7)$$

$$\sigma(0) = -Gx(0), \quad (8)$$

其中: $S(k) = [S_1(k) \quad S_2(k) \quad \dots \quad S_m(k)]^T$, 设计矩阵 G 满足 GB 为非奇异矩阵. 易知, 选择 $G = B^T P$ (其中, $P > 0$ 将在后面的设计中给出)可以保证矩阵 GB 非奇异. 由式(6)–(8)可知 $S(0) = 0$, 即系统状态轨迹在初始时刻就位于切换面上. 因此, 本文设计的切换面可以消除切换面的趋近过程, 从而保证系统在全空间上具有很好的鲁棒性. 由离散滑模理论可知, 当系统状态进入切换面后有 $S(k+1) = S(k) = 0$, 因此, 可得系统的等效控制律为

$$u_{\text{eq}}(k) = -\alpha^{-1}R[\Delta Ax(k) + \Delta A_d x(k-d)], \quad (9)$$

其中 $R = (B^T P B)^{-1} B^T P$. 将等效控制律(9)代入系统(1), 可得理想情况下的滑模动态方程为

$$x(k+1) = (A + \Delta A - BR\Delta A)x(k) + (A_d + \Delta A_d - BR\Delta A_d)x(k-d). \quad (10)$$

注2 此处的等效控制律(9)仅是用于分析滑模动态系统的稳定性, 并不用于实际系统的控制. 事实上, 由于 $u_{\text{eq}}(k)$ 中存在参数不确定性, 所以, $u_{\text{eq}}(k)$ 也是无法实现的. 本文第4节中将设计具体的滑模控制律.

下面分析滑模动态方程(10)的稳定性, 并给出保证滑模动态系统渐近稳定的充分条件.

定理1 对于不确定离散时滞系统(1)–(2), 切换面由式(6)–(8)确定, 若存在 $P > 0$, $Q > 0$ 以及标量 $\varepsilon_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$)满足下面的LMI:

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & 0 & 2A^T P E & 0 \\ 0 & \Pi_2 & 0 & 2A_d^T P E \\ 2E^T P A & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ 0 & 2E^T P A_d & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} -B^T P B & B^T P E \\ E^T P B & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} -P & P E \\ E^T P & -\varepsilon_4 I \end{bmatrix} < 0, \quad (13)$$

其中:

$$\Pi_1 = 4A^T P A + 4\varepsilon_1 H^T H + 3\varepsilon_3 H^T H + 5\varepsilon_4 H^T H - P + Q,$$

$$\Pi_2 = 4A_d^T P A_d + 4\varepsilon_2 H_d^T H_d + 4\varepsilon_3 H_d^T H_d + 4\varepsilon_4 H_d^T H_d - Q.$$

那么, 滑模动态系统(10)是全局渐近稳定的.

证 选取Lyapunov函数为

$$V(k) = x^T(k)Px(k) + \sum_{i=k-d}^{k-1} x^T(i)Qx(i),$$

沿系统(10)的状态轨迹, 可得

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) = \Delta V_1(k) + \Delta V_2(k) + \Delta V_3(k), \quad (14)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Delta V_1(k) = & x^T(k)(A + \Delta A)^T P(A + \Delta A)x(k) - \\ & x^T(k)(A + \Delta A)^T PBR\Delta Ax(k) - \\ & x^T(k)\Delta A^T PBR(A + \Delta A)x(k) + \\ & x^T(k)[\Delta A^T PBR\Delta A - P + Q]x(k), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_2(k) = & 2x^T(k)\Delta A^T PBR\Delta A_d x(k-d) + \\ & 2x^T(k)(A + \Delta A)^T P(A_d + \Delta A_d)x(k-d) - \\ & 2x^T(k)(A + \Delta A)^T PBR\Delta A_d x(k-d) - \\ & 2x^T(k)\Delta A^T PBR(A_d + \Delta A_d)x(k-d), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_3(k) = & -x^T(k-d)Qx(k-d) + \\ & x^T(k-d)(A_d + \Delta A_d)^T P(A_d + \Delta A_d)x(k-d) - \\ & x^T(k-d)(A_d + \Delta A_d)^T PBR\Delta A_d x(k-d) - \\ & x^T(k-d)\Delta A_d^T PBR(A_d + \Delta A_d)x(k-d) + \\ & x^T(k-d)\Delta A_d^T PBR\Delta A_d x(k-d). \end{aligned} \quad (17)$$

对于式(15)右边的第2和第3项, 可得

$$\begin{aligned} & -x^T(k)(A + \Delta A)^T PBR\Delta Ax(k) - \\ & x^T(k)\Delta A^T PBR(A + \Delta A)x(k) \leq \\ & x^T(k)(A + \Delta A)^T P(A + \Delta A)x(k) + \\ & x^T(k)\Delta A^T PBR\Delta Ax(k). \end{aligned} \quad (18)$$

对于式(16)右边的第1项, 可得

$$\begin{aligned} & 2x^T(k)\Delta A^T PBR\Delta A_d x(k-d) \leq \\ & x^T(k-d)\Delta A_d^T PBR\Delta A_d x(k-d) + \\ & x^T(k)\Delta A^T P\Delta Ax(k). \end{aligned} \quad (19)$$

对于式(16)右边的第2项, 可得

$$\begin{aligned} & 2x^T(k)(A + \Delta A)^T P(A_d + \Delta A_d)x(k-d) \leq \\ & x^T(k-d)(A_d + \Delta A_d)^T P(A_d + \Delta A_d)x(k-d) + \\ & x^T(k)(A + \Delta A)^T P(A + \Delta A)x(k). \end{aligned} \quad (20)$$

对于式(16)右边的第3项, 可得

$$\begin{aligned} & -2x^T(k)(A + \Delta A)^T PBR\Delta A_d x(k-d) \leq \\ & x^T(k)(A + \Delta A)^T P(A + \Delta A)x(k) + \\ & x^T(k-d)\Delta A_d^T PBR\Delta A_d x(k-d). \end{aligned} \quad (21)$$

对于式(16)右边的第4项, 可得

$$\begin{aligned} & -2x^T(k)\Delta A^T PBR(A_d + \Delta A_d)x(k-d) \leq \\ & x^T(k-d)(A_d + \Delta A_d)^T P(A_d + \Delta A_d)x(k-d) + \\ & x^T(k)\Delta A^T PBR\Delta Ax(k). \end{aligned} \quad (22)$$

同理, 对于式(17)右边的第3和第4项, 可得

$$\begin{aligned} & -x^T(k-d)[(A_d + \Delta A_d)^T PBR\Delta A_d + \\ & \Delta A_d^T PBR(A_d + \Delta A_d)]x(k-d) \leq \\ & x^T(k-d)(A_d + \Delta A_d)^T P(A_d + \Delta A_d)x(k-d) + \\ & x^T(k-d)\Delta A_d^T PBR\Delta A_d x(k-d). \end{aligned} \quad (23)$$

此外, 对于 $\varepsilon_1 > 0$ 和 $\varepsilon_2 > 0$, 分别有

$$\begin{aligned} & x^T(k)(A + \Delta A)^T P(A + \Delta A)x(k) \leq \\ & x^T(k)A^T PAx(k) + x^T(k)\varepsilon_1^{-1}A^T PEE^T PAx(k) + \\ & x^T(k)\varepsilon_1 H^T Hx(k) + x^T(k)\Delta A^T P\Delta Ax(k), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & x^T(k-d)(A_d + \Delta A_d)^T P(A_d + \Delta A_d)x(k-d) \leq \\ & x^T(k-d)[A_d^T PA_d + \varepsilon_2^{-1}A_d^T PEE^T PA_d + \\ & \varepsilon_2 H_d^T H_d + \Delta A_d^T P\Delta A_d]x(k-d). \end{aligned} \quad (25)$$

于是, 本文得到

$$\Delta V(k) < [x(k) \ x(k-d)]\Sigma \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d) \end{bmatrix}, \quad (26)$$

其中:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Pi_3 & 0 \\ 0 & \Pi_4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Pi_3 = & 4A^T PA + 4\varepsilon_1 H^T H + 5\Delta A^T P\Delta A - P + \\ & 4\varepsilon_1^{-1}A^T PEE^T PA + 3\Delta A^T PBR\Delta A + Q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_4 = & 4A_d^T PA_d + 4\varepsilon_2 H_d^T H_d + 4\Delta A_d^T P\Delta A_d + \\ & 4\varepsilon_2^{-1}A_d^T PEE^T PA_d + 4\Delta A_d^T PBR\Delta A_d - Q. \end{aligned}$$

因此, 当 $\Sigma < 0$ 时, 有 $\Delta V(k) < 0(x(k) \neq 0)$. 由 Schur's 引理可知, $\Sigma < 0$ 等价于

$$\begin{bmatrix} \Pi_5 & 0 & 2A^T PE & \sqrt{3}\Theta B & 0 & \sqrt{5}\Theta & 0 & 0 \\ * & \Pi_6 & 0 & 0 & 2\Theta_d B & 0 & 2\Theta_d & 2A_d^T PE \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Gamma & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -P & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -P & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (27)$$

其中:

$$\Theta = \Delta A^T P, \Theta_d = \Delta A_d^T P, \Gamma = B^T PB,$$

$$\Pi_5 = 4A^T PA + 4\varepsilon_1 H^T H - P + Q,$$

$$\Pi_6 = 4A_d^T PA_d + 4\varepsilon_2 H_d^T H_d - Q.$$

易知, 式(27)等价于

$$\begin{bmatrix} \Pi_5 & 0 & 2A^TPE & 0 & 0 & \sqrt{5}\Theta & 0 & 0 \\ * & \Pi_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\Theta_d & 2A_d^TPE \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Gamma & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -P & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -P & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} +$$

$$W_1^T F_0^T Y_1^T + Y_1 F_0 W_1 < 0, \quad (28)$$

其中:

$$F_0 = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix},$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2H_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E^T PB & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E^T PB & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于

$$W_1^T F^T Y_1^T + Y_1 F W_1 \leq \varepsilon_3^{-1} Y_1 Y_1^T + \varepsilon_3 W_1^T W_1,$$

那么, 下面的式(29)–(30)可以保证式(28)成立:

$$\begin{bmatrix} \Pi_7 & 0 & 2A^TPE & \sqrt{5}\Theta & 0 & 0 \\ * & \Pi_8 & 0 & 0 & 2\Theta_d & 2A_d^TPE \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -P & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -P & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (29)$$

$$-B^T PB + \varepsilon_3^{-1} B^T P E E^T P B < 0, \quad (30)$$

其中:

$$\Pi_7 = 4A^T P A + 4\varepsilon_1 H^T H + 3\varepsilon_3 H^T H - P + Q,$$

$$\Pi_8 = 4A_d^T P A_d + 4\varepsilon_2 H_d^T H_d + 4\varepsilon_3 H_d^T H_d - Q.$$

同理, 式(29)等价于下式:

$$\begin{bmatrix} \Pi_7 & 0 & 2A^TPE & 0 & 0 & 0 \\ * & \Pi_8 & 0 & 0 & 0 & 2A_d^TPE \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -P & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -P & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} +$$

$$W_2^T F_0^T Y_2^T + Y_2 F_0 W_2 < 0, \quad (31)$$

其中:

$$W_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{5}H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2H_d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E^T P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E^T P & 0 \end{bmatrix}.$$

从而, 式(11)–(13)可保证式(31)成立.

因此, 如果线性矩阵不等式(11)–(13)成立, 则有 $\Sigma < 0$, 从而有 $\Delta V(k) < 0$ (当 $x(k) \neq 0$ 时). 根据 Lyapunov 稳定性理论可得滑模动态系统(10)是渐近稳定的. 证毕.

4 滑模控制律的设计 (Sliding mode controller design)

定理1已给出理想滑动模态系统(10)渐近稳定的充分条件. 下面将进一步分析滑动模态的可达性. 通过设计滑模控制律保证状态轨迹在有限时间内到达切换面 $S(k) = 0$ 的邻域并保持在该区域内.

定理 2 针对不确定离散时滞系统(1)–(2)和执行器故障模型(4), 设计切换函数(6)–(8)和如下的滑模控制律:

$$u(k) = \begin{cases} -\alpha_0^{-1} \zeta \rho \frac{S(k)}{\|S(k)\|}, & \|S(k)\| \neq 0, \\ 0, & \|S(k)\| = 0, \end{cases} \quad (32)$$

其中: $\rho = \rho_0 + \eta \|S(k)\|$, $\rho_0 = \|RE\| [\|Hx(k)\| + \|H_d x(k-d)\|]$, $\eta = \frac{\zeta(1 - \|\beta\|^2) - 2}{4\zeta^2(1 + \|\beta\|)^2 \|B^T P B\|}$, $\zeta > \frac{2}{1 - \|\beta\|^2}$. 那么, 滑模控制律(32)能保证系统在有限时间内进入准滑模区域 Ω 并最终稳定于该区域内:

$$\Omega = \{\|S(k)\| \leq \Delta, \Delta = 2\rho_0 \sqrt{\frac{[1 + \zeta^2(1 + \|\beta\|)^2] \|B^T P B\|}{\eta \zeta(1 - \|\beta\|^2) + 2}}\}.$$

证 选取 Lyapunov 函数为

$$V_2(k) = \frac{1}{2} S^T(k) (B^T P B)^{-1} S(k),$$

沿系统轨迹得到

$$\Delta V_2(k) = S^T(k) (B^T P B)^{-1} \Delta S(k) + \frac{1}{2} \Delta S(k)^T (B^T P B)^{-1} \Delta S(k), \quad (33)$$

其中 $\Delta S(k) = S(k+1) - S(k)$.

将系统方程(1)和控制律(32)代入式(6)–(8)可得

$$\Delta S(k) = B^T P \Delta A x(k) + B^T P \Delta A_d x(k-d) - B^T P B (I + \delta) \zeta \rho \frac{S(k)}{\|S(k)\|}. \quad (34)$$

对于式(33)右边的第1项, 利用式(34)可得

$$S^T(k) (B^T P B)^{-1} \Delta S(k) = S^T(k) RE [F H x(k) + F H_d x(k-d)] - \zeta \rho \|S(k)\| - \frac{\zeta \rho}{\|S(k)\|} S^T(k) \delta S(k). \quad (35)$$

由于 $\|\delta\| \leq \|\beta\| < 1$, 那么

$$-\frac{\zeta \rho}{\|S(k)\|} S^T(k) \delta S(k) \leq$$

$$\frac{1}{2} \frac{\zeta \rho}{\|S(k)\|} [S^T(k) \delta^T \delta S(k) + S^T(k) S(k)] \leq \frac{1}{2} \zeta \rho \|S(k)\| (1 + \|\beta\|^2), \quad (36)$$

从而, 由式(35)和式(36)可知

$$\begin{aligned} & S^T(k) (B^T P B)^{-1} \Delta S(k) \leq \\ & \|S(k)\| \|RE\| [\|Hx(k)\| + \|H_d x(k-d)\|] - \\ & \zeta \rho \|S(k)\| + \frac{1}{2} \zeta \rho \|S(k)\| (1 + \|\beta\|^2) \leq \\ & -[\frac{1}{2} \zeta (1 - \|\beta\|^2) - 1] \rho_0 \|S(k)\| - \\ & \frac{1}{2} \zeta \eta (1 - \|\beta\|^2) \|S(k)\|^2. \end{aligned} \quad (37)$$

对于式(33)右边的第2项, 由式(34)可知

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \Delta S^T(k) (B^T P B)^{-1} \Delta S(k) = \\ & \frac{1}{2} [FH_d x(k-d) + FHx(k)]^T E^T P B \times \\ & RE [FHx(k) + FH_d x(k-d)] + \\ & \frac{1}{2} \frac{S^T(k)}{\|S(k)\|} \rho \zeta (I + \delta) B^T P B (I + \delta) \zeta \rho \frac{S(k)}{\|S(k)\|} - \\ & \frac{1}{2} \frac{S^T(k)}{\|S(k)\|} \rho \zeta (I + \delta) B^T P E [FHx(k) + \\ & FH_d x(k-d)] - \frac{1}{2} [FHx(k) + \\ & FH_d x(k-d)]^T E^T P B (I + \delta) \zeta \rho \frac{S(k)}{\|S(k)\|}, \end{aligned} \quad (38)$$

其中, 对于式(38)右边的后两项:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \frac{S^T(k)}{\|S(k)\|} \rho \zeta (I + \delta) B^T P E [FHx(k) + \\ & FH_d x(k-d)] - \frac{1}{2} [FHx(k) + FH_d x(k-d)]^T \cdot \\ & E^T P B \times (I + \delta) \rho \zeta \frac{S(k)}{\|S(k)\|} \leq \\ & \frac{1}{2} \frac{S^T(k)}{\|S(k)\|} \rho \zeta (I + \delta) B^T P B (I + \delta) \zeta \rho \frac{S(k)}{\|S(k)\|} + \\ & \frac{1}{2} [FH_d x(k-d) + FHx(k)]^T E^T P B \times \\ & RE [FHx(k) + FH_d x(k-d)]. \end{aligned} \quad (39)$$

因此, 由式(38)和式(39)可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \Delta S^T(k) (B^T P B)^{-1} \Delta S(k) \leq \\ & [FH_d x(k-d) + FHx(k)]^T E^T P B \times \\ & RE [FHx(k) + FH_d x(k-d)] + \\ & \frac{S^T(k)}{\|S(k)\|} \rho \zeta (I + \delta) B^T P B (I + \delta) \zeta \rho \frac{S(k)}{\|S(k)\|} \leq \\ & [\|Hx(k)\| + \|H_d x(k-d)\|] \|B^T P E R E\| \times \\ & [\|Hx(k)\| + \|H_d x(k-d)\|] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho^2 \zeta^2 (1 + \|\beta\|)^2 \|B^T P B\| \leq \\ & [\rho_0^2 + (\rho_0 + \eta \|S(k)\|)^2 \zeta^2 (1 + \|\beta\|)^2] \|B^T P B\|. \end{aligned} \quad (40)$$

综上, 将式(37)和式(40)代入式(33), 可得

$$\begin{aligned} \Delta V_2(k) \leq & -\frac{1}{4} \eta \|S(k)\|^2 [\zeta (1 - \|\beta\|^2) + 2] + \\ & [1 + \zeta^2 (1 + \|\beta\|)^2] \rho_0^2 \|B^T P B\|. \end{aligned} \quad (41)$$

当 $\|S(k)\| > \Delta$ (即系统状态轨迹位于在准滑模区域外面) 时, 有 $\Delta V_2(k) < 0$, 从而系统状态轨迹将渐近收敛于准滑模区域 Ω 内. 证毕.

注 3 由定理2可知, 本文所设计的滑模控制律可以保证在执行器故障和状态时滞的影响下, 系统状态轨迹在有限时间内“被吸引”在切换面的邻域内. 而且, 由于控制律只在状态轨迹进入或离开该邻域时才发生切换, 因此, 该邻域可以起到对滑模控制系统固有的“抖振”现象的一种消弱作用.

5 数值仿真(Simulation)

考虑不确定离散时滞系统(1)–(2), 其参数分别为:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -0.8 & 0.5 & 0.2 \\ -2 & -0.3 & 0.2 \\ -3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & -0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1.4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}, F(k) = \sin k, \\ H &= [0.2 \ 0.4 \ 0.2], H_d = [0.1 \ 0.2 \ -0.2]. \end{aligned}$$

设时滞 $d = 1$, $\alpha_1 = 0.4$, $\alpha_2 = 0.6$, $\bar{\alpha}_1 = 1.2$, $\bar{\alpha}_2 = 1.4$, $\zeta = 4$, 则 $\alpha_0 = \text{diag}\{0.8, 1\}$, $\beta = \text{diag}\{0.5, 0.4\}$. 容易看出 $\zeta > 2/(1 - \|\beta\|^2)$ 成立. 求解线性矩阵不等式(11)–(13), 可以得到:

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} 187.6870 & 90.7743 & -1.7647 \\ 90.7743 & 107.1417 & -27.5291 \\ -1.7647 & -27.5291 & 194.7530 \end{bmatrix}, \\ Q &= \begin{bmatrix} 138.5520 & 77.2371 & 20.1527 \\ 77.2371 & 152.0539 & 42.5524 \\ 20.1527 & 42.5524 & 133.5649 \end{bmatrix}, \\ G &= \begin{bmatrix} -104.8158 & 112.3474 & 115.6951 \\ 94.4421 & -54.9081 & 298.4186 \end{bmatrix}, \\ \varepsilon_1 &= 178.0159, \varepsilon_2 = 174.8054, \\ \varepsilon_3 &= 242.2476, \varepsilon_4 = 228.6914. \end{aligned}$$

设采样时间 $T = 0.1$ s, 初始状态为 $x(0) = [-0.1 \ -0.2 \ 0.2]^T$. 假设在 $t = 5$ s 时执行器发生故障, 且控制信号 $u^F(k)$ 为

$$u^F(k) = \begin{bmatrix} \gamma \times 0.8 + 0.4 & 0 \\ 0 & \gamma \times 0.8 + 0.6 \end{bmatrix} u(k),$$

其中 γ 为0~1之间的随机数. 仿真结果如图1~3所示, 可以看出, 本文设计的控制律可以有效地削弱时滞和执行器故障给系统带来的影响, 使闭环系统渐近稳定且 $S(k)$ 最终收敛于一个比较窄的准滑模区域内.

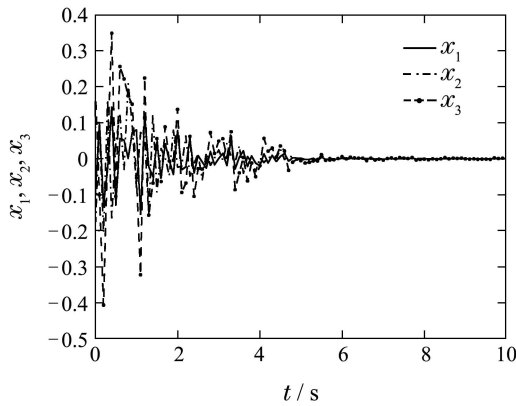


图1 系统的状态轨迹
Fig. 1 Trajectories of states

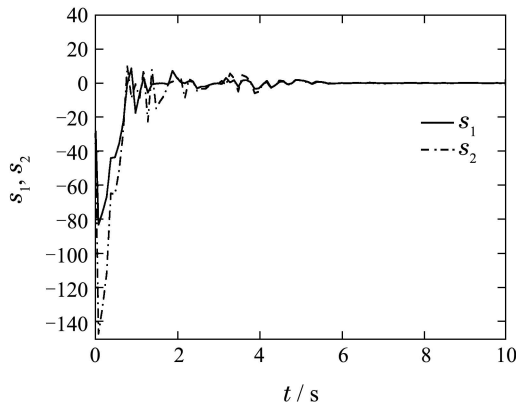


图2 滑模变量轨迹
Fig. 2 Trajectories of sliding mode variable

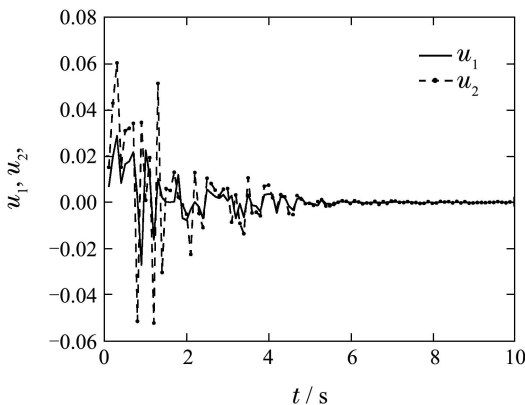


图3 控制输入信号
Fig. 3 Control input signals

6 结论(Conclusions)

本文讨论了存在部分执行器故障情况下不确定离散时滞系统的滑模控制问题, 证明了设计的拟积分切换面和滑模控制律可以使闭环系统渐近稳定, 有效地削弱了时滞和执行器故障带来的影响.

参考文献(References):

- [1] NIU Y, WANG X. Sliding mode control design for uncertain delay systems with partial actuator degradation [J]. *International Journal of Systems Science*, 2009, 40(4): 403 – 409.
- [2] GAO J, HUANG B, WANG Z. Robust reliable control for a class of uncertain nonlinear systems with time-varying multistate time delays [J]. *International Journal of Systems Science*, 2001, 32(7): 817 – 824.
- [3] 贾新春, 郑南宁, 张元林. 线性不确定时滞系统的可靠性能鲁棒控制 [J]. *自动化学报*, 2003, 29(6): 971 – 975. (JIA Xinchun, ZHENG Nanning, ZHANG Yuanlin. Reliable guaranteed cost robust control for linear uncertain time delay systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2003, 29(6): 971 – 975.)
- [4] 王瑞芬, 贾廷纲, 牛玉刚. 一类控制输入饱和和受限的不确定系统滑模控制 [J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(9): 1154 – 1158. (WANG Ruifen, JIA Tinggang, NIU Yugang. Sliding-mode control for uncertain systems with input saturation [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(9): 1154 – 1158.)
- [5] 肖会敏, 赵林, 王春花. 不确定时滞切换系统的鲁棒滑模控制 [J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(11): 1621 – 1626. (XIAO Huimin, ZHAO Lin, WANG Chunhua. Robust sliding mode control for a class of uncertain switched systems with time-delay [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(11): 1621 – 1626.)
- [6] 张颖伟, 王小刚, 王福利. 基于模糊自适应滑模的非线性系统的故障调节 [J]. *控制与决策*, 2005, 20(4): 408 – 411. (ZHANG Yingwei, WANG Xiaogang, WANG Fuli. Fault accommodation for nonlinear systems using fuzzy adaptive sliding control [J]. *Control and Decision*, 2005, 20(4): 408 – 411.)
- [7] LIANG Y, XU S. Reliable control of nonlinear systems via variable structure scheme [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(10): 1721 – 1726.
- [8] NIU Y, HO D W C, WANG Z. Improved sliding mode control for discrete time systems via reaching law [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(11): 2245 – 2251.
- [9] JANARDHANAN S, KARIWALA V. Multirate output feedback based LQ optimal discrete-time sliding mode control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(1): 367 – 373.
- [10] LAI N O, EDWARDS C. Discrete output feedback sliding mode control with integral action [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2006, 16(1): 21 – 43.

作者简介:

孙娜娜 (1987-), 女, 主要研究方向为离散变结构控制系统, E-mail: sunnana_ecust@126.com;

牛玉刚 (1964-), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为随机控制系统、滑模控制、网络拥塞控制等, E-mail: acniuyg@ecust.edu.cn;

陈蓓 (1985-), 女, 博士研究生, 主要研究方向为滑模变结构控制、Markov跳跃系统的理论以及应用等, E-mail: chenbeicust@yahoo.com.cn;

刘永慧 (1986-), 女, 博士研究生, 主要研究方向为滑模变结构控制、切换系统的理论以及应用等, E-mail: lyh886@163.com.